

# تحلیل کمانش و پس از کمانش صفحات دارای گشودگی با استفاده از روش نیمه انرژی

تقی شجاعی<sup>۱\*</sup>، مهدی بستان شیرین<sup>۲</sup>، بیژن محمدی<sup>۳</sup>، رضا معدولیت<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری رشته مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

<sup>۲</sup> دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

<sup>۳</sup> دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

\*مسئول مکاتبات: bijan\_mohammadi@iust.ac.ir

## چکیده

## واژگان کلیدی

بار بحرانی کمانش  
رفتار پس از کمانش  
روش نیمه انرژی  
ورق دارای گشودگی  
روش گسسته‌سازی

تا کنون روش‌های مختلفی برای تحلیل پدیده کمانش و پس از کمانش صفحه‌های مورد استفاده در سازه‌ها ارائه شده است که برخی از آن‌ها برای بررسی ورق‌های دارای گشودگی نیز قابل استفاده هستند. در میان روش‌های ارائه شده، روش نیمه انرژی به دلیل دقت بالا در حل مسأله، در ورق‌های بدون گشودگی بسیار مورد توجه محققان واقع شده است. اما تاکنون این روش بر روی ورق‌های دارای گشودگی پیاده سازی نشده است، به همین دلیل، در این مقاله، بکارگیری روش نیمه انرژی برای تحلیل ورق مستطیلی با گشودگی مربعی مرکزی بررسی شده است. در توسعه این روش، از تکنیک گسسته سازی ورق به نواحی با شرایط مرزی معین بهره گرفته شده است. پس از ارایه الگوریتم حل و روابط حاکم، این مسأله برای ورق ایزوتروپ و کامپوزیت حل شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که روش نیمه انرژی ارائه شده، قابلیت پیاده سازی جهت تحلیل کمانش و پس از کمانش ورق دارای گشودگی را دارد ولی با توجه به بزرگ بودن نواحی گسسته سازی، دقت آن پایین است.

## تاریخچه مقاله

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۲۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۲۰

## ۱ مقدمه

با استفاده از همین روش، اثر خارج از مرکز بودن گشودگی در میزان بارکمانش را محاسبه کرده‌اند. در مطالعه دیگری در سال ۲۰۰۱، اثر جابجایی محل گشودگی در جهت عرضی با استفاده از روش المان محدود توسط نظمی و همکاران [۴] انجام گرفته است. در این کار، رفتار کمانش الاستیک ورق دارای گشودگی دایره‌ای و مستطیلی در موقعیت‌های مختلف گشودگی بررسی شده است. سپس، در سال ۲۰۰۴، کمانش الاستیک-پلاستیک ورق دارای گشودگی توسط همین گروه مورد مطالعه قرار گرفته است [۵]. در همان سال، کامور و پایک [۶]، با استفاده از روابط تحلیلی، کمانش ورق ترک‌دار را برای انواع ترک‌ها و بارگذاری‌های مختلف بررسی نمودند. در این مقاله، صفحه دارای ترک، به ناحیه‌های کوچکتر با شرایط مرزی معین تقسیم شده و میدان جابجایی در هر ناحیه با توجه به شرایط مرزی آن، با استفاده از توابع مثلثاتی تعریف شده است. پس از حل مسأله کمانش، نتایج به دست آمده از این روش با روش المان محدود اعتبارسنجی شده است.

ورق‌ها و پوسته‌های نازک فلزی یا کامپوزیتی به عنوان مؤلفه‌های اصلی و پایه در سازه‌های ساده و پیچیده، کاربرد فراوانی پیدا کرده‌اند. از این ورق‌ها در صنایع هوافضا، عمران، کشتی سازی و مکانیک استفاده زیادی شده است. موضوع کاهش وزن و مزیت‌های آن در هر سازه‌ای قابل طرح بوده و در سازه‌های هوافضایی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. همچنین در بسیاری از سازه‌ها، جهت کاهش وزن، دسترسی برای بازمینی، تعمیر، تعویض قطعه، عبور لوله و سیم، ایجاد پنجره یا درب و امثال آن، لازم است تا طراح، گشودگی‌هایی با اندازه و شکل‌های مختلف در سازه در نظر بگیرد. این امر خود بر پیچیدگی مسئله افزوده و کار طراحی را مشکل‌تر کرده است. چو و نارایانان [۱] در سال ۱۹۸۴ اثر اندازه و محل گشودگی بر روی ظرفیت کمانش ورق را با استفاده از روش المان محدود، بررسی کرده‌اند. آن‌ها نتایج خود را برای دو شکل گشودگی دایره‌ای و مربعی گزارش نموده‌اند. طبق نتایج این مقاله، موقعیت طولی گشودگی و اندازه آن می‌تواند ضریب کمانش ورق را تغییر دهد.

وانگ و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۹، با استفاده از تحلیل المان محدود خطی و غیرخطی، اثر اندازه ورق، شکل و اندازه گشودگی بر روی تنش‌های برشی و فشاری ایجاد شده در جهت‌های طولی و عرضی را مطالعه نموده‌اند. در مطالعه دیگر، پلگرینو و همکاران [۸]، اثر بارهای نیمه متمرکز در ورق‌های دارای گشودگی بر روی ظرفیت کمانش ورق را به چاپ رسانده‌اند. در این مطالعه از روش المان محدود استفاده شده و کمانش ورق با شرایط تکیه گاهی ساده، با حضور گشودگی دایره‌ای و مربعی بررسی شده است. اثر تغییرات اندازه گشودگی، محل گشودگی و جهت آن در ظرفیت کمانش

در ۱۹۹۰، براون و همکاران [۲]، با استفاده از روش نیرو-جابجایی مزدوج، بار کمانش الاستیک در ورق‌های مربعی شکل با گشودگی مرکزی تحت بارگذاری‌های مختلف را پیش بینی کرده‌اند. نتیجه کار آن‌ها نشان می‌دهد که با افزایش اندازه گشودگی، ظرفیت کمانش ورق تحت بارگذاری برشی، به شدت کاهش پیدا می‌کند. همچنین در ۱۹۹۶، شکرلی و براون [۳]،

خمشی استفاده نمود.

در مطالعه دیگری در سال ۲۰۰۲، رودز [۱۴] روش نوار محدود را به همراه روش نیمه انرژی برای سازه‌های تشکیل شده از ورق‌های نازک تحت بارگذاری فشاری ارائه کرده است. او در این مقاله هر سازه را به صورت نوارهای باریک به هم چسبیده در نظر گرفته و روش نیمه انرژی را در هر نوار پیاده ساخته است.

در همین راستا، در سال ۲۰۰۵، اویسی و همکاران [۱۵]، روش نوارمحدود را برای بررسی کمانش ورق‌های کامپوزیتی ارائه و نتایج را با روش نیمه تحلیلی مقایسه نموده‌اند. در روش نوار محدود، ورق به نوارهای مستطیلی تقسیم شده و در هر نوار روابط روش پیاده سازی می‌گردد. تقسیم بندی ورق به نوارهای متعدد، دقت حل را افزایش داده و همچنین امکان بررسی ورق با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت را فراهم نموده است. روش نوار محدود نسبت به روش المان محدود، سرعت حل بالاتری داشته و همگرایی حل در آن تضمین شده‌است. در این کار، اثر شکل و اندازه نایجابی اولیه جهت شروع کمانش بررسی شده و رفتار پس از کمانش ورق گزارش شده است.

اویسی و همکاران [۱۶]، در ادامه، الگوریتم و روابط مربوط به روش نیمه انرژی را در روش نوارمحدود اعمال نموده و مسأله کمانش ورق‌های کامپوزیتی را بررسی کرده‌اند. نتایج کار آن‌ها نشان داده است که روش نیمه انرژی، در مقایسه با روش انرژی کامل، سرعت همگرایی بالاتری داشته و حجم محاسبات بسیار کمتر می‌باشد. سپس حاجی کاظمی و همکاران [۱۷، ۱۸]، در راستای توسعه روش نوارمحدود-نیمه انرژی، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول را در روش حل اعمال نموده و توانستند، کمانش و رفتار پس از کمانش ورق‌های نسبتاً ضخیم را بررسی نمایند.

در مطالعه‌ای دیگر اویسی و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۱۴، کمانش ورق‌های ضخیم و رفتار فراکمانشی آن را مطالعه نموده‌اند. در این کار، ورق بدون گشودگی با استفاده از روش نوارمحدود تحلیل شده است. آن‌ها روش نوار محدود را با روش نیمه انرژی ترکیب و روابط مربوطه را برای ورق‌های ضخیم استخراج نموده‌اند. در این مقاله، فرض شده است که فرم تغییرشکل یافته بعد از کمانش برابر ترکیبی از مودهای کمانش بوده و سپس رفتار پس از کمانش بررسی شده است.

با توجه به مطالعات انجام شده، در زمینه کمانش و پس از کمانش ورق‌ها، در سال‌های اخیر، روش نوارمحدود نیمه انرژی<sup>۲</sup> به دلیل سرعت حل بالاتر نسبت به روش‌های انرژی کامل و دقت مناسب در پیش بینی رفتار پس از کمانش ورق، اقبال بیشتری پیدا نموده است. در این روش حجم محاسبات نسبت به روش‌های المان محدود و روش‌های نیمه تحلیلی دیگر، بسیار پایین تر بوده و احتمال واگرایی آن بسیار کم است.

همانطور که اشاره شد، تاکنون روش نیمه انرژی در تحلیل ورق‌های دارای گشودگی استفاده نشده‌است. بنابراین هدف از این مقاله، بررسی امکان بکارگیری روش نیمه انرژی در تحلیل کمانش ورق‌های دارای گشودگی است. برای این منظور، پس از معرفی روش نیمه انرژی، ایده استفاده از روش گسسته‌سازی<sup>۳</sup> برای تحلیل کمانش و پس از کمانش یک ورق مستطیلی با

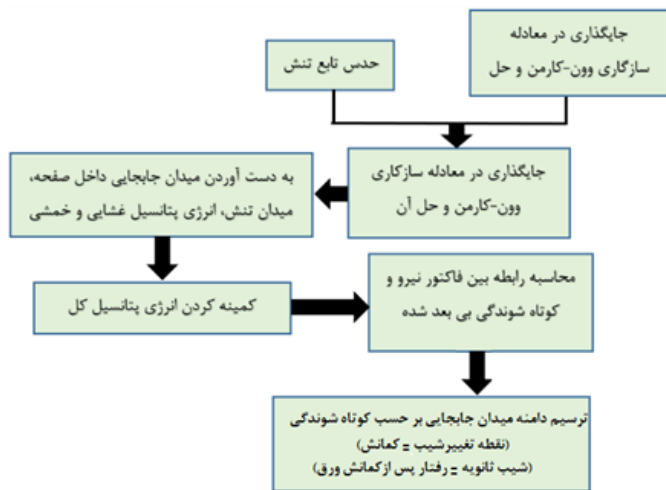
گزارش شده است. در بین مسایلی که به بررسی رفتارهای مختلف ورق، از جمله تمرکز تنش، تخمین فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی و باربرحرائی کمانش برای ورق‌های دارای گشودگی انجام شده است، می‌توان به مقاله ارائه شده توسط ژاکسیگ و همکاران [۹] اشاره نمود. آن‌ها در سال ۲۰۱۳، یک روش نیمه تحلیلی برای تعیین بارکمانش الاستیک در یک ورق نازک دارای ترک داخلی ارائه کرده‌اند. در این کار، ورق به نواحی کوچکتر با شرایط مرزی مشخص تقسیم بندی شده و با استفاده از توابع مختلط و روش ریلی-ریتز<sup>۱</sup>، بار بحرانی کمانش و مود کمانش محاسبه شده است. در این کار، تغییرات بار بحرانی کمانش و مود تغییرشکل ورق برای طول‌های مختلف ترک و نسبت‌های ابعادی مختلف صفحه با شرایط مرزی‌های متفاوت بررسی شده است.

روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی ارائه شده برای تحلیل کمانش ورق‌های دارای گشودگی توانایی پیش بینی رفتار پس از کمانش ورق‌ها را نداشته و کارهای انجام شده بر روی ورق‌های دارای گشودگی، محدود به تحلیل کمانش آن‌ها است. به همین دلیل تا کنون تنها از روش المان محدود برای بررسی رفتار پس از کمانش ورق‌های دارای گشودگی مفید خواهد بود. پس از بررسی کارهای انجام شده در زمینه پیش بینی رفتار پس از کمانش ورق‌های بدون گشودگی می‌توان نتیجه گرفت که تنها روش نیمه تحلیلی که می‌تواند رفتار پس از کمانش را با دقت مناسب و سرعت حل بالا پیش‌بینی نماید، روش نیمه‌انرژی است. در ادامه، کارهای انجام شده در زمینه گسترش کاربرد این روش اشاره شده است.

رودز و هاروی [۱۰] برای اولین بار در سال ۱۹۷۱ روش نیمه انرژی را برای تحلیل پس از کمانش ورق‌های کامل، تحت فشار تک‌محوره ارائه نموده‌اند. آن‌ها در روش خود، روابطی به کار برده‌اند که در گذشته توسط مرگری [۱۱] در بررسی مودهای ارتعاشی ورق استفاده شده بود. در روش نیمه انرژی، میدان جابجایی خارج از صفحه و فرم کلی تابع تنش حدس زده شده و با استفاده از معادلات سازگاری وون-کارمن، میدان‌های جابجایی داخل صفحه به دست می‌آید. روابط ارائه شده در این مقاله برای ورق کامل با شرایط تکیه‌گاهی ساده و لبه‌های بالا و پایین آزاد قابل استفاده است. برای بررسی کمانش، یکی از لبه‌ها ثابت در نظر گرفته شده و به لبه دیگر جابجایی کوتاه شوندگی اعمال شده است. بعد از حل مسأله، رابطه بین کوتاه شوندگی و جابجایی خارج از صفحه در ورق به دست می‌آید. نمودار دامنه جابجایی خارج از صفحه بر حسب کوتاه شوندگی انتهای ورق، نشان دهنده باربرحرائی کمانش و رفتار پس از کمانش ورق است.

در سال ۱۹۷۵، آن‌ها در ادامه کار خود، روش نیمه انرژی را برای بررسی رفتار پس از کمانش ورق کامل با نایجابی استفاده نمودند [۱۲]. در این مقاله، خیز اولیه مشخص به عنوان نقص به ورق اعمال شده و اثرات میزان این خیز در ظرفیت پس از کمانش ورق را گزارش کرده‌اند. سپس رودز [۱۳] در سال ۱۹۸۲، از این روش برای تحلیل پس از کمانش ورق تحت بارگذاری

<sup>1</sup>Rayleigh-Ritz method    <sup>2</sup>Finite strips semi-energy method    <sup>3</sup>Discretization

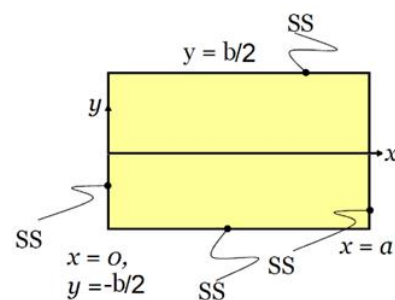


شکل ۲: فلوجارت روند حل مسأله کمانش و پس از کمانش با روش نیمه انرژی

گشودگی مربعی در مرکز، بررسی شده است. پس از توسعه روابط، جهت صحت سنجی و محاسبه دقت روش، مثال عددی برای دو ورق فلزی و کامپوزیتی حل شده و نتایج به دست آمده، با نتایج روش المان محدود مقایسه خواهد شد.

## ۲ روش نیمه انرژی

یک ورق با شرایط تکیه گاهی ساده مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است. در این ورق هر چهار لبه تکیه گاه ساده داشته و جابجایی ورق در  $x = 0$ ، صفر است و در  $x = a$  به ورق جابجایی کوتاه شونده اعمال گشته است. با افزایش میزان کوتاه شونده، ورق تغییر شکل داده و در یک مقدار بحرانی دچار کمانش خواهد شد.



شکل ۱: ورق مستطیلی با شرایط مرزی ساده

## ۳ پیاده سازی روش نیمه انرژی برای ورق دارای گشودگی

همانطور که در بخش قبل اشاره شد، اولین گام در روش نیمه انرژی، تخمین میدان جابجایی خارج از صفحه و به دست آوردن تابع تنش است. میدان جابجایی باید به گونه ای حدس زده شود که شرایط مرزی را ارضا نماید. از آنجاییکه به سبب وجود گشودگی در میان ورق، ناپیوستگی ایجاد شده است، حدس این تابع دشوار شده و به همین علت تاکنون روش نیمه انرژی بر روی ورق های دارای گشودگی پیاده سازی نشده است. با بررسی کارهای انجام شده بر روی ورق های دارای گشودگی، می توان دید که روش گسسته سازی برای تحلیل کمانش، تمرکز تنش و تحلیل فرکانسی متداول است. در روش گسسته سازی، ورق به نواحی پیوسته کوچک تر با شرایط مرزی مشخص تقسیم شده و در هر ناحیه مسأله به صورت مستقل حل خواهد شد. بنابراین در این مقاله نیز روش گسسته سازی استفاده شده است. در بخش بعد، ایده پیاده سازی روش نیمه انرژی به همراه روش گسسته سازی برای یک ورق مستطیلی با گشودگی مربعی مرکزی بررسی خواهد شد. برای پیاده سازی این روش فرض شده است که می توان میدان جابجایی خارج از صفحه هر زیر ناحیه را با توجه به شرایط مرزی آن به صورت حاصلضرب یک تابع مثلثاتی در یک تابع چندجمله ای بیان نمود.

در روش تمام انرژی، میدان های جابجایی درون صفحه و خارج از صفحه با توجه به شرایط مرزی ورق حدس زده شده و سپس انرژی پتانسیل غشایی ورق نوشته گشته و طبق اصل کمینه کردن انرژی پتانسیل، میزان انرژی حداقل شده و دامنه جابجایی خارج از صفحه محاسبه می گردد.

از آنجایی که در این روش، میدان تنش حدس زده نمی شود، انرژی پتانسیل خمشی قابل محاسبه نبوده و به همین دلیل، رفتار پس از کمانش ورق در دسترس نخواهد بود.

بر خلاف روش تمام انرژی، در روش نیمه انرژی فقط میدان جابجایی خارج از صفحه ورق ( $w$ ) حدس زده شده و دو مؤلفه جابجایی درون صفحه را با استفاده از رابطه سازگاری وون-کارمن (رابطه (۱)) می توان تعیین کرد.

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad (1)$$

از جایگذاری میدان جابجایی در رابطه (۱)، فرم کلی تابع تنش ( $F$ ) معین خواهد شد. پس از حل معادلات دیفرانسیل حاصل و برقراری شرایط مرزی، تابع تنش به طور کامل مشخص است. بنابراین میدان تنش در ورق به صورت کامل تعیین شده است و می توان انرژی پتانسیل غشایی و خمشی در ورق را محاسبه نمود. با بکارگیری اصل کمینه کردن انرژی پتانسیل ورق، دامنه جابجایی خارج از صفحه نیز به دست خواهد آمد. فلوجارت روند حل مسأله پس از کمانش با روش نیمه انرژی در شکل ۲ نمایش داده شده است. برای اطلاع از جزئیات رابطه های این روش می توان از مرجع [۸] استفاده نمود.

### ۱.۳ توسعه روابط مربوط به ورق با گشودگی مربعی

در شکل ۳، یک ورق مربعی به ابعاد  $2a \times 2a$  با گشودگی مربعی به ابعاد  $2(a-b) \times 2(a-b)$  در مرکز آن نمایش داده شده است. با توجه به تقارن موجود در مسأله مورد بررسی، می توان یک چهارم آن را مطابق شکل ۴ در نظر گرفت. جهت ساده شدن روابط می توان ابعاد ورق را با تغییر متغیر زیر بی بعد نمود. با این کار، روابط (۲) نوشته شده مستقل از ابعاد ورق خواهند شد.

$$\begin{aligned} x &= \zeta/a \\ y &= \eta/a \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 W_{\gamma} &= A_1 (\lambda y - \gamma y^3 + y^4) \sin(\pi x / 2) \\
 0 &\leq x \leq b/a, 0 \leq y \leq b/a \\
 W_{\gamma} &= A_2 y \sin(\pi x / 2) \\
 b/a &\leq x \leq 1, 0 \leq y \leq b/a \\
 W_{\gamma} &= A_3 x \sin(\pi y / 2) \\
 0 &\leq x \leq b/a, b/a \leq y \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{۳}$$

در روابط فوق  $A_i$   $i = 1, 2, 3$  دامنه میدان‌های جابجایی خارج از صفحه هستند. با جایگذاری میدان‌های جابجایی فوق، در معادلات سازگاری وون-کارمن، می‌توان فرم تابع تنش را به دست آورده و سپس، معادلات ایجاد شده را حل نمود. توابع تنش به دست آمده ناحیه‌های یک تا سه به ترتیب در روابط (۴) تا (۶) آورده شده‌اند:

$$\begin{aligned}
 F_{\gamma} &= F_{\gamma 1}(y) + F_{\gamma 2}(y) \cos(\pi x) \\
 F_{\gamma 1}'' &= \frac{(E\pi^2 A_{\gamma}^*)}{16} f_{\gamma}^y + c_{\gamma 1} y + c_{\gamma 2} \\
 F_{\gamma 2} &= c_{\gamma 1} \operatorname{sh}(\pi y) + c_{\gamma 2} \operatorname{ch}(\pi y) + \\
 &c_{\gamma 3} y \operatorname{sh}(\pi y) + c_{\gamma 4} y \operatorname{ch}(\pi y) + \\
 R_P (f_{\gamma}^x - f_{\gamma} f_{\gamma}''')
 \end{aligned}
 \tag{۴}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\gamma} &= F_{\gamma 1}(y) + F_{\gamma 2}(x) \cos(\pi y) \\
 F_{\gamma 1}'' &= \frac{(E\pi^2 A_{\gamma}^*)}{16} f_{\gamma}^y + c_{\delta 1} x + c_{\delta 2} \\
 F_{\gamma 2} &= c_{\delta 1} \operatorname{sh}(\pi x) + c_{\delta 2} \operatorname{ch}(\pi x) + \\
 &c_{\delta 3} x \operatorname{sh}(\pi x) + c_{\delta 4} y \operatorname{ch}(\pi x) + \\
 R_P (f_{\gamma}^y - f_{\gamma} f_{\gamma}''')
 \end{aligned}
 \tag{۵}$$

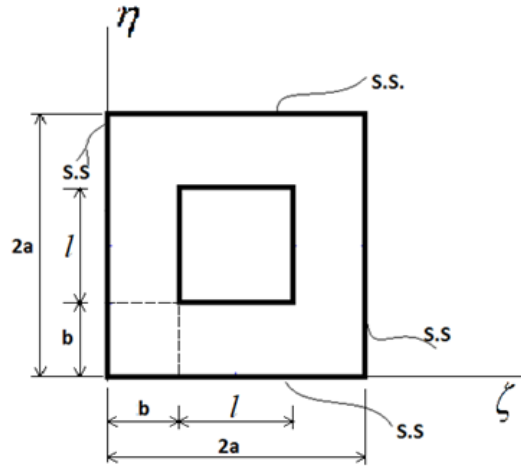
$$\begin{aligned}
 F_{\gamma} &= F_{\gamma 1}(y) + F_{\gamma 2}(x) \cos(\pi y) \\
 F_{\gamma 1}'' &= \frac{(E\pi^2 A_{\gamma}^*)}{16} f_{\gamma}^y + c_{\delta 1} x + c_{\delta 2} \\
 F_{\gamma 2} &= c_{\delta 1} \operatorname{sh}(\pi x) + c_{\delta 2} \operatorname{ch}(\pi x) + \\
 &c_{\delta 3} x \operatorname{sh}(\pi x) + c_{\delta 4} y \operatorname{ch}(\pi x) + \\
 R_P (f_{\gamma}^y - f_{\gamma} f_{\gamma}''')
 \end{aligned}
 \tag{۶}$$

در روابط بالا،  $F_i$ ،  $i = 1, 2, 3$  تابع تنش ناحیه  $i$ ام بوده و  $R_P$  جواب خصوصی معادله است. ثوابت به دست آمده در معادلات (۴) تا (۶) را با استفاده از شرایط مرزی می‌توان مشخص کرد.

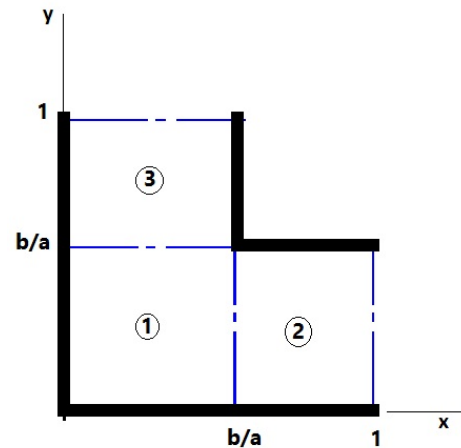
شرایط مرزی حاکم در این مسأله شامل شرایط مرزی در مرزهای خارجی ورق و شرایط مرزی پیوستگی جابجایی و تنش در مرز مشترک ناحیه‌ها هستند. از آنجاییکه تعداد شرط‌های پیوستگی بیشتر از تعداد ثوابت ظاهر شده در معادلات فوق است، ارضای پیوستگی برای تمامی پارامترهای جابجایی و تنش‌ها در مرزهای مشترک امکان پذیر نخواهد بود. به همین دلیل، تنها می‌توان پیوستگی در بعضی از پارامترهای جابجایی و میدان تنش را ایجاد نمود. همچنین طبق بررسی‌های به عمل آمده، مشخص شد که برخی از گروه‌های شرایط مرزی، دستگاه معادلات قابل حل ایجاد نمی‌کنند. بنابراین لازم است تا شرایط مرزی مناسب به دست بیاید. طبق بررسی‌های به عمل آمده، برقراری

پس از بی بعد سازی، محدوده تغییرات پارامترهای  $x$  و  $y$  برای ورق و سوراخ به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
 \text{ورق} & 0 < x < 2, 0 < y < 2 \\
 \text{سوراخ} & \frac{b}{a} < x < 1, \frac{b}{a} < y < 1
 \end{aligned}$$



شکل ۳: ورق مربعی شکل با گشودگی مربعی در مرکز آن



شکل ۴: یک چهارم ورق دارای گشودگی مربعی

با استفاده از روش گسسته سازی و با توجه به شرایط مرزی، می‌توان یک چهارم مورد بررسی را به سه ناحیه مطابق شکل تقسیم نمود.

$$\begin{aligned}
 \text{ناحیه اول: } & 0 < x < b/a, 0 < y < b/a \\
 \text{ناحیه دوم: } & b/a < x < 1, 0 < y < b/a \\
 \text{ناحیه سوم: } & 0 < x < b/a, b/a < y < 1
 \end{aligned}$$

هریک از این سه ناحیه را می‌توان به صورت یک ورق کامل در نظر گرفته و روابط نیمه انرژی را بر روی هر یک پیاده سازی کرد. بنابراین می‌بایست میدان جابجایی خارج از صفحه در هر ناحیه، متناسب با شرایط مرزی آن حدس زده شده و روش نیمه انرژی را در هر یک حل کرد.

فرم کلی میدان جابجایی خارج از صفحه را می‌توان به صورت حاصل ضرب یک تابع چند جمله‌ای در یک تابع مثلثاتی انتخاب نمود به گونه‌ای که شرایط مرزی در هر ناحیه ارضا شود. با توجه به شرایط مرزی ناحیه‌های مسأله مورد نظر، توابع (۳) برای میدان جابجایی  $W$  انتخاب شده‌اند:

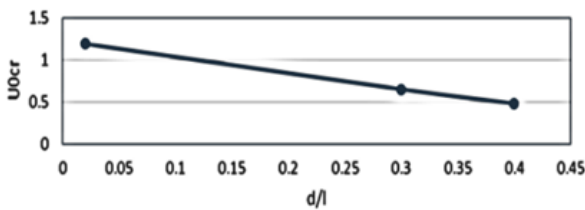
### ۱.۴ ورق ایزوتروپ

مشخصات ورق فلزی ایزوتروپ بررسی شده در جدول ۲ آورده شده است. پارامترهای  $a$  و  $b$  مطابق شکل ۳ هستند.

جدول ۲: مشخصات ورق بررسی شده

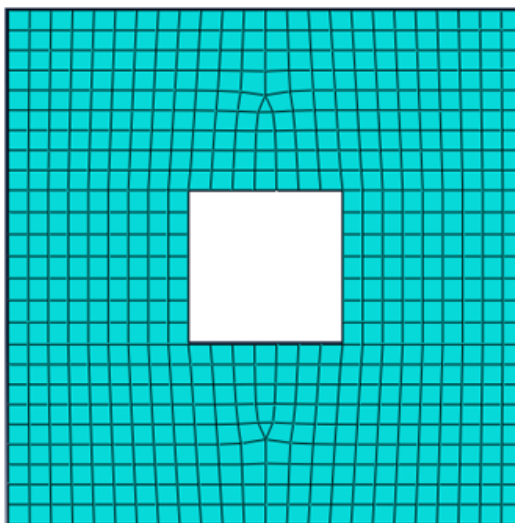
$E=70 \text{ GPa}$	$\nu=0.2$
$a=50 \text{ mm}$	$t=1 \text{ mm}$
$b=\{30,35,49\} \text{ mm}$	$d/l=\{0.4,0.3,0.02\}$

مقادیر کوتاه شونده بحرانی به ازای اندازه‌های مختلف گشودگی از حل با روش نیمه انرژی به دست آمده اند در نمودار شکل ۵ نمایش داده شده است. با توجه به شکل، همانطور که انتظار می رود، با افزایش اندازه گشودگی، ظرفیت کمانش ورق کاهش یافته است.



شکل ۵: تغییرات جابجایی بحرانی برحسب اندازه گشودگی

جهت اعتبار سنجی نتایج به دست آمده، مثال مورد نظر با نرم افزار آباکوس نیز شبیه سازی و حل شد. برای مش بندی ورق از المان‌های مربعی چهار گره ای و مثلثی سه گره ای shell از نوع CPS4R و CPS3R استفاده شده است. برای آنکه بتوان ورق را به صورت یکپارچه مش بندی نمود، قبل از مش بندی، با دستور Partition، صفحه به قسمت‌های کوچکتر بخش بندی شده و سپس مش بندی شده است. ورق مش بندی شده در این نرم افزار در شکل ۶ نمایش داده شده است. همانطور که می بینیم، فقط دو المان مثلثی توسط نرم افزار ایجاد شده است.



شکل ۶: ورق مش بندی شده در آباکوس

برای شبیه سازی کمانش غیر خطی در این نرم افزار، ابتدا مسأله کمانش خطی حل شده و از مودهای کمانش به دست آمده در این مرحله، جهت تحلیل

شرط پیوستگی در مؤلفه‌های تنش برشی، تنش نرمال و جابجایی نقاط میانی در مرز مشترک ناحیه‌ها، دستگاه معادلاتی را حاصل می‌کند که قابل حل بوده و ثابت‌های معادلات به دست می‌آیند. این شرایط مرزی در جدول ۱ آورده شده‌اند.

جدول ۱: شرایط مرزی استفاده شده جهت پیدا کردن ثابت معادلات

$w_1\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{2a}\right) = w_3\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{2a}\right)$	$w_1\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{2a}\right) = w_2\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{2a}\right)$
$\tau_{1xy}(\circ, y) = \circ$	$\sigma_{1y}\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{2a}\right) = \sigma_{2y}\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{2a}\right)$
$\sigma_1(\circ, y) = \circ$	$\tau_{1y}\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{2a}\right) = \tau_{2y}\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{2a}\right)$
$\sigma_{2y}(\circ, y) = \circ$	$\tau_{2xy}(\circ, y) = \circ$
$\sigma_{2y}(b/a, y) = \circ$	$\tau_{2xy}(\circ, y) = \circ$
$\sigma_{3x}(b/a, y) = \circ$	$\tau_{2xy}(b/a, y) = \circ$
$\sigma_{3y}(b/a, y) = \circ$	
$v_1\left(\frac{b}{2a}, \frac{b}{a}\right) = v_3\left(\frac{b}{2a}, \frac{b}{a}\right)$	$u_1(2, y) = -\bar{u}$

پس از مشخص شدن ثابت‌های معادلات (۴) تا (۶)، توابع تنش در تمامی ناحیه‌ها مشخص شده و مؤلفه‌های تنش درون صفحه نیز قابل محاسبه خواهند بود. بنابراین در هر ناحیه انرژی پتانسیل خمشی ( $V_b$ ) و غشایی ( $V_m$ ) را می‌توان مطابق روابط (۷) و (۸) محاسبه نمود [۱۰]:

$$V_{bi} = \frac{D}{\gamma} \times \iint_{A_i} \left\{ \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\} dx dy \quad (7)$$

$$V_{mi} = \frac{t}{2E} \iint_{A_i} \left\{ (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 2(1+\nu)(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \right\} dx dy \quad (8)$$

انرژی کل ورق با گشودگی، برابر مجموع انرژی‌های به دست آمده از روابط فوق در سه ناحیه خواهد بود. با کمیته کردن مجموع انرژی‌های سه ناحیه، رابطه بین دامنه جابجایی خارج از صفحه و کوتاه شونده انتهای ورق به دست می‌آید. باید توجه داشت که در مسأله مورد نظر، به دلیل تقارن، انرژی کل ورق چهار برابر انرژی سه ناحیه مورد بررسی است. اما از آنجایی که انرژی کمیت اسکالر است، کمیته کردن انرژی سه ناحیه مورد بررسی معادل کمیته شدن انرژی کل ورق خواهد بود.

### ۴ حل مثال عددی

جهت بررسی دقت روش ارائه شده، الگوریتم حل در نرم افزار Maple تهیه شده است. پارامترهای ورودی کد شامل، مشخصات ماده، ابعاد ورق و ابعاد سوراخ و خروجی کد، میزان کوتاه شونده بحرانی و بار بحرانی که در آن کمانش اتفاق می‌افتد است. سپس، دو مثال ورق ایزوتروپ و ورق کامپوزیتی دارای گشودگی مربعی در مرکز با کد مورد نظر حل شده است. در هر مثال، بار بحرانی کمانش به ازای اندازه‌های مختلف گشودگی محاسبه گردیده و نتیجه‌های به دست آمده با نتایج حاصل از مدلسازی در نرم افزار آباکوس مقایسه شده است.



نمودارها برای گشودگی‌های مختلف در شکل ۷ ترسیم شده است. نمودارها بر حسب پارامترهای بی بعد جابجایی ( $U^*$ ) و نیرو ( $P^*$ ) که مطابق روابط (۹) هستند [۱۶]، ترسیم شده اند.

با توجه به نمودارهای شکل ۷، شیب نمودار در یک نقطه دچار تغییر شده است که این نقطه نشان دهنده بار بحرانی کمانش است. با افزایش جابجایی شیب نمودار کاهش داشته و ورق همچنان ظرفیت تحمل بار را دارد. شیب دوم مشاهده شده در نمودار بیانگر رفتار پس از کمانش ورق‌ها است. در ناحیه پس از کمانش که بعد از کوتاه شونده‌گی بحرانی اتفاق می افتد، ظرفیت تحمل بار ورق کاهش یافته است.

همانطور که انتظار می‌رود، در هر دو روش، با افزایش ابعاد سوراخ، ظرفیت باربرانه کمانش ورق کاهش یافته است. همچنین، مقایسه بین دو روش نشان می دهد که روش ارائه شده در این مقاله، رفتاری مشابه نتایج به دست آمده از شبیه سازی المان محدود داشته است. بنابراین، روش نیمه انرژی ارائه شده، توانایی تحلیل رفتار پس از کمانش ورق را داشته است. جهت بررسی میزان دقت روش توسعه یافته در این مقاله، باربرانه‌گی به دست آمده از روش نیمه انرژی و مدل‌سازی در نرم افزار آباکوس و میزان خطای بین آن‌ها در جدول ۳ گزارش شده است.

جدول ۳: باربرانه‌گی به دست آمده از روش نیمه انرژی و المان محدود

d/a	آباکوس $P_c r^*$	نیمه انرژی $P_c r^*$	درصد خطا
۰	۰.۹۴۷	۰.۹۳۵	۱.۳
۰.۰۲	۰.۹۳۸	۰.۸۸۶	۵.۵
۰.۳	۰.۸۵۶	۰.۷۶۴	۱۰.۷
۰.۴	۰.۸۴۸	۰.۷۵۱	۱۱.۴

## ۲.۴ ورق کامپوزیتی

به منظور بررسی قابلیت روش پیشنهاد شده در تحلیل ورق‌های ناهمسانگرد، ورق کامپوزیتی چهارلایه با ابعاد  $100 \times 100 \text{ mm}^2$  متقارن با ضخامت لایه‌های برابر  $0.25 \text{ mm}$  نیز به کار گرفته شده است. آرایش زاویه الیاف به صورت متقارن- متعامد (Cross ply) است. مشخصات یک لایه از ورق مدل سازی شده در جدول ۴ نمایش داده شده است.

جدول ۴: مشخصات ماده یک لایه از لیمینت بررسی شده

$\frac{E_1}{E_2} = 40$	$\frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5$	$v_{12} = v_{13} = v_{23} = 0.25$
------------------------	---	-----------------------------------

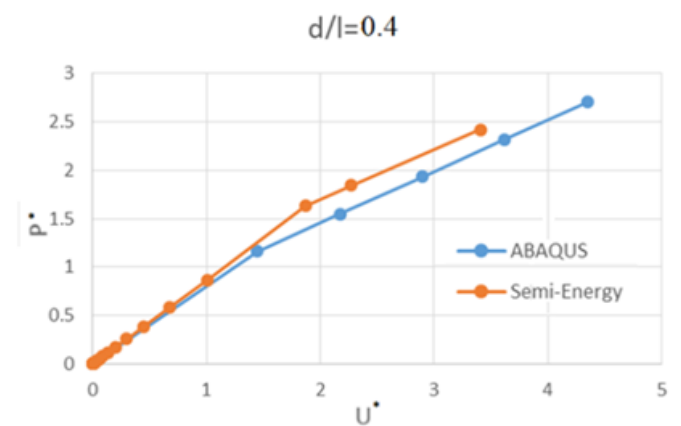
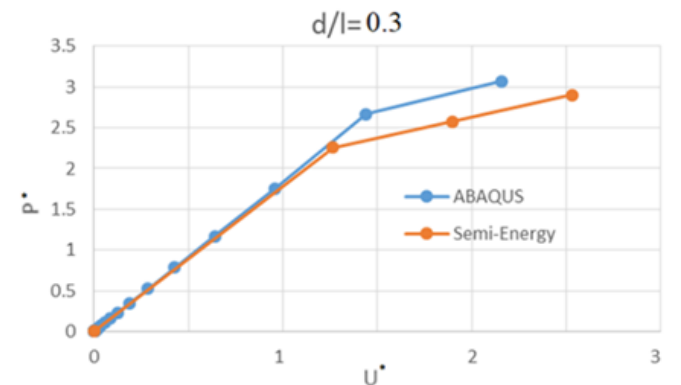
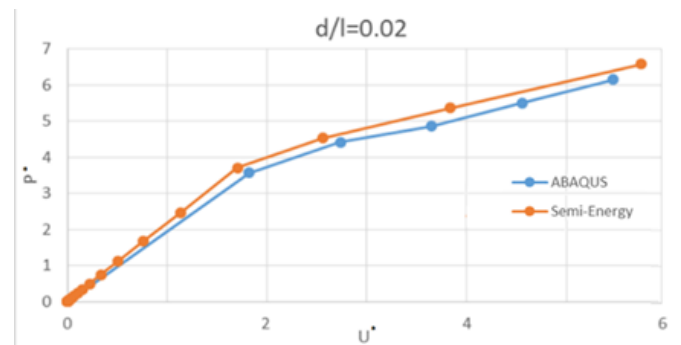
مجدداً مسأله برای اندازه‌های مختلف گشودگی با روش نیمه انرژی و نرم افزار آباکوس حل شده است. برای نمونه، در شکل ۸ نمودار تغییرات بار بر اساس کوتاه شونده‌گی ورق کامپوزیتی برای نسبت اندازه  $d/l = 0.2$  نمایش داده شده است.

مقایسه بار بحرانی کمانش به دست آمده از روش نیمه انرژی و تحلیل المان محدود با نرم افزار آباکوس، برای اندازه گشودگی‌های مختلف، در جدول ۵ گزارش شده است.

غیرخطی (پس از کمانش) استفاده خواهد شد. برای انجام تحلیل غیرخطی، در قسمت شرایط مرزی ورق، کوتاه شونده‌گی به لبه آن اعمال شده و تحلیل Statics Riks به کار گرفته شده است. برای شروع کمانش و ادامه یافتن تغییر شکل ورق، لازم است یک نقص اولیه که ترکیبی از مودهای کمانش ورق است به آن اعمال گردد که این کار با استفاده از دستور Imperfection انجام شده است. پس از اجرای شبیه سازی نمودار تغییرات نیرو بر حسب کوتاه شونده‌گی از خروجی نرم افزار گرفته شده و با نتایج روش نیمه انرژی مقایسه شده اند.

$$U^* = \frac{12(1-\nu^2)\bar{U}a}{\pi^2 t^2} \quad (9)$$

$$P^* = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{12\nu^2 t^2}{\pi^2 t^2 E} dy$$



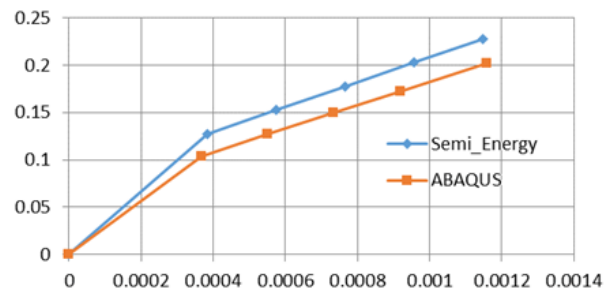
شکل ۷: نمودار تغییرات فاکتور نیرو  $P^*$  بر حسب کوتاه شونده‌گی بی بعد شده  $U^*$  از دو روش نیمه انرژی و تحلیل آباکوس

پیدا می‌کند. منابع ایجاد خطا، در این روش را می‌توان بزرگ بودن نواحی در نظر گرفته شده در مرحله گسسته سازی، تقریبی بودن تابع تنش و ارضای شرط پیوستگی در تعداد نقاط کم برشمرد. در صورتیکه روش نوارمحدود نیمه انرژی مورد استفاده قرار گیرد، انتظار می‌رود که دقت روش افزایش یافته و همچنین بررسی گشودگی با شکل‌های مختلف را نیز امکان پذیر می‌کند. به علاوه با به کارگیری روش نوارمحدود نیمه انرژی، امکان افزایش تعداد جملات جابجایی خارج از صفحه ایجاد شده و می‌توان در تعداد نقاط بیشتری، شرایط پیوستگی تنش و جابجایی در مرز مشترک ناحیه‌ها را برقرار نمود.

## مراجع

- [1] Chow and Narayanan. Buckling of plates containing openings. in *7th international Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, pp. 39–53, Columbia, Missouri, 1984. International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures.
- [2] Brown. Elastic buckling of perforated plates subjected to concentrated loads. *Computers and Structures*, 36(6):1103–1109, 1990.
- [3] Shakerley and Brown. Elastic buckling of plates with eccentrically positioned rectangular perforations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 38(8-9):825–838, 1996.
- [4] Sawy and Nazmy. Effect of aspect ratio on the elastic buckling of uniaxially loaded plates with eccentric holes. *Thin-Walled Structures*, 39(12):983–998, 2001.
- [5] Sawy, Nazmy and Martini. Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression. *Thin-Walled Structures*, 42(8):1083–1101, 2004.
- [6] Kumar and Paik. Buckling analysis of cracked plates using hierarchical trigonometric functions. *Thin-Walled Structures*, 42(5):687–700, 2004.
- [7] Wang, Sun, Peng and Uemori. Buckling and ultimate strength of plates with openings. *Ships and Offshore Structures*, 4(1):43–53, 2009.
- [8] Maiorana, Pellegrino and Modena. Linear buckling analysis of perforated plates subjected to localized symmetrical load. *Engineering Structures*, 30(11):3151–3158, 2008.
- [9] Maiorana, Pellegrino and Modena. A semi-analytical analysis of the elastic buckling of cracked thin plates under axial compression using actual non-uniform stress distribution. *Thin-Walled Structures*, 13:229–241, 2013.
- [10] Rhodes and Harvey. Plates in uniaxial compression with various support conditions at the unloaded boundaries. *International Journal of Mechanical Science*, 13(9):787–802, 1971.

$d/l=0.2$



شکل ۸: نمودار تغییرات فاکتور نیرو بر حسب کوتاه شونددگی بی بعد شده لبه ورق کامپوزیتی

جدول ۵: بار بحرانی به دست آمده از روش نیمه انرژی و المان محدود

d/a	آباکوس $P_c r^*$	نیمه انرژی $P_c r^*$	درصد خطا
۰	۰.۱۴	۰.۱۴۵	۳.۵
۰.۰۵	۰.۱۳۵	۰.۱۴۴	۴.۴
۰.۳	۰.۰۸۵	۰.۱	۱۷.۷
۰.۴	۰.۰۷	۰.۰۹	۲۸.۵

## ۵ نتیجه گیری

با توجه به بررسی انجام شده در روش‌های تخمین بار بحرانی کمانش و رفتار پس از کمانش ورق‌های دارای گشودگی، می‌توان پی برد که تاکنون، روش نیمه انرژی در حل مسأله صفحه دارای گشودگی به کار گرفته نشده است. در این مقاله، با استفاده از روش گسسته سازی، ورق دارای گشودگی، به نواحی پیوسته با شرایط مرزی مشخص تقسیم بندی گشته و در هر ناحیه، روش نیمه انرژی پیاده سازی شده است. در این روش فرض شده است که می‌توان میدان جابجایی خارج صفحه در هر ناحیه را به صورت حاصلضرب تابع مثلثاتی در چند جمله ای بیان نمود. به همین دلیل، شکل ناحیه‌های تقسیم شده مستطیلی شکل است. در نتیجه تنها امکان بررسی گشودگی‌های مستطیل شکل با این روش امکان پذیر خواهد بود که این موضوع از محدودیت‌های آن به شمار می‌آید. پس از حل میدان جابجایی خارج از صفحه در هر ناحیه و به دست آوردن فرم تابع تنش مربوطه، معادلات سازگاری وون-کارمن حل شده است. سپس، برای تعیین ثابت‌های ایجاد شده از حل معادلات، شرایط مرزی مناسب تعیین شده اند. سپس، میدان جابجایی درون صفحه و میدان تنش به دست آمده و در نهایت انرژی پتانسیل غشایی و خمشی هر ناحیه تعیین شده اند. از کمینه سازی انرژی پتانسیل کل صفحه (مجموع انرژی‌های هر ناحیه)، تغییرات دامنه جابجایی خارج از صفحه و نیروی فشاری لازم، بر حسب میزان کوتاه شونددگی به دست آمده است.

پیاده سازی روش ارائه شده بر روی ورق‌های ایزوتروپ و کامپوزیت با گشودگی مربعی در مرکز آن‌ها نشان می‌دهد که این روش قابلیت تحلیل رفتار پس از کمانش ورق را دارا است. همچنین نتایج به دست آمده از حل دو مثال از صفحه ایزوتروپ و کامپوزیت، نشان داده است که دقت کلی روش نیمه انرژی به کار گرفته شده در صفحات با گشودگی، نسبت به ورق‌های کامل پایین تر بوده و با افزایش اندازه گشودگی دقت آن کاهش

- [11] Marguerre. The apparent width of the plate in compression. *Technical Memorandum*, (833), 1937.
- [12] Rhodes, J, Harvey, JM, and Fok, WC. The load-carrying capacity of initially imperfect eccentrically loaded plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 17(3):161-172, 1975.
- [13] Rhodes, J. The post buckling behaviour of bending elements. 1982.
- [14] Rhodes, Jim. Post-buckling analysis of light gauge members using finite strips. 2002.
- [15] Ovesy, HR, Ghannadpour, SAM, and Morada, G. Geometric non-linear analysis of composite laminated plates with initial imperfection under end shortening, using two versions of finite strip method. *Composite structures*, 71(3-4):307-314, 2005.
- [16] Assaee, H and Ovesy, HR. A multi-term semi-energy finite strip method for post-buckling analysis of composite plates. *International journal for numerical methods in engineering*, 70(11):1303-1323, 2007.
- [17] Hajikazemi, Mohammad, Ovesy, Hamid Reza, and Sadr-Lahidjani, Mohammad Homayoun. A semi-energy finite strip method for post-buckling analysis of relatively thick anti-symmetric cross-ply laminates. in *Key Engineering Materials*, vol. 471, pp. 426-431. Trans Tech Publ, 2011.
- [18] Ovesy, HR, Hajikazemi, M, and Assaee, H. A novel semi energy finite strip method for post-buckling analysis of relatively thick anti-symmetric laminated plates. *Advances in Engineering Software*, 48:32-39, 2012.
- [19] Ghannadpour, SAM, Ovesy, HR, and Zia-Dehkordi, E. Buckling and post-buckling behaviour of moderately thick plates using an exact finite strip. *Computers & Structures*, 147:172-180, 2015.