

## شبیه سازی و بهینه سازی تاثیر زاویه و شعاع قالب بر فرآیند اکستروژن مستقیم آلیاژ آلومینیوم ۶۰۶۱

**چکیده:** از مشکلات اساسی فرآیند اکستروژن می توان به توزیع غیریکنواخت حرارت، افزایش نامطلوب میزان حداکثر فشار میان شمش و قالب و تغییر شکل ناهمگون شمش اشاره نمود. با انتخاب درست پارامترهای هندسی فرآیند می توان این مشکلات را تا حد قابل قبولی کاهش داد. در این پژوهش ابتدا یک مدل المان محدود برای تحلیل فرآیند اکستروژن مستقیم ایجاد شد و سپس با توجه به نتایج تجربی سایر محققین نتایج این شبیه سازی مورد صحت سنجی قرار گرفت. بر مبنای همین مدل و از آنجایی که حداکثر تنش ایجاد شده در شمش، تاثیر مهمی در خواص فیزیکی و رشد ترک های سطحی در پروفیل نهایی حاصل از این فرآیند دارد، حداقل تنش بیشینه در شمش آلومینیوم مبنای بهینه سازی هندسه قالب قرار گرفت و به کمک پارامترهای بهینه، شرایطی ایجاد گردید تا نیروی مورد نیاز فرآیند اکستروژن به حداقل مقدار خود برسد. علاوه بر این پارامترهای هندسی و مکانیکی فرآیند به کمک نرم افزارهای شبیه ساز و بهینه ساز کتیا، آباکوس و مودفرانتیور مورد بررسی قرار گرفت و سپس بهینه ترین حالت حاصل گردید. نتایج حاصل از بهینه سازی نشان داد زاویه ۴۵ درجه و شعاع ۱۲ میلی متر به ترتیب بهینه ترین مقدار برای زاویه قالب و شعاع قالب است.

**واژه های راهنما:** اکستروژن، بهینه سازی، هندسه قالب، المان محدود، آلومینیوم ۶۰۶۱، طراحی آزمایش

کامران طاهری سرتنگ  
دانشجوی کارشناسی ارشد

محمد مهدی هاشمی  
دانشجوی کارشناسی ارشد

فرنود نوروزی نیایی  
دانشجوی دکتری

مصطفی آسمانی  
کاندیدای دکتری

**بهروز آرزو\***

استاد،  
دانشکده مهندسی مکانیک،  
دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

مقاله علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۱۹

بازنگری: ۱۴۰۲/۰۹/۱۹

پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۶

**Kamran  
Taheri Sartang**  
M.Sc. Student

**Mohammad Mahdi  
Hashemi**  
M.Sc. Student

**Farnood  
Norouzi Niyae**  
Ph.D. Student

**Mostafa Asemani**  
Ph.D. Candidate

**Behrooz Arezoo\***  
Professor, Department of  
Mechanical Engineering,  
Amirkabir University of  
Technology, Tehran,  
Tehran

## Simulation and optimization of the direct extrusion process of aluminum alloy 6061

**Abstract:** During the extrusion process, several key challenges emerge, such as the uneven heat distribution, an unwanted surge in the peak pressure between the billet and the die, and non-uniform deformation of the billet. By choosing suitable geometric parameters for the process, these issues can be mitigated to a tolerable extent. In this research, an initial step was to develop a finite element model to scrutinize the direct extrusion process. The simulation results were then cross-verified with the empirical findings of other researches. Given that the maximum stress produced in the billet significantly influences the physical attributes and surface crack growth of the final profile derived from this process, the die's geometry was optimized to minimize the maximum stress in the aluminum billet. This optimization, aided by the optimal parameters, facilitated the creation of conditions to minimize the force needed for the extrusion process. Besides these geometric and mechanical parameters, the processes were investigated using simulation and optimization software like CATIA, ABAQUS, and ModeFrontier, leading to the attainment of the optimal condition. The optimization outcomes revealed that the die angle and radius's optimal values are a 45-degree angle and a 12-millimeter radius, respectively

**Keywords:** Extrusion, Optimization, Die geometry, Finite Element, Aluminum 6061, Design of experiments

## ۱- مقدمه

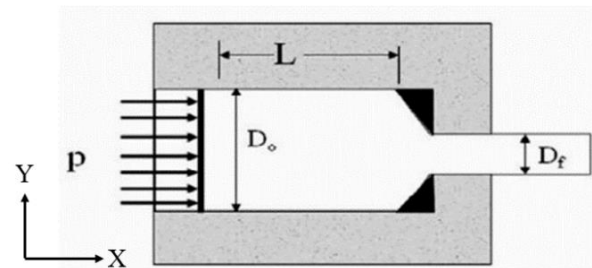
همچنین شکل‌دهی مواد ترد و شکننده است، زیرا ماده در این روش، تنها تحت فشار و تنش برشی قرار می‌گیرد. اکستروژن قادر به تولید قطعات با سطح مقطع بسیار باکیفیت و مستحکم است. از طرفی اکستروژن می‌تواند به صورت پیوسته (تولید قطعات با طول زیاد) یا نیمه‌پیوسته (تولید چندتکه‌ای) باشد [۲]. نوری و همکاران [۲] به بررسی تغییر شکل پلاستیکی شدید جهت ساخت قطعات با دانه‌بندی‌های ریز پرداخته‌اند که به منظور تأثیر فشار برگشتی در اثر کانال اکستروژن مستقیم بر روی توزیع سختی و تغییر شکل یکنواخت انجام گردید. کوالیک و همکاران [۳] به بررسی فناوری اصلی اکستروژن لوله‌های توخالی و تأثیر شعاع قالب بر حداکثر تغییر شکل پرداخته است لیکن علاوه بر شعاع زاویه قالب نیز یک پارامتر اساسی در تعیین حداکثر تغییر شکل است که لازم است تأثیر شعاع و زاویه به‌طور هم‌زمان مورد بررسی قرار گیرد.

شکور و همکاران [۴] نیز تأثیر پارامترهای اکستروژن بر اکستروژن آلومینیوم خالص A1100 را به کمک روش‌های عددی بررسی نمودند و مشاهده شد که افزایش سرعت اکستروژن باعث افزایش قابل توجهی در نیروی شکل‌دهی برای تمام زوایای قالب می‌شود. بر اساس این پژوهش می‌توان نتیجه گرفت که پارامتر سرعت در این فرآیند قابل بهینه‌سازی نبوده و بهترین پارامتر برای بهینه‌سازی، پارامترهای هندسی قالب هستند. لیو و همکاران [۵] شبیه‌سازی یک فرآیند اکستروژن برای پروفیل‌های آلومینیومی با ساختارهای پهن و بزرگ و ضخامت کم را به کمک تئوری جریان پلاستیک فیزی انجام داده و در پایان جهت صحت سنجی نتایج را به صورت شبیه‌سازی عددی تست نمودند.

نامبوری و همکاران [۶] به کمک شبیه‌سازی رایانه‌ای، به بررسی تأثیر پارامترهای فرآیند بر روی توان مصرفی فرآیند اکستروژن پرداخته‌اند و حالت‌های بهینه هر پارامتر را به صورت جداگانه بررسی نمودند. لیکن پارامترهای مورد بررسی بر روی یکدیگر اثر متقابل داشته و بهتر است تأثیر آن‌ها به صورت توأم بررسی شود. در پژوهشی دیگر شنگ و همکاران [۷] یک روش جدید و مؤثر برای اکستروژن همزمان آلیاژهای فلزی با استفاده از چند اکستروژر (co-extrude) شرح داده‌اند که اکستروژن مستقیم و تغییر شکل خمشی - برشی نام‌گذاری شده است. با توجه به این پدیده، مدلی در نرم‌افزار DEFORM-3D برای بررسی تولید و رشد ترک بین آلیاژ آلومینیوم ۶۰۶۱ و منیزیم AZ31 در طی فرآیند اکستروژن ترکیبی ساخته شده است. رفتار ترک خوردگی میله کامپوزیت آلومینیوم - منیزیم با یک هسته نرم منیزیم AZ31 و یک روکش سخت Al 6061 مورد مطالعه

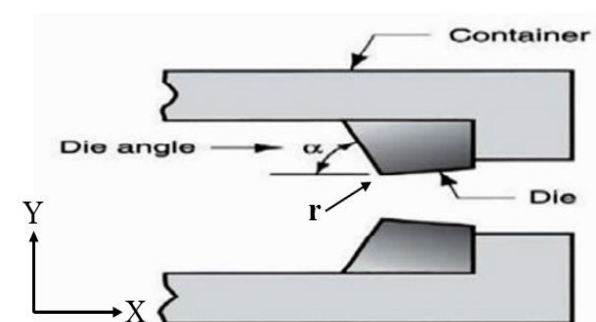
در سال ۱۷۹۷ میلادی جوزف براماح [۱] اولین فرآیند اکستروژن برای تولید لوله از مواد نرم را انجام داد، او ابتدا ماده اولیه فلزی را پیش‌گرم کرد و آن را به وسیله یک پیستون دستی متحرک، به داخل قالب حرکت داد و در سال ۱۸۲۰ توماس بور همین فرآیند را به وسیله یک پرس هیدرولیک انجام داد.

اکستروژن یک فرآیند شکل‌دهی حجمی می‌باشد که در آن شمش فلزی تحت اعمال فشار از دهانه قالب با سطح مقطع کوچک، عبور کرده و باعث کاهش سطح مقطع شمش و نهایتاً شکل گرفتن آن می‌شود. بر اساس شکل (۱)، پارامتر  $L$  بیانگر طول بیلت باقی‌مانده، پارامترهای  $D_0$  و  $D_f$  به ترتیب بیانگر قطر دهانه خروجی و قطر دهانه ورودی می‌باشد که این پارامترها به مشخصات قطعه نهایی وابسته اند.



شکل ۱ فرآیند اکستروژن [۱]

با توجه به شکل (۲)،  $\alpha$  بیانگر نیم زاویه قالب با محور افقی و  $r$  شعاع قالب است که پارامترهای اساسی در تعیین نیروها و توان مورد نیاز در فرآیند اکستروژن هستند و با بهینه کردن آن‌ها می‌توان بسیاری از مشکلات اساسی فرآیند اکستروژن مانند افزایش نامطلوب میزان حداکثر فشار میان شمش و قالب و تغییر شکل ناهمگون شمش را تا حد بسیار زیادی کاهش داد.



شکل ۲ زاویه قالب اکستروژن [۱]

دو مزیت اصلی فرآیند اکستروژن نسبت به دیگر روش‌های شکل‌دهی، قابلیت بالا در تولید قطعات با سطح مقطع پیچیده و

هونگ و همکاران [۱۰] در مقاله خود برای مطالعه مکانیزم تغییر شکل و شکست لوله از جنس آلیاژ آلومینیوم ۶۰۶۱ اکستروژن شده پس از عملیات حرارتی ثانویه تحت تنش‌های مختلف سه محوری، یک مدل شکست جانسون-کوک توسعه داده‌اند. از طریق روش المان محدود (FEM) و میکروسکوپ الکترونی روبشی (SEM)، مکانیزم شکست انواع مختلف نمونه‌های کششی آلیاژ آلومینیوم مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که مدل شکست جانسون-کوک می‌تواند تغییر شکل نمونه کششی آلیاژ آلومینیوم ۶۰۶۱ را بهتر شبیه‌سازی کند. با افزایش تنش سه محوری، کرنش شکست به‌طور کلی روند کاهشی را نشان داد و مکانیزم شکست از نوع برشی به متمرکز تغییر می‌کند. تنش سه محوری به تدریج با افزایش شعاع / زاویه بریدگی (ناچ) نمونه آلیاژ آلومینیوم کاهش یافت و تنش سه محوری در مرکز شکاف بیشتر از ریشه شکاف است. بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت که تنش مهم‌ترین پارامتری است که در تحلیل فرآیند اکستروژن باید مبنای بهینه‌سازی قرار گیرد.

در پژوهش‌ها از روش تحلیلی برای اکستروژن مستقیم مقاطع مختلف قالب‌های از جنس آلیاژهای آلومینیوم ۶۰۶۱ و ۶۰۶۳ استفاده شده است. ابتدا، مقاومت کششی و فشاری برای AA6063-T7 و AA6061 با استفاده از شبیه‌سازی محاسبه شده و با اندازه‌گیری‌های تجربی تأیید می‌شود. مانند آنچه در این پژوهش انجام شده است، در پژوهش مورد بررسی محدودیت‌ها و پیچیدگی‌های راه‌حل تحلیلی برای اشکال پیچیده ساده‌سازی گشته و برای اعتبارسنجی نتایج محاسبه شده تحلیلی، شبیه‌سازی مبتنی بر المان محدود انجام شده است. سپس، مدل تحلیلی برای قالب‌های مختلف مانند شکل‌های بیضی، مربع و مستطیل استخراج گشته و نشان داده شده است که نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها با نتایج بدست‌آمده از روش تحلیلی با خطای کمتر از ۵ درصد برای ضرایب مختلف اصطکاک و نسبت‌های اکستروژن متفاوت مطابقت دارد. از جمله تفاوت‌های مطالعه مذکور و پژوهش پیش‌رو، می‌توان به این مورد اشاره نمود که در مقاله مرجع پروفیل‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند، حال آنکه برخلاف این پژوهش بهینه‌سازی روی قالب صورت نگرفته و علاوه بر آن سیستم اتوماسیون نرم‌افزاری نیز در آن دیده نمی‌شود.

کنیازکین با مطالعه پارامتری بر روی اکستروژن مستقیم قطعات منیزیمی، دریافت سرعت اکستروژن و هندسه قالب متفاوت بوده و منجر به تغییر در رفتار تبلور مجدد، جریان مواد و کرنش می‌شود. علاوه بر این، یک مدل المان محدود برای

قرار گرفت تا تأثیر ریزساختار بر ترک مناطق مختلف بررسی شود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که توزیع کرنش و سرعت به دلیل تأثیر ساختار قالب و خواص مواد در مکان‌های مختلف (از یک منطقه)، تفاوت‌های قابل توجهی دارد. نتایج تجربی نشان می‌دهد که در شرایط مشابه، تفاوت‌هایی در تبلور مجدد و تضعیف بافت آلیاژ منیزیم AZ31 و آلیاژ آلومینیوم ۶۰۶۱ وجود دارد که از عوامل مهم تشکیل ترک هستند. هر دو لایه منیزیم و آلومینیوم دارای ریزساختار همگن هستند [۷].

سیف‌الدین و همکاران [۸] در مقاله خود بیان کرده‌اند که دو سری متداول از آلیاژ آلومینیوم (Al 6061 و Al 6005a) وجود دارد که برای ساخت بدنه خودروی حمل‌ونقل ریلی سبک استفاده می‌شوند. نوع Al 6005a استحکام کمتری دارد اما نسبت به Al 6061 ارزان‌تر است. در مطالعه عددی ایشان، ویژگی‌های اکستروژن این آلیاژها با در نظر گرفتن ملاحظات استحکام با استفاده از ANSYS Workbench 18 تجزیه و تحلیل گردید. سپس مدل توپر سه‌بعدی، از مدل‌های نمای داخلی-خارجی خودرو استخراج و برای صرفه‌جویی در زمان محاسباتی، مدل بدنه خودرو از طریق حذف گوشه‌ها و متقارن سازی، ساده شد. با این وجود، اثر حذف گوشه‌ها نیز با معرفی یک ضریب تصحیح بررسی می‌شود. چهار مورد بارگذاری استاتیک برای مشاهده پدیده‌های بارگذاری واقعی که ممکن است رخ دهد، ارائه شده است. علاوه بر این، ساده‌سازی مدل در شبیه‌سازی المان محدود یک بدنه خودروی ریلی با استفاده از نوع المان پوسته و اعمال ضریب تصحیح در نتایج شبیه‌سازی، یک روش شبیه‌سازی پیش‌رو است که می‌تواند دقت نتایج را بهبود بخشد.

بنابر پژوهش چاندلا و همکاران [۹] آلومینیوم ۶۰۶۱ یک آلیاژ اکستروژن شده با عملیات حرارتی است که برای اجزای مختلف مهندسی و سازه‌های مانند بال‌ها و بدنه هواپیما، ریل‌ها، قاب پنجره‌ها، میل محرک (کاردان)، سوپاپ‌ها و ... استفاده می‌شود. خواص مناسبی مانند استحکام بالا، مقاومت محیطی خوب، چگالی کم، تغییر طول زیاد در هنگام شکست و ماشین‌کاری عالی موجب شده تا Al 6061 از پرکاربردترین آلومینیوم‌ها در سری ۶۰۰۰ باشد. هدف این مقاله بررسی خصوصیات مکانیکی، تریبولوژیکی و ریزساختاری کامپوزیت‌های ریخته‌گری اغتشاشی Al 6061 است. در این مقاله تلاش شده است تا اثر تقویت‌کننده‌های مختلف بر رفتار متالورژیکی کامپوزیت‌های Al 6061 بررسی شود. نتایج تجربی بهبود قابل توجهی در خواص تریبولوژیکی و مکانیکی کامپوزیت‌های Al 6061 در مقایسه با آلیاژ Al 6061 نشان می‌دهد.

## ۲- روند پژوهش

## ۲-۱- شرایط هندسی مسئله

جهت بررسی صحیح و استخراج نتایج مناسب از مسائل مهندسی، توجه به انتخاب درست و بهینه پارامترها و شرایط اصلی مسئله به ویژه شرایط هندسی بسیار حائز اهمیت است، زیرا انتخاب صحیح این پارامترها می تواند به نزدیکی نتایج شبیه سازی و نتایج تجربی کمک شایانی کند. لذا در پژوهش حاضر شرایط هندسی قالب و شمش (بیلت) در جدول (۱) مشخص گردید و همچنین جدول (۲) نیز خواص مکانیکی و حرارتی آلیاژ آلومینیوم را معرفی می کند.

جدول ۱ ویژگی های هندسی قالب و شمش

پارامتر	مقدار
زاویه قالب ( $\alpha$ )	۵۶/۵ درجه
شعاع دهانه خروجی ( $R_i$ )	۷۰ میلی متر
شعاع دهانه ورودی یا شعاع شمش ( $R_o$ )	۱۰۰ میلی متر
طول اولیه شمش ( $L_o$ )	۳۰۰ میلی متر

جدول ۲ خواص مکانیکی و حرارتی آلیاژ آلومینیوم

نوع پارامتر	مقدار
چگالی	$2700 \text{ kg/m}^3$
مدول یانگ	$69 \text{ GPa}$
نسبت پواسون	$0.33$
رسانش گرمایی	$225 \text{ W/m.k}$
گرمای ویژه	$88 \text{ J/kg.k}$
ضریب انبساط حرارتی	$1/42 \times 10^{-6} / \text{K}$

همچنین سرعت حرکت شمش درون قالب نیز از پارامترهای مهم فرآیند اکستروژن محسوب می گردد؛ که در این پژوهش ۲۵ میلی متر بر ثانیه است. با توجه به اینکه رفتار مواد در دماهای گوناگون، متفاوت می باشد لذا نمودار تنش و کرنش حقیقی به ازای دماهای گوناگون در شکل (۳) نمایش داده شده است. همان طور که در شکل (۳) مشخص است، با افزایش دمای اولیه شمش، ماده در مقدار کرنش ثابت نیاز به میزان تنش کمتری جهت شکل دهی (اکستروژن) خواهد داشت لذا در صورت امکان افزایش دمای شمش اولیه یک راه حل مناسب برای کاهش نیروی شکل دهی است.

AZ31 بر اساس مطالعه پارامتری توسعه داده شد و در مرحله بعد برای کمک به درک جریان مواد و مسیر کرنش در طول اکستروژن مورد استفاده قرار می گیرد. نتایج به دست آمده برای بهینه سازی هندسه قالب و پارامترهای فرآیند استفاده می شود و امکان توسعه کنترل شده ریزساختار و بافت در طول اکستروژن منیزیم را فراهم می کند. تغییرات هندسه قالب، توسعه مدل المان محدود و بررسی کرنش ماده از جمله شباهت های مرجع [۲] با پژوهش این مقاله است در حالی که تغییرات دمایی در مدل مرجع دیده نشده و مطالعه براساس خواص آلومینیوم در این پژوهش (بجای منیزیم در مقاله مرجع) انجام شده است.

در پژوهش نینابرو همکاران، تجزیه و تحلیل دقیق از جریان فلز در داخل قالب های اکستروژن ارائه می شود و به بررسی تشکیل عیب کم پر شدن پرداخته شده است. وضعیت تنش در مناطق نقص با استفاده از شبیه سازی تجزیه و تحلیل شده است. بر این اساس، نشان داده شد که تنش میانگین (فشار هیدرواستاتیک) تنها پارامتری نیست که باید در معیار قرار گیرد تا نتایج قابل اعتمادی به دست آید. این نتیجه بر اساس تجزیه و تحلیل خروجی شبیه سازی انجام شده توسط نرم افزار QForm و Extrusion FEM و آزمایش های عملی برای انواع مختلف پروفیل ها است. مشابه رویه انجام داده شده، در این مقاله نیز از روش المان محدود (اما با نرم افزار آباکوس) برای شبیه سازی استفاده شده است اما از بهبود مدل پیشنهادی مبتنی بر تنش برای جلوگیری از نقص پرنشیدن کمک گرفته شده است اما رویکرد این پژوهش بر بهینه سازی قالب برای دستیابی به حداقل نیروهای شکل دهی و کم کردن نقص های فرآیندی است.

در این پژوهش با به کارگیری نتایج پژوهش های پیشین به سراغ بهینه سازی هندسه قالب در فرآیند اکستروژن رفته و با شبیه سازی المان محدود بهینه ترین مقادیر برای شعاع و زاویه قالب به دست آمده است. از جمله مهم ترین مسائل در بهینه سازی فرآیند، پارامتر مورد بررسی جهت بهینه سازی است. همان گونه که مشاهده شد، در پژوهش های گذشته پارامترهایی همچون حداکثر فشار تماسی [۱]، حداکثر تغییر شکل [۴] و حداکثر توان مصرفی [۷] جهت بهینه سازی فرآیند مورد بررسی قرار گرفته است. حال آنکه تنش ایجاد شده در طول فرآیند تأثیر بسیار مهمی در خواص فیزیکی و رشد ترک های سطحی پروفیل نهایی دارد [۲].

در این پژوهش حداقل تنش ایجاد شده در شمش مبنای بهینه سازی قرار گرفته است. همچنین پارامترهای هندسی قالب بر روی یکدیگر تأثیر توأم داشته و برای بهینه سازی به جای بررسی تک تک پارامترها، لازم ست تا از یک الگوریتم بهینه سازی استفاده شده تا تأثیر دو پارامتر شعاع و زاویه قالب بر روی یکدیگر نیز مورد توجه قرار گیرد.

تاب‌گیری محصول خروجی و برش محصولات در اندازه‌های استاندارد.

از طرفی شبیه‌سازی فرآیند اکستروژن در چهار مرحله صورت می‌گیرد که عبارتند از: ۱- ورود شمش به درون قالب و حرکت به سمت مجرای خروجی ۲- شکل گرفتن شمش و افزایش دمای آن (حداکثر فشار تماسی) ۳- خروج شمش از دهانه خروجی ۴- کاهش دمای شمش تا دمای محیط. لذا تمرکز مسئله بر روی مرحله دوم یعنی یافتن مقدار حداکثر فشار تماسی میان شمش و قالب و کمینه کردن مقادیر تنش فون\_میسز و معیار ترسکا با کمک پارامترهای هندسی فرآیند می‌باشد.

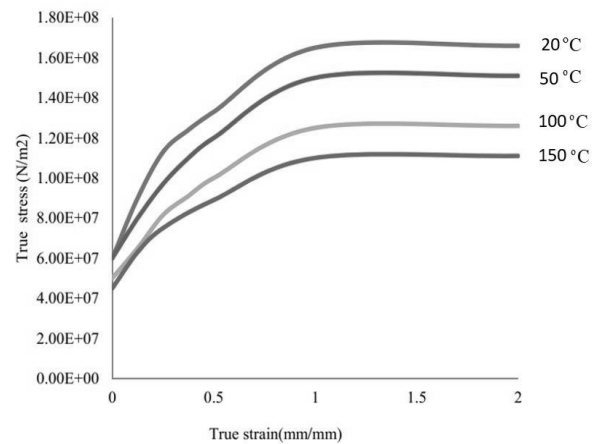
یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر در فرآیند شکل‌دهی به روش اکستروژن هندسه قالب است که از مهم‌ترین پارامترها در طراحی قالب تعیین ابعاد و شکل مناسب آن می‌باشد؛ زیرا شکل قالب بر روی پارامترهای مختلف فرآیند اکستروژن مؤثر می‌باشد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به زاویه و شعاع قالب اشاره نمود. انتخاب زاویه و شعاع بهینه سبب کاهش مقدار نیروی موردنیاز شکل‌دهی، افزایش عمر قالب و غیره می‌گردد.

باتوجه به اینکه زاویه قالب علاوه بر تاثیرات ذکرشده در بالا نقش مهمی در حرکت جریان مواد درون قالب دارد، لذا در این بخش از پژوهش شبیه‌سازی فرآیند اکستروژن تحت زوایای مختلف قالب صورت می‌گیرد شکل (۴).

در این تحلیل قالب به‌عنوان جسم صلب و شمش به‌عنوان جسم باقابلیت تغییر شکل در نظر گرفته شد، همچنین ضریب اصطکاک میان قالب و شمش  $0/1$  و سرعت حرکت شمش درون قالب  $25$  میلی‌متر بر ثانیه انتخاب گردید، سپس نتایج مورد ارزیابی و صحت آن‌ها با مقایسه گزارش نهایی پژوهش یاداو و همکاران [۱] و محاسبه درصد خطا (میزان خطا یک درصد) موردبررسی قرار می‌گیرد (پیوست ۱).

همان‌طور که در بخش قبل ذکر گردید یکی از مهم‌ترین پارامترهای هندسی قالب اکستروژن، شعاع قالب است. با افزایش شعاع قالب حجم ماده اکستروژن شده افزایش می‌یابد و به دنبال آن نیرو و هزینه موردنیاز جهت شکل‌دهی شمش نیز افزایش می‌یابد. همچنین افزایش و کاهش شعاع قالب به مقدار مشخص سبب تغییر در سرعت فرآیند اکستروژن خواهد شد، لذا شعاع قالب باید به‌گونه‌ای تنظیم گردد که حجم ماده اکستروژن شده، نیروی مورد نیاز، هزینه فرآیند، سرصورت بهینه حاصل گردد.

در این مرحله نیز به بررسی حداکثر فشار تماسی میان قالب و شمش تحت شعاع‌های مختلف و مقایسه نتایج حاصله با نتایج اعلامی از طرف یاداو و همکاران [۱] و همچنین محاسبه میزان خطا (میزان خطا یک درصد) پرداخت شده است (پیوست ۱).



شکل ۳ تنش و کرنش حقیقی آلیاژ آلومینیوم ۶۰۶۱ تحت دماهای مختلف [۱]

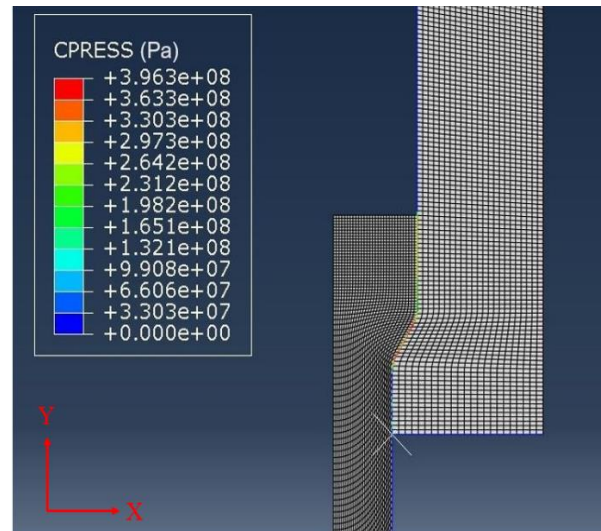
## ۲-۲- شبیه‌سازی المان محدود فرآیند تحت زوایا و شعاع‌های مختلف قالب

نرم‌افزار آباکوس نرم‌افزار تحلیلی بسیار قوی مهندسی در زمینه تحلیل‌های مهندسی مبتنی بر المان محدود می‌باشد. برنامه آباکوس در مدل‌سازی، شبیه‌سازی و تحلیل المان محدود مسائل مهندسی کاربرد دارد. یکی از کاربردهای اصلی این نرم‌افزار، استفاده از آن به‌عنوان ابزاری برای انجام تحقیقات آکادمیک بر روی مسائل مختلف مهندسی است که قابلیت حل مسائل از یک تحلیل خطی ساده تا پیچیده‌ترین مدل‌سازی غیرخطی را دارا می‌باشد. این نرم‌افزار دارای مجموعه المان‌های بسیار گسترده‌ای است که هر نوع هندسه‌ای را می‌توان توسط این المان‌ها مدل کرد. در این مرحله به بررسی و صحت سنجی نتایج به‌دست‌آمده از پژوهش یاداو و همکاران [۱] و محاسبه اختلاف مقادیر گزارش‌شده در پژوهش موردنظر با مقادیر به‌دست‌آمده در نرم‌افزار پرداخته شده است (پیوست ۱) [۱].

فرآیند اکستروژن به‌صورت کلی در چند مرحله صورت می‌گیرد که شامل: ۱- انتخاب مناسب شمش و نوع فرآیند اکستروژن جهت شکل‌دهی ۲- افزایش دمای شمش تا رسیدن به دمای موردنظر و اعمال چربی مخصوص (دوده) به دیواره شمش جهت روان‌سازی حرکت شمش درون قالب و جلوگیری از چسبیدن به دیواره قالب ۳- حرکت شمش درون قالب توسط رام جهت شکل‌دهی و هدایت آن تا انتهای مسیر ۴- حفظ حداکثر سرعت عملیات اکستروژن توسط سنسورهای دمای نصب شده ۵- تزریق نیتروژن مایع در هنگام خروج شمش از قالب تا باعث افزایش طول عمر قالب گردد ۶- برش محصول توسط اره مخصوص ۷- خنک کردن محصول بر روی میز خنک‌کننده ۸-

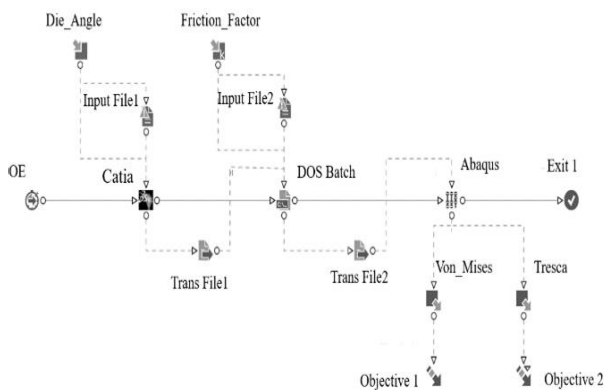
فون-میسز و معیار ترسکا گردد. از میان روش‌های مختلف طراحی آزمایش (DOE)، الگوریتم فاکتوریل کامل انتخاب گردید تا تمامی حالت‌های مسئله را تک به تک پوشش دهد.

همانطور که از شکل (۵) دریافت می‌گردد، در این نرم‌افزار پس از وارد کردن نتایج خروجی نرم‌افزارهای کتیا و آباکوس، متغیرهای شعاع قالب یا زاویه قالب تعریف و قیود مسئله مانند ضریب اصطکاک میان قالب و شمش و سرعت حرکت شمش درون قالب تعیین می‌گردند. سپس نوع الگوریتم طراحی آزمایش (فاکتوریل کامل) انتخاب می‌گردد، با تعیین سایر شرایط نرم‌افزاری خروجی نرم‌افزار بر روی تنش فون-میسز و معیار ترسکا تنظیم می‌گردد تا با بررسی شرایط مختلف و تغییر زاویه یا شعاع قالب در هر مرحله نتایج خروجی ثبت و روی نمودار نمایش داده شوند سپس با بررسی و تحلیل نمودار مورد نظر با توجه به شرایط مورد نیاز در هر مرحله زاویه و شعاع مناسب قالب انتخاب می‌شود که منجر به کاهش زمان و هزینه تولید و افزایش کیفیت و راندمان خواهد شد.



شکل ۴ شبیه‌سازی فرآیند اکستروژن تحت زوایای مختلف قالب در راستای محور Y

### ۲-۳- انتخاب بهینه تنش فون-میسز و معیار ترسکا با بررسی زاویه و شعاع‌های مختلف قالب



شکل ۵ نحوه بلوک چینی خروجی نرم‌افزارهای مختلف جهت بررسی بهینه‌ترین زاویه قالب در نرم‌افزار مودفرانتیر

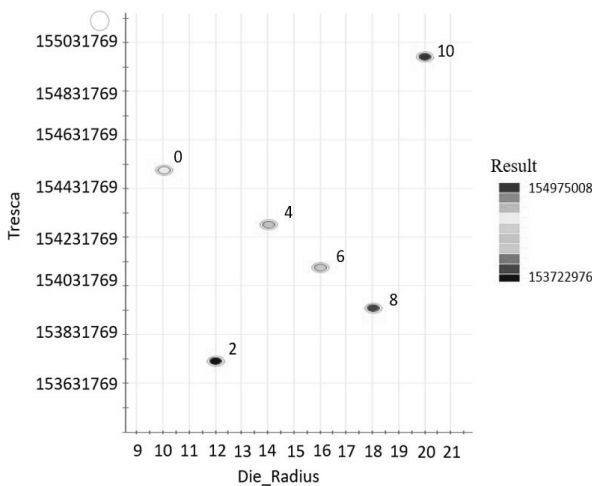
هدف فرآیند بهینه‌سازی در این مرحله بررسی زاویه‌های قالب گوناگون در بازه ۴۵ الی ۶۰ درجه با افزایش یک درجه‌ای نسبت به زاویه مرحله قبل و انتخاب زاویه بهینه جهت کمینه کردن مقدار تنش فون-میسز و معیار ترسکا می‌باشد. لذا در این فرآیند به کمک الگوریتم طراحی فاکتوریل کامل تعداد ۱۶ مرحله آزمایش با اعمال ضریب اصطکاک ۰,۱ پیشنهاد و بررسی گردید شکل (۶). به صورت کلی اطلاعات این مسئله عبارتند از:

۱: ورودی فرآیند = زاویه قالب، ضریب اصطکاک ۲: داده‌های مسئله = مدل کتیا، مدل آباکوس ۳: نتایج خروجی = حداکثر فشار تماسی بهینه‌شده با بررسی نرم‌افزار مودفرانتیر مشخص می‌شود که به ازای زاویه قالب ۴۵ درجه (آزمایش شماره صفر) مقادیر تنش فون-میسز و معیار ترسکا کمترین میزان خود را دارا است و با افزایش زاویه قالب در این بازه مقادیر تنش خروجی افزایش

یاداو و همکاران [۱] به بررسی اثرات پارامترهای هندسی مورد بحث پرداخته‌اند اما روش ارزیابی آن‌ها روش سنتی تغییر یک پارامتر و ثابت نگه‌داشتن سایر پارامترها است که نمی‌تواند به درستی اثر پارامترها را مشخص و درصد تأثیرگذاری و احتمال صحت نتیجه‌گیری را بیان نماید. از این رو جهت بررسی مناسب با قابلیت اطمینان بالا اثرات مقادیر تنش فون-میسز و معیار ترسکا یک طرح فاکتوریل کامل ایجاد و با در نظر گرفتن سه پارامتر تعیین‌کننده زاویه قالب، شعاع قالب و ضریب اصطکاک، در دو آزمایش مجزا طراحی و اجرا گردید. روند طراحی در پژوهش حاضر بدین شرح است که ابتدا به دلیل نیاز به بررسی دو پارامتر هندسی مورد نظر مسئله (زاویه و شعاع قالب) به کمک نرم‌افزار طراحی قطعه (CATIA) شمش و قالب اولیه مورد نظر طراحی گردید، سپس جهت بررسی شرایط مختلف تعریف‌شده وارد نرم‌افزار المان محدود (ABAQUS) می‌شود تا با تعیین شرایط اولیه مسئله از قبیل: دمای اولیه، نوع بارگذاری، سرعت حرکت شمش، نوع و سایز مش بندی و غیره تحلیل فرآیند اکستروژن انجام گردد. سپس داده‌های خروجی از این دو نرم‌افزار را با چیدمانی خاص درون نرم‌افزار بهینه‌ساز مودفرانتیر (ModeFrontier) وارد کرده تا آماده بهینه‌سازی گردند. نرم‌افزار مودفرانتیر شامل الگوریتم‌های بهینه‌ساز متعددی جهت حل مسائل گوناگون است، بهینه‌سازی به کمک تعدادی گره ورودی و خروجی، توابع هدف و قیود است که با توجه به خواسته مسئله تعریف می‌شوند تا با بررسی بهینه‌ترین حالت میان حالت‌های گوناگون پیشنهادی، منجر به کاهش و کمینه کردن مقادیر تنش

مرحله قبل با استفاده از الگوریتم فاکتوریل کامل و بلوک چینی مناسب، تعداد ۶ آزمایش با لحاظ کردن ۲ میلی متر افزایش شعاع در هر مرحله نسبت به مرحله قبل پیشنهاد و بررسی گردید. به صورت کلی اطلاعات این مسئله عبارتند از:

۱- ورودی فرآیند= شعاع قالب، ضریب اصطکاک ۰.۲- داده های مسئله= مدل کتیا، مدل آباکوس ۳- نتایج خروجی= حداکثر فشار تماسی بهینه شده با بررسی نرم افزار مودفرانتیر مشخص می شود که به ازای شعاع قالب ۱۲ میلی متری مقادیر تنش فون\_میسز و معیار ترسکا کمترین میزان خود را دارا است شکل (۷)، لذا این امر سبب کاهش نیروی موردنیاز شکل دهی و کاهش هزینه تولید، افزایش عمر قالب و صرفه جویی در مصرف انرژی می شود.



شکل ۷ نتایج بهینه سازی مقادیر تنش فون\_میسز و معیار ترسکا مربوط به شعاع قالب با نرم افزار مودفرانتیر

#### ۲-۴- نتایج

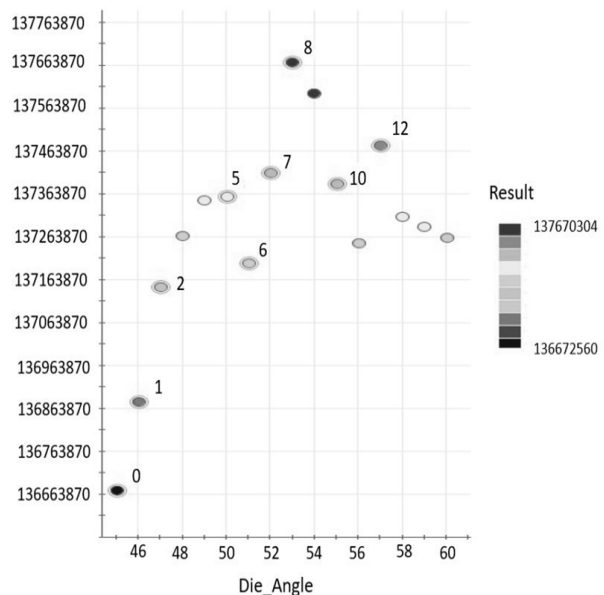
پس از بهینه سازی پارامترهای هندسی قالب برای اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از روش المان محدود، این نتایج با نتایج به دست آمده در مقاله مرجع یاداو و همکاران [۱] مقایسه شد (پیوست ۱).

پارامترهای فرآیند نیز مطابق پارامترهای در نظر گرفته شده در مقاله مرجع لحاظ گردید. در بخش اول که به بررسی صحت سنجی نتایج پرداخته شد، تمامی پارامترهای مسئله با دقت مناسبی مطابق با مقاله مرجع لحاظ گردید و سپس تأثیر تغییر زاویه و تغییر شعاع بر کاهش مقادیر تنش فون\_میسز و معیار ترسکا مورد بررسی قرار گرفت. در آزمایش اول که مربوط به بررسی زاویه قالب است، مشاهده گردید که بهینه ترین زاویه قالب جهت کمینه کردن مقادیر تنش فون\_میسز و معیار ترسکا مربوط به زاویه قالب ۴۵ درجه است شکل (۸).

می یابند شکل (۶)، لذا این امر سبب کاهش نیروی موردنیاز شکل دهی و کاهش هزینه تولید، افزایش عمر قالب و صرفه جویی در مصرف انرژی می شود.

جدول ۳ نتایج بهینه سازی زاویه قالب با نرم افزار مودفرانتیر

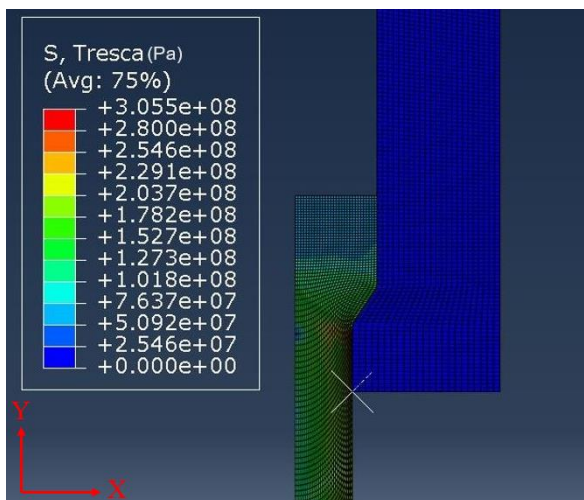
ID	Algorithm	Die Angle	Friction Factor	Tresca	Von_Mises
0	FULLF	45	0.1	1.508E+08	1.367E+08
1	FULLF	46	0.1	1.509E+08	1.369E+08
2	FULLF	47	0.1	1.514E+08	1.371E+08
3	FULLF	48	0.1	1.517E+08	1.373E+08
4	FULLF	49	0.1	1.521E+08	1.374E+08
5	FULLF	50	0.1	1.524E+08	1.374E+08
6	FULLF	51	0.1	1.528E+08	1.372E+08
7	FULLF	52	0.1	1.531E+08	1.374E+08
8	FULLF	53	0.1	1.534E+08	1.377E+08
9	FULLF	54	0.1	1.540E+08	1.376E+08
10	FULLF	55	0.1	1.545E+08	1.374E+08
11	FULLF	56	0.1	1.549E+08	1.372E+08
12	FULLF	57	0.1	1.550E+08	1.375E+08
13	FULLF	58	0.1	1.552E+08	1.373E+08
14	FULLF	59	0.1	1.554E+08	1.373E+08
15	FULLF	60	0.1	1.555E+08	1.373E+08



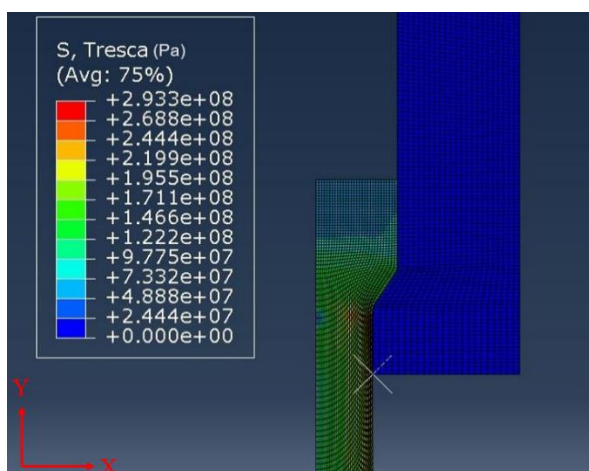
شکل ۶ نتایج بهینه سازی مقادیر تنش فون\_میسز و معیار ترسکا مربوط به زاویه قالب با نرم افزار مودفرانتیر

هدف این مرحله نیز کمینه کردن نتایج خروجی پژوهش (تنش فون\_میسز و معیار ترسکا) با بررسی شرایط گوناگون شعاع قالب در بازه ۱۰ الی ۲۰ میلی متر است؛ مانند طراحی آزمایش

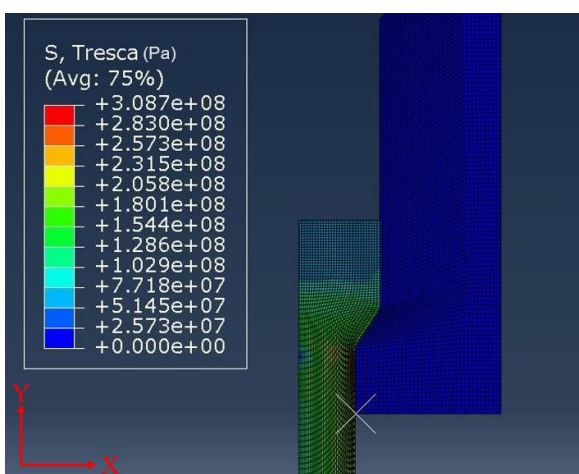
متر شاهد افزایش تنش فون\_میسز و معیار ترسکا خواهیم بود، درنهایت با بررسی نتایج مشخص گردید که بهینه‌ترین حالت شعاع قالب، مربوط به شعاع ۱۲ میلی‌متر است (شکل ۹).



الف) شعاع ۱۰ میلی‌متر

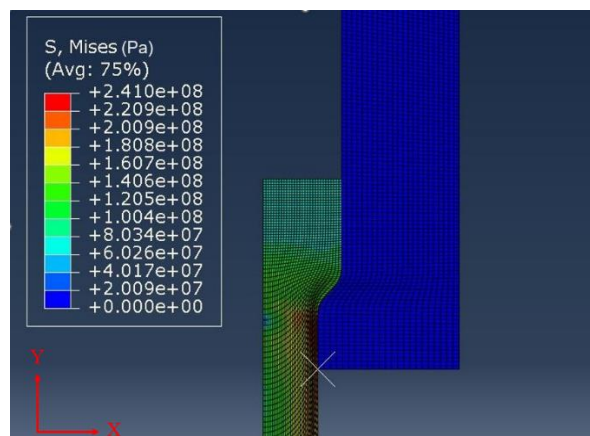


ب) شعاع ۱۲ میلی‌متر

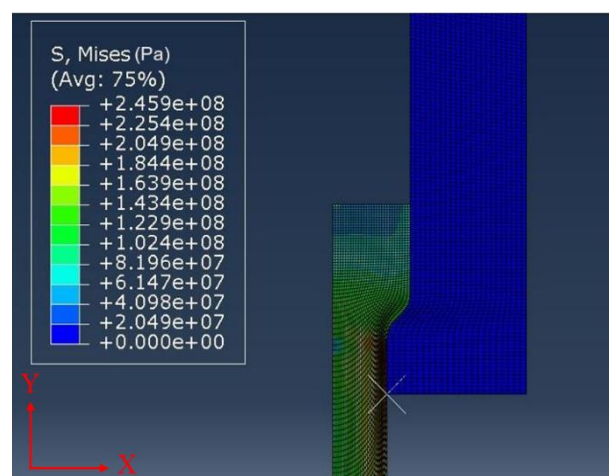


ج) شعاع ۱۴ میلی‌متر

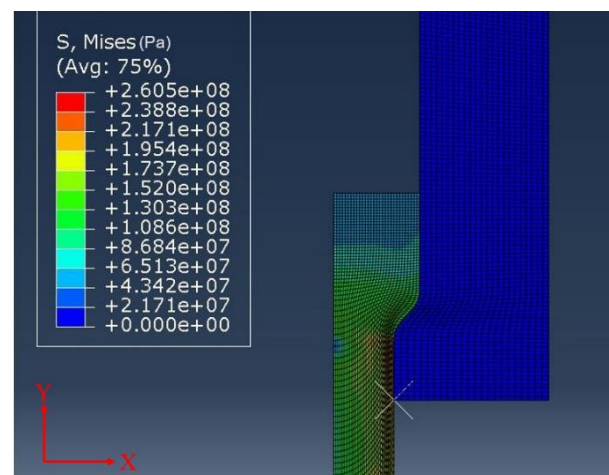
شکل ۹ مقایسه تغییرات معیار ترسکا به ازای شعاع‌های مختلف در راستای محور Y (الف) ۱۰ میلی‌متر (ب) ۱۲ میلی‌متر (ج) ۱۴ میلی‌متر



الف) تنش فون\_میسز به ازای زاویه ۴۵ درجه



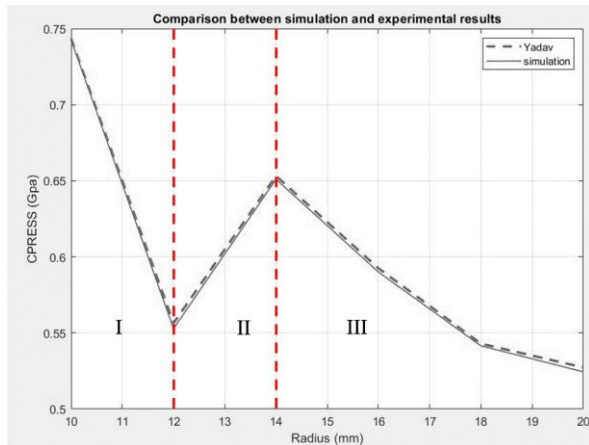
ب) تنش فون\_میسز به ازای زاویه ۴۶ درجه



ج) تنش فون\_میسز به ازای زاویه ۴۷ درجه

شکل ۸ مقایسه تغییرات تنش فون\_میسز به ازای زاویه‌های متفاوت در راستای محور Y

در آزمایش دوم نیز مشاهده گردید که با افزایش شعاع قالب در بازه ۱۰ الی ۲۰ میلی‌متر، نتایج متفاوتی حاصل می‌گردد که نشان‌دهنده اهمیت بالای میزان شعاع قالب در فرآیند اکستروژن می‌باشد. با افزایش و کاهش شعاع قالب در مقادیر بالای ۱۲ میلی



شکل ۱۱ مقایسه نتایج شبیه سازی (خط چین) شعاع قالب با نتایج یاداو و همکاران [۱] (خط ممتد)

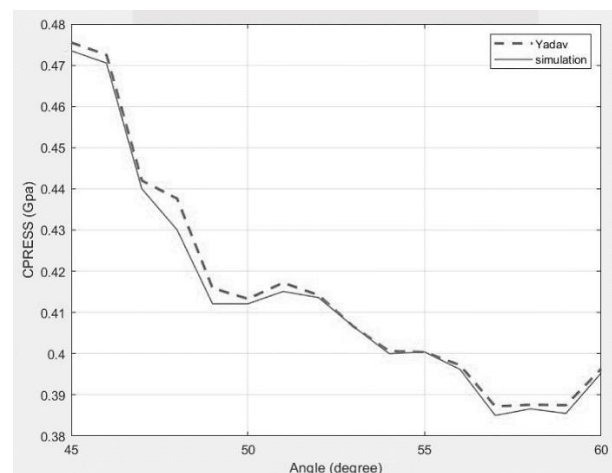
### ۳- نتیجه گیری

در این پژوهش ابتدا یک مدل المان محدود برای تحلیل فرآیند اکستروژن مستقیم ایجاد شد و سپس با توجه به نتایج تجربی سایر محققین نتایج این شبیه سازی مورد صحت سنجی قرار گرفت. بر مبنای همین مدل و از آنجایی که حداکثر تنش ایجاد شده در شمش، تأثیر مهمی در خواص فیزیکی و رشد ترک های سطحی در پروفیل نهایی حاصل از این فرآیند دارد، حداقل تنش در شمش آلومینیوم مبنای بهینه سازی هندسه قالب قرار گرفت تا با بهینه سازی پارامترهای هندسی قالب، کمینه مقدار نیروی مورد نیاز فرآیند اکستروژن حاصل گردد. نتایج شبیه سازی و طراحی آزمایش نشان داد:

- برخلاف پژوهش یاداو و همکاران [۱] (بررسی تک پارامتری ورودی بر خروجی فرآیند) با به کارگیری روش طراحی آزمایش، معنادار بودن تأثیر زاویه قالب و شعاع قالب و همچنین تقابل اثر این دو پارامتر بر حداکثر فشار تماسی میان قالب و شمش (CPRESS) به خوبی مشهود است.
  - حداکثر فشار تماسی میان قالب و شمش (CPRESS) با افزایش زاویه قالب ( $\alpha$ ) و افزایش شعاع قالب (R) کاهش می یابد.
  - کمینه مقدار CPRESS در زاویه ۶۰ درجه، کمینه مقدار VON MISES و کمینه مقدار TRESCA در زاویه ۴۵ درجه (پیوست ۲) قابل دستیابی است.
  - کمینه مقدار تنش فون میسز و معیار ترسکا در شعاع قالب ۱۲ میلی متر قابل دستیابی است (پیوست ۲). همچنین کمینه مقدار CPRESS در شعاع ۲۰ میلی متر است.
- لذا با بررسی عملکرد و تأثیرات مثبت و منفی دو زاویه پیشنهادی، زاویه ۴۵ درجه بدلیل نکات مثبت بیشتر (کاهش سطح تماس شمش اولیه با سطح قالب در زاویه ۴۵ درجه نسبت به زاویه ۶۰ درجه، کاهش اصطکاک و نیروی لازم جهت شکل دهی در زاویه ۴۵ درجه، افزایش عمر ابزار و قالب) پیشنهاد می گردد.

پس از صحت سنجی نتایج حاصله و مقایسه با نتایج پژوهش یاداو و همکاران [۱]، نتایج پژوهش حاضر با میزان خطای قابل قبولی (میزان خطا یک درصد) تأیید گردید. شکل های ۸ تا ۱۱ نتایج حاصل از این پژوهش و مقایسه آن با نتایج حاصل از یاداو و همکاران [۱] را نشان می دهد.

با توجه به شکل ۱۰ با افزایش زاویه قالب، حداکثر فشار تماسی میان قالب و شمش (CPRESS) کاهش می یابد. با توجه به شکل ۱۱ تأثیر شعاع قالب بر روی CPRESS را می توان به سه بخش تقسیم نمود. با توجه به شکل ۱۱ در بخش I با افزایش شعاع قالب تا ۱۲ میلی متر CPRESS کاهش می یابد. در بازه ۱۲ تا ۱۴ میلی متر (بخش II) و ۱۴ تا ۲۰ میلی متر (بخش III) افزایش شعاع قالب بر روی CPRESS به ترتیب تأثیر منفی و مثبت را نشان می دهد. با مقایسه نتایج حاصل از پژوهش پیش رو و نتایج حاصل از کار تجربی یاداو و همکاران [۱]، همان طور که قبلاً بیان شد، شاهد تطابق خوبی بین نتایج حاصل از شبیه سازی و کار تجربی هستیم (شکل ۱۰ و ۱۱).



شکل ۱۰ مقایسه نتایج شبیه سازی (خط چین) زاویه قالب با نتایج یاداو و همکاران [۱] (خط ممتد)

برای شبیه سازی المان محدود فرآیند از نرم افزار ABAQUS/Standard استفاده شده است. تحلیل فرآیند در چهار مرحله ورود شمش به قالب، شکل دهی شمش، خروج قطعه مورد نظر و سرد شدن تا دمای محیط انجام شد. تحلیل به صورت متقارن محوری (Axisymmetric) انجام شد که در آن شمش به صورت (Deformable) و قالب (Discrete Rigid) تعریف شده است.

در این تحلیل شمش به تعداد ۲۷۰۰ المان مربعی از نوع (CAX4T) مش بندی شده است. خواص ماده مطابق خواص آلومینیوم ۶۰۶۱ به صورت الاستیک-پلاستیک و حرکت شمش نیز به صورت حرکت خطی در مرحله شکل دهی شمش تعریف شده است.

## ۴- فهرست علائم و اختصارات

## علائم انگلیسی

$D_0$  قطر شمش یا قطر دهانه خروجی قالب  
 $D_f$  قطر دهانه ورودی قالب

## علائم یونانی

$\sigma$  تنش نرمال  
 $\mu$  ضریب اصطکاک

## ۵- مراجع

- Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 107, pp. 1115-1129, 2020, doi: <https://doi.org/10.1007/s00170-020-04971-1>.
- [7] K. P. V. Namburi, A. F. Kothasiri, and V. S. M. Yerubandi, "Modeling and simulation of Aluminum 1100 alloy in an extrusion process," *Materials Today: Proceedings*, vol. 23, pp. 518-522, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.05.398>.
- [8] K. Sheng, L. Lu, Y. Xiang, M. Ma, and Z. Wu, "Crack behavior in Mg/Al alloy thin sheet during hot compound extrusion," *Journal of Magnesium and Alloys*, vol. 7, no. 4, pp. 717-724, 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jma.2019.09.006>.
- [9] A. Syaifudin, E. M. Nurfadillah, A. R. Farid, and A. Windharto, "Strength consideration on car body of light rail transit making from aluminum extrusion," in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2021, vol. 1034, no. 1: IOP Publishing, p. 012025, doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1034/1/012025>.
- [10] N. K. Chandla, S. Kant, and M. Goud, "Mechanical, tribological and microstructural characterization of stir cast Al-6061 metal/matrix composites—a comprehensive review," *Sādhanā*, vol. 46, pp. 1-38, 2021, doi: <https://doi.org/10.1007/s12046-021-01567-7>.
- [11] T. Hong, F. Ding, F. Chen, H. Zhang, Q. Zeng, and J. Wang, "Study on the Fracture Behaviour of 6061 Aluminum Alloy Extruded Tube during Different Stress Conditions," *Crystals*, vol. 13, no. 3, p. 489, 2023, doi: <https://doi.org/10.3390/cryst13030489>.
- [1] R. R. Yadav, Y. Dewang, J. Raghuwanshi, and V. Sharma, "Finite element analysis of extrusion process using aluminum alloy," *Materials Today: Proceedings*, vol. 24, pp. 500-509, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.04.302>.
- [2] S. Kalpakjian and S. R. Schmid, "Manufacturing Engineering," *Technology; Prentice Hall: London, UK*, ISBN-13:978-0-13-522860-9, pp. 568-571, 2009.
- [3] M. Nouri, H. Mohammadian Semnani, and E. Emadoddin, "Computational and experimental studies on the effect back pressure on twist extrusion process," *Metals and Materials International*, vol. 27, pp. 2910-2918, 2021, doi: <https://doi.org/10.1007/s12540-020-00668-y>.
- [4] M. Kowalik, P. Paszta, T. Trzepieciński, and L. Kukielka, "Non-Symmetrical Direct Extrusion—Analytical Modelling, Numerical Simulation and Experiment," *Materials*, vol. 14, no. 24, p. 7856, 2021, doi: <https://doi.org/10.3390/ma14247856>.
- [5] J. J. Shukur and A. S. Jaber, "Experimental and finite element analysis study of die geometrical affect the forming load during extrusion process," in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 881, no. 1: IOP Publishing, p. 012045, doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/881/1/012045>.
- [6] Z. Liu, L. Li, G. Wang, and J. Yi, "Analysis and improvement of material flow during extrusion process using spreading pocket die for large-size, flat-wide, and multi-ribs profile," *The International*

پیوست ۱

محاسبه مقدار خطای صحت سنجی نتایج مقاله مرجع [۱]:

$$\delta = \left| \frac{v_A - v_E}{v_E} \right| \cdot 100\%$$

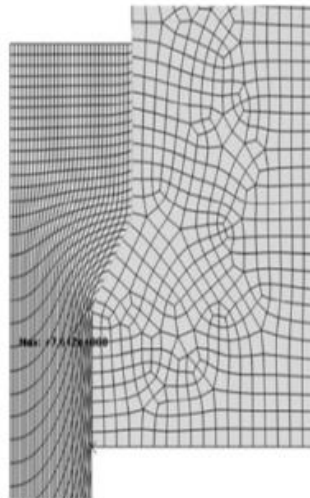
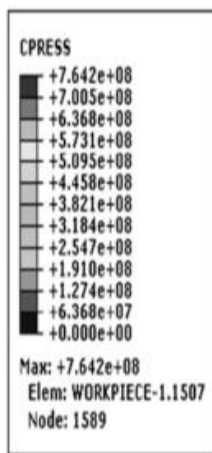
$\delta$  = percent error

$v_A$  = actual value observed

$v_E$  = expected value

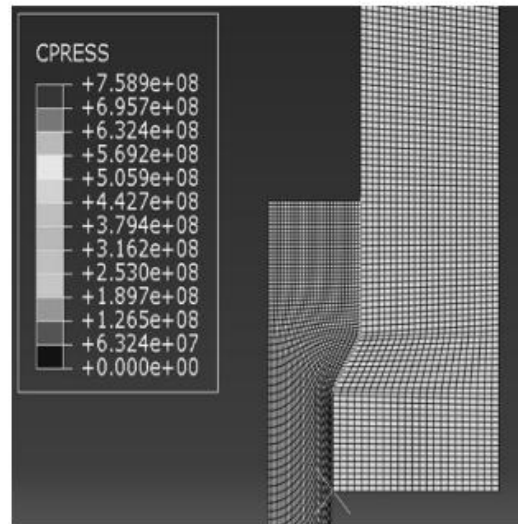
۱- صحت سنجی نتایج شعاع قالب ۱۲ میلی متری:

میزان خطا: ۱ درصد



R = 12 mm

ب

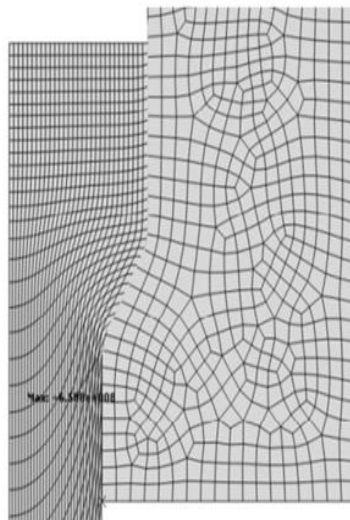
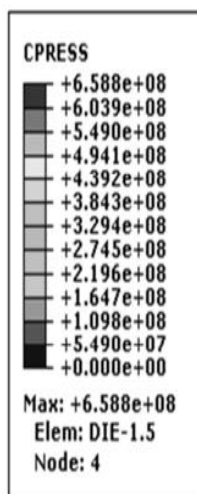


الف

الف- شبیه سازی جهت صحت سنجی، ب- شبیه سازی در مقاله مرجع

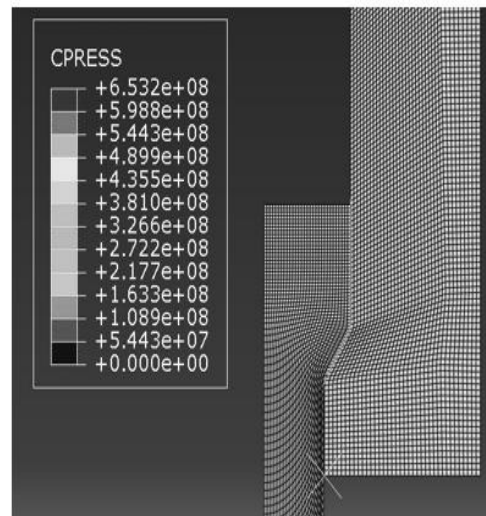
۲- صحت سنجی نتایج شعاع قالب ۱۴ میلی متری:

میزان خطا: ۱ درصد



R = 14 mm

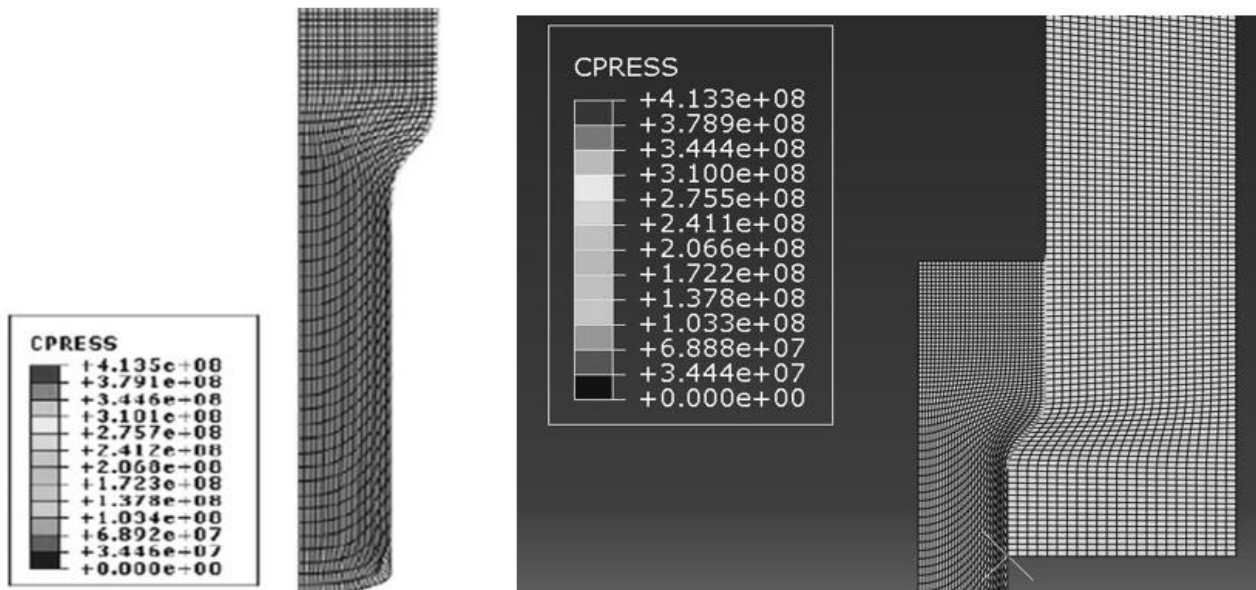
ب



الف

الف- شبیه سازی جهت صحت سنجی، ب- شبیه سازی در مقاله مرجع

۳- صحت سنجی نتایج زاویه قالب ۵۰ درجه  
میزان خطا: ۱ درصد



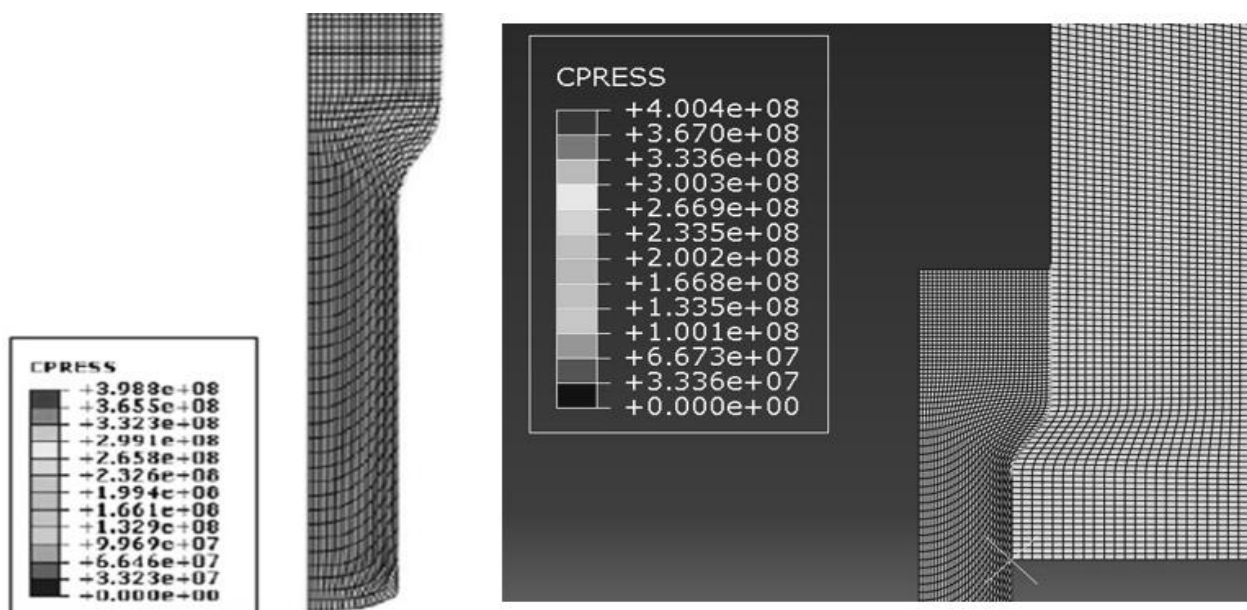
$\alpha = 50^\circ$

ب

الف

الف- شبیه سازی جهت صحت سنجی، ب- شبیه سازی در مقاله مرجع

۴- صحت سنجی نتایج زاویه قالب ۵۵ درجه  
میزان خطا: ۱ درصد



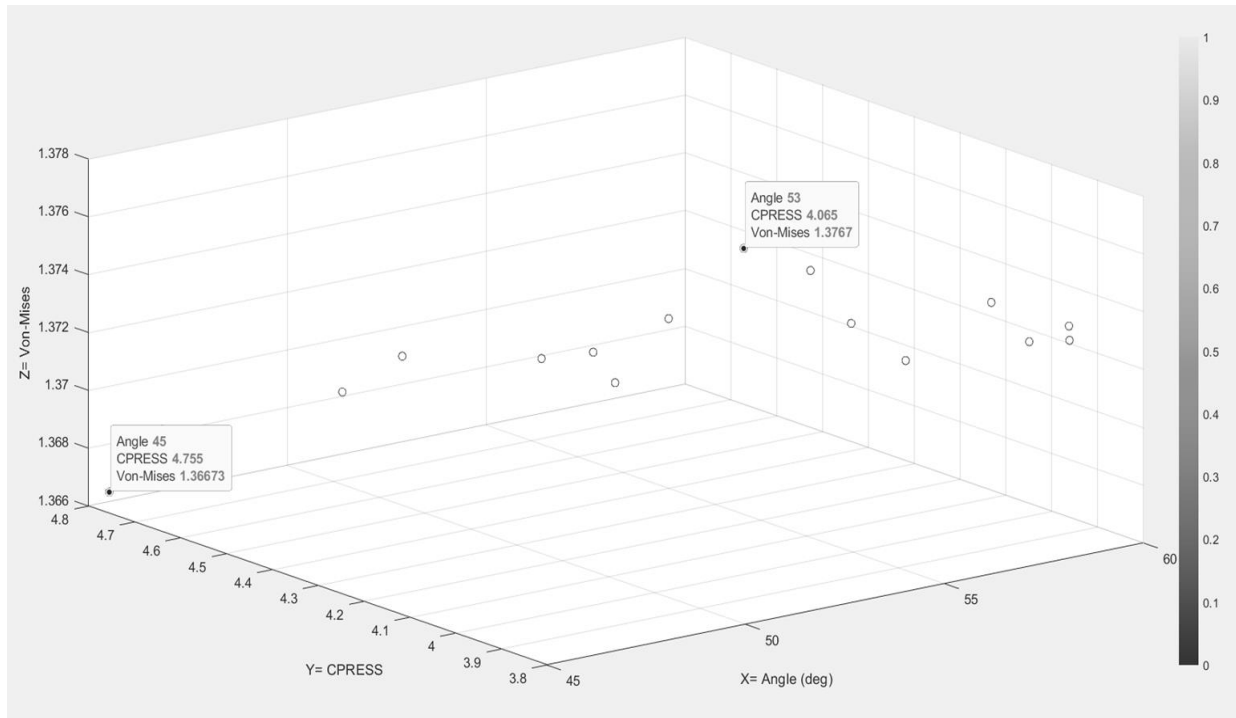
$\alpha = 55^\circ$

ب

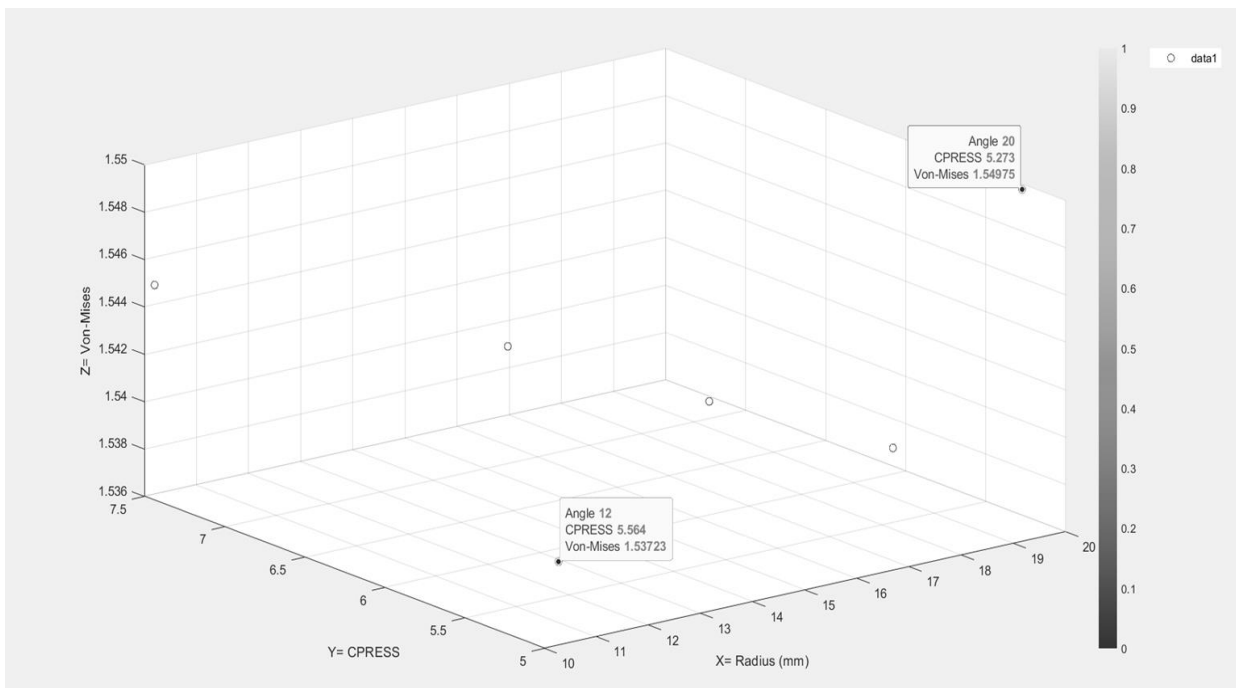
الف

الف- شبیه سازی جهت صحت سنجی، شکل ب- شبیه سازی در مقاله مرجع

پیوست ۲



محاسبه مقادیر مربوط به حداکثر فشار تماسی در حالت‌های مختلف تنش فون-میسز برای زاویه‌های متفاوت قالب



محاسبه مقادیر مربوط به حداکثر فشار تماسی در حالت‌های مختلف تنش فون-میسز برای شعاع‌های متفاوت قالب

## ارایه روش نوآورانه تحلیل انرژی نیروگاه های زباله سوز با روش معکوس حل برای محاسبه آنالیز شیمیایی زباله

**چکیده:** هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش نوین برای تجزیه و تحلیل جامع و دقیق انرژی نیروگاه های زباله سوز می باشد. در تمامی مطالعات انجام شده در این زمینه میانگین عددی آنالیز زباله در طی یک بازه زمانی مورد استفاده قرار گرفته است. استفاده از این عدد باعث ایجاد خطا در داده های تحلیل انرژی خواهد شد. در این مطالعه در ابتدا از روش حل معکوس برای محاسبه آنالیز شیمیایی، دبی جرمی سوخت و هوا استفاده شده است. اندازه گیری دبی سوخت نیز به صورت میانگین گیری در بازه زمانی محاسبه شده که باعث ورود خطا به محاسبات خواهد شد. با محاسبه دبی جرمی زباله به روش معکوس، امکان ورود این خطا به محاسبات نیز سلب می گردد. پس از محاسبه آنالیز زباله، دبی زباله و هوای تازه، تحلیل انرژی دقیق و قابل اعتماد برای کل حجم کنترل نیروگاه زباله سوز ارائه گردیده است. در این روش تعداد ۸ ترم تخریب و ۱۰ ترم تلفات ارائه گردیده است. عوامل ناکارآمدی ارائه شده در این مقاله، کامل ترین عوامل ناکارآمدی در نیروگاه های زباله سوز را ارائه می نماید. روش مذکور در نیروگاه آرادکوه انجام و نتایج نشان می دهد عامل تخریب انرژی توسط گازی ساز دارای بیشترین مقدار تلفات انرژی است. راندمان انرژی محاسبه شده برای نیروگاه معادل ۱۳/۱ درصد محاسبه شده است.

**واژه های راهنما:** تجزیه و تحلیل انرژی، نیروگاه زباله سوز، زباله، روش معکوس، تخریب انرژی، تلفات انرژی

سید محسن  
بنی فاطمه  
دانشجوی دکتری

سید علی  
بهبهانی نیا\*  
دانشیار،  
دانشکده مهندسی  
سیستم های انرژی،  
دانشکده مهندسی مکانیک،  
دانشگاه صنعتی خواجه  
نصیرالدین طوسی، تهران

مقاله علمی پژوهشی  
دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۲۲  
بازنگری: ۱۴۰۳/۰۱/۰۱  
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۱/۱۸

Mohsen  
Banifateme  
PhD. Student

Ali Behbahania\*  
Associate Professor,  
Department of Energy  
System Engineering,  
Faculty of Mechanical  
Engineering, K. N.  
Toosi University of  
Technology, Tehran

## An innovative inverse solution method for exergy analysis of waste-to-energy power plants to calculate waste chemical composition

**Abstract:** The main objective of this article is to present a novel method for comprehensive and accurate exergy analysis of waste-to-energy power plants. In all previous studies conducted in this field, the average numerical value of waste analysis over a specific time period has been used. However, using this value leads to errors in exergy analysis data. In this study, an inverse solution method is initially employed to calculate the chemical composition, mass flow rate of fuel, and air. The measurement of the fuel flow rate is also averaged over the calculation time period, introducing errors into the calculations. By calculating the waste mass flow rate using the inverse method, the possibility of introducing such errors into the calculations is eliminated. After calculating the waste composition, waste and fresh air mass flow rates, a precise and reliable exergy analysis is provided for the entire controlled volume of the waste-to-energy power plant. The method includes 8 degradation terms and 10 loss terms. The inefficiency factors presented in this article represent the most comprehensive inefficiency factors in waste-to-energy power plants. The applied method is implemented for the Aradkuh power plant, and the results demonstrate that the gasifier is the main exergy destruction factor with the highest exergy losses. The calculated exergy efficiency for the power plant is determined to be 1.13%.

**Keywords:** Exergy analysis, Waste-to-energy power plant, Waste, Reverse analysis method, Exergy destruction, Exergy losses.

## ۱- مقدمه

در مطالعه مشابه، سلطانی و همکاران به بررسی آنالیز انرژی پیشرفته برای نیروگاه‌های سیکل ترکیبی توربین گاز، بخار و زیست‌توده پرداخته‌اند. در این مطالعه تحلیل انرژی برای سیستم صورت گرفته و امکان بهبود عملکرد انرژی در کل سیستم مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتیجه این مطالعه نشان داده که امکان بهبود عملکرد انرژی در بویلر بازیاب حرارت بیشتری مقدار را خواهد داشت. در این مطالعه نیز عوامل تلفات و تخریب انرژی معرفی نگردیده است [۶].

مانرینگ و همکاران تحلیل انرژی و انرژی برای نمونه آزمایشی دستگاه راکتور گازی‌ساز به همراه موتور احتراق داخلی را مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه پارامترهای مورد نیاز اندازه‌گیری در شرایط عملکردی برق تولیدی ۴، ۶، ۸ و ۱۰ کیلووات استخراج شده است. تحلیل انرژی و انرژی از روش تلفات در این مطالعه ارائه و عوامل ناکارآمدی سیستم به طور مفصل مورد بررسی قرار گرفته است. برای تحلیل انرژی و انرژی عوامل ناکارآمدی از جمله تلفات انرژی در موتور احتراق داخلی، تلفات انرژی در راکتور گازی‌ساز، تلفات انرژی در رادیاتور موتور و تلفات انرژی توسط دود خروجی ارائه گشته است. این مطالعه نیز با توجه به ثابت بودن آنالیز سوخت ورودی از نظر تحلیل انرژی متفاوت با نیروگاه‌های زیاله‌سوز خواهد بود [۷].

در ادامه به بررسی مطالعاتی که به مدلسازی سیکل تولید گاز سنتز از زیست‌توده و در نهایت تحلیل انرژی به‌وسیله داده‌های حاصل از مدل‌سازی پرداخته خواهد شد.

در مطالعه‌ای، مدل‌سازی و شبیه‌سازی فرآیند تبدیل به گاز زیست‌توده با در نظر گرفتن ۲۳ نوع مختلف از منابع زیست‌توده توسط مهریویا و همکاران مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. در این مطالعه شبیه‌سازی سیستم مورد نظر در نرم افزار اسپین انجام و مسئله برای سوخت‌های زیست‌توده متفاوت انجام شده است. در این مطالعه تاثیرپذیری شدید راندمان انرژی و انرژی توسط پارامتر رطوبت موجود در سوخت زیست‌توده مورد مشخص گردیده است. این تاثیرپذیری شدید نشان دهنده مهم بودن آنالیز سوخت ورودی در تحلیل انرژی خواهد بود [۸].

پلگرینی و الیویرا مدل تعادلی از گازی‌سازی زیست‌توده نیشکر ارائه نمودند. همچنین یک مطالعه پارامتری با هدف تأیید تأثیر بسیاری از متغیرهای ذاتی مدل از جمله: دمای گازی‌سازی، محتوای رطوبت، دمای هوا و غیره انجام شده است. پس از مطالعه پارامتری، یک تحلیل انرژی به منظور ارزیابی برگشت‌ناپذیری‌های مرتبط با فرآیند و تأثیر دما، رطوبت، تولید زغال چوب و تلفات حرارتی بر روی آن‌ها انجام شده است. راندمان انرژی در این مطالعه برای راکتور گازی‌ساز برابر ۳۰

رشد سریع جمعیت، شهرنشینی و صنعتی‌شدن به طور قابل توجه، تولید زیاله جامد را افزایش می‌دهند [۱]. زیاله خود نوعی زیست‌توده محسوب می‌گردد. زیست‌توده مجموعه مواد آلی است که از منابع زنده، مانند گیاهان، جانوران و میکروارگانیسم‌ها، به دست می‌آید. از روش‌های نوین امحای زیاله، می‌توان به روش تولید انرژی از زیاله در نیروگاه زیاله‌سوز نام برد [۲]. دنیا به سمت تولید انرژی در کنار امحای زیاله و رساندن آسیب به طبیعت به کمترین حد ممکن است. در نتیجه، تجزیه و تحلیل انرژی و انرژی در این نوع نیروگاه‌ها باید به صورت دقیق مدنظر قرار گیرد [۳].

با شروع بحران انرژی در دهه ۷۰ میلادی در دنیا، تحلیل انرژی در رأس تحقیقات ترمودینامیکی سه دهه اخیر قرار گرفته است. تحلیل انرژی، بر مبنای قانون اول و دوم ترمودینامیک بنا شده است. انرژی حداکثر کار مفید است که از مقدار مشخص انرژی یا جریانی از مواد حاصل می‌شود [۴].

در بحث تحلیل انرژی، هدف تعیین مقدار، محل و عوامل موثر بر تولید بازگشت‌ناپذیری‌ها در طی فرآیندهای مختلف سیکل ترمودینامیکی است [۵].

اصلی‌ترین مشکل در تحلیل انرژی نیروگاه‌های زیاله‌سوز، محاسبه انرژی زیاله به عنوان سوخت ورودی است. با توجه به ناهمگن بودن سوخت زیاله، عمل نمونه برداری از این نوع سوخت متفاوت خواهد بود. در این نیروگاه زیاله در منبع ذخیره موجود و عمل تزریق سوخت به راکتور با جراثیل‌های سقفی انجام می‌پذیرد. آنالیز زیاله موجود در هر چنگک جراثیل با چنگک دیگر متفاوت خواهد بود. این بدان معنی است که آنالیز زیاله در هر نمونه با نمونه دیگر متفاوت است.

در تحلیل انرژی انواع این نیروگاه‌ها با توجه به اینکه زیاله خود نوعی زیست‌توده است که دارای آنالیز ناهمگن است، در ابتدا به بررسی تحلیل انرژی نیروگاه‌های تولید انرژی از زیست‌توده پرداخته شده است. در مطالعه‌ای اطهری و همکاران یک سیکل ترکیبی با توربین گاز، بخار و یک سیستم زیست‌توده چوب به عنوان سوخت مدل‌سازی و آنالیز انرژی به روش عددی انجام شده است [۳]. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که بیشترین پتانسیل کاهش تلفات و تخریب انرژی در بویلر بازیاب حرارت و کمترین آن در کندانسور سیکل بخار خواهد بود. در این مطالعه با توجه به ثابت بودن آنالیز شیمیایی چوب، آنالیز انرژی با دقت بسیار بالا قابل انجام خواهد بود. در این مطالعه در تحلیل انرژی به ارائه عدد برای راندمان بسنده گردیده است.

گزارش شده است. از ضعف‌های این مطالعه می‌توان به در نظر گرفته نشدن ترم تلفات حاصل از رطوبت موجود در سوخت اشاره کرد. همچنین در نظر گرفتن آنالیز ثابت برای سوخت زباله که خود ترکیبی ناهمگن است فرض درستی نبوده است. [۱۵].

لطفی و همکاران در مطالعه‌ای تحلیل انرژی برای بویلر بازیاب و راکتور گازی‌ساز نیروگاه زباله‌سوز ارائه نمودند. در این مطالعه نیز عوامل مختلف ناکارآمدی سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله به منظور جلوگیری از وابستگی محاسبه انرژی زباله به آنالیز شیمیایی زباله از رابطه تقریبی انرژی زیست‌توده وابسته به ظرفیت ویژه حرارتی استفاده شده است. استفاده از این روابط تقریبی باعث اضافه شدن خطا به روش تحلیل خواهد شد [۱۶].

به طور خلاصه، تمام مطالعات موجود در زمینه تحلیل انرژی و انرژی نیروگاه‌های زباله‌سوز دارای دو ضعف اساسی است.

۱- استفاده از آنالیز میانگین زباله که باعث ایجاد خطا در محاسبات تحلیل انرژی خواهد شد.

۲- عدم ارائه تحلیل کامل و دقیق برای کل حجم کنترل نیروگاه زباله‌سوز با محاسبه تمامی عوامل ناکارآمدی انرژی.

برای رفع این دو ضعف اساسی در تحلیل نیروگاه‌های زباله‌سوز، این مقاله رویکردی نوآورانه بر اساس روش حل معکوس ارائه می‌دهد. در این مطالعه ابتدا با روش حل معکوس آنالیز شیمیایی زباله محاسبه خواهد شد. در مرحله بعد تحلیل دقیق انرژی برای کل نیروگاه زباله‌سوز انجام و منابع تعداد ۸ عبارت برای تخریب و ۱۰ عبارت برای تلفات انرژی ارائه گشته است. در نهایت این روش با انجام داده‌برداری در نیروگاه زباله‌سوز آرادکوه در تهران به عنوان مطالعه موردی انجام شده است.

## ۲- شرح مسئله

مسئله مورد بررسی در این تحقیق ارائه روشی دقیق و قابل اطمینان برای تحلیل انرژی با محاسبه تمامی عوامل ناکارآمدی است. در نیروگاه‌های زباله‌سوز به دلیل ناهمگن بودن سوخت زباله استفاده از نمونه‌برداری باعث ایجاد خطاهای با اندازه بزرگ به تحلیل انرژی خواهد شد. در این مطالعه سعی در حل این مشکل و ارائه روش قابل اطمینان برای تحلیل انرژی شده است.

## ۳- روش حل

روش‌شناسی مورد استفاده در این مطالعه در الگوریتم ارائه شده در شکل (۱) نشان داده شده است. در مرحله اول داده‌های مورد نیاز از نیروگاه آرادکوه تهران برای حل معکوس و همچنین تحلیل

درصد محاسبه شده است. در این مطالعه نیز اثر درصد رطوبت بر راندمان سوخت مشخص گردید [۹].

کارامارکوویچ و همکاران نیز یک مدل تعادلی برای راکتور گازی‌ساز با سوخت زیست‌توده  $CH_{1.4}O_{0.59}N_{0.0017}$  ارائه نموده‌اند. با مدلسازی راکتور در درصد رطوبت‌های متفاوت سوخت زیست‌توده در محدوده دمایی ۹۰۰-۱۳۷۳ کلوین مشخص گردید که افزایش رطوبت در زیست‌توده به کاهش راندمان فرآیندهای مورد بررسی می‌شود. در این مطالعه نیز فقط راندمان انرژی مورد محاسبه قرار گرفته است [۱۰].

مولر و همکاران یک نیروگاه سیکل ترکیبی راکتور گازی‌ساز با سوخت زیست‌توده، پیل سوختی و میکروتوربین را مورد بررسی قرار داده‌اند. تحلیل انرژی و انرژی به طور کامل روی سیستم صورت گرفته و مشخص گردیده که بیشترین ترم تخریب انرژی مربوط به راکتور گازی‌ساز است [۱۱].

ونایی و همکاران یک تحلیل کامل انرژی، انرژی، انرژی-اقتصادی، انرژی-محیط زیستی برای نیروگاه‌های ترکیبی زباله سوز با سیکل رانکین آلی ارائه نمودند [۱۲، ۱۳].

در ادامه به انواع تحلیل انرژی که در مورد سوخت زباله انجام شده است پرداخته خواهد شد. چن و همکاران طرح یک سیستم ترکیبی نیروگاه زغال سنگ سوز تولید بخار به همراه یک نیروگاه زباله‌سوز را ارائه نمودند. در این مطالعه نیروگاه مورد ارزیابی انرژی قرار گرفت. در این ارزیابی آنالیز شیمیایی زباله ثابت فرض شده است که فرضی بسیار نادرست خواهد بود [۱].

سلهمزید و همکاران نیز تحلیل انرژی و انرژی برای یک نیروگاه زباله‌سوز در کشور نروژ ارائه نمودند. در این مطالعه رابطه‌ای بر مبنای آنالیز شیمیایی زباله ارائه گردیده است. برای تحلیل انرژی و انرژی در این از آنالیز زباله میانگین ارائه شده برای کشور نروژ استفاده گردیده است که این آنالیز زباله متفاوت با آنالیز زباله مورد استفاده در لحظه داده برداری خواهد بود. این عملیات باعث ورود خطای بسیار محسوس به محاسبات خواهد شد [۱۴].

اعظمی و همکاران تحلیل انرژی و انرژی نیروگاه‌های زباله‌سوز از نوع گازی‌ساز با سیکل رانکین را ارائه نمودند. برای آنالیز زباله نیز سه منطقه از کلان شهر تهران انتخاب و از میانگین ترکیب شیمیایی زباله‌های انباشته شده، آنالیز زباله میانگین مورد محاسبه قرار گرفت. سپس آنالیز انرژی و انرژی برای همه اجزا و بویلر بازیاب انجام شد. نتایج این مطالعه نشان داد که بازگشت‌ناپذیری در بویلر بازیاب با  $52617/3$  کیلووات منبع اصلی تخریب انرژی بوده است. همچنین بازده کلی انرژی و انرژی بویلر بازیاب مورد مطالعه به ترتیب  $78/7$  و  $16/0$  درصد

اگرژی کل جریان سیال شامل اگرژی شیمیایی و فیزیکی، با استفاده از معادله (۳) محاسبه می‌شود. در اینجا مقادیر اگرژی شیمیایی مولی استاندارد از مرجع [۱۸] استخراج شده است.

$$\dot{E}_i = \left( \left( \frac{\dot{m}_i}{MW_i} \right) \bar{e}_i^{ch} + \dot{m}_i e_i^{ph} \right) \quad (3)$$

### ۳-۱- اگرژی سوخت

همانطور که بیان شد، سوخت زباله خود جریان جرمی جامد تراکم‌ناپذیر محسوب می‌شود. برای محاسبه اگرژی فیزیکی جریان‌های جرمی زیست‌توده جامد تراکم‌ناپذیر، معادله زیر قابل استفاده است [۱۹].

$$e_{fuel}^{ph} = c_p(T - T_0 - \ln(T/T_0)) \quad (4)$$

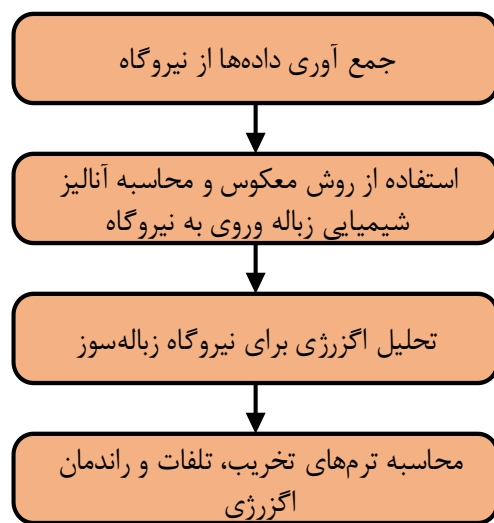
اگرژی شیمیایی زباله بر مبنای آنالیز شیمیایی زباله مطابق رابطه (۵) قابل محاسبه خواهد بود [۲۰].

$$e_{fuel}^{ch} = LHV \left( \frac{1}{0.412} + \frac{1}{2160} \frac{x_{H2}}{x_C} - \frac{1}{2499} \frac{x_{O2}}{x_C} \left( 1 + \frac{1}{7884} \frac{x_{H2}}{x_C} \right) + 0.0450 \frac{x_{N2}}{x_C} \right) \left( 1 - \frac{0}{3035} \frac{x_{O2}}{x_C} \right)^{-1} \quad (5)$$

### ۳-۲- محاسبه آنالیز شیمیایی زباله به روش معکوس

روش معکوس برای تخمین ترکیب زباله‌های جامد شهری نسبت به روش‌های سنتی نمونه‌برداری چندین مزیت را داراست. با استفاده از تکنیک‌ها و روش‌های ریاضی و محاسباتی، این روش نیاز به نمونه‌برداری و تحلیل فیزیکی زباله‌های جامد شهری را که نیازمند صرف زمان، نیرو و هزینه است را از بین می‌برد [۲۱]. روش معکوس به‌ویژه در نیروگاه‌های زباله‌سوز بسیار ارزشمند است، زیرا داشتن اطلاعات دقیق درباره ترکیب زباله‌های جامد شهری برای بهینه‌سازی تولید انرژی بسیار حائز اهمیت است. با تخمین آنالیز شیمیایی زباله به‌صورت غیرمستقیم از طریق تحلیل گازهای خروجی دودکش و سایر اندازه‌گیری‌ها، روش معکوس به نیروگاه‌ها امکان می‌دهد تصمیمات معقول درباره پارامترها و مدیریت نیروگاه را اتخاذ کنند. این موضوع می‌تواند

اگرژی نیروگاه جمع‌آوری می‌گردد. سپس آنالیز شیمیایی زباله، دبی جرمی زباله و دبی جرمی هوا با استفاده از روش حل معکوس مورد محاسبه قرار می‌گیرد. در این مرحله به دلیل عدم وجود امکان اندازه‌گیری برخی از پارامترهای مورد نیاز برای تحلیل اگرژی نیروگاه (کار فن و کار پمپ)، نیروگاه در نرم‌افزار ترموفلو مدل‌سازی و داده‌های مورد نیاز توسط نرم‌افزار استخراج می‌گردد. پس از انجام این مراحل، تمامی پارامترهای مورد نیاز برای تجزیه و تحلیل کامل اگرژی در دسترس بوده و پس از اعمال تجزیه و تحلیل اگرژی برای کل نیروگاه، پارامترهای تخریب، اتلاف و راندمان اگرژی مورد محاسبه قرار می‌گیرند.



شکل ۱ الگوریتم حل مسئله تحلیل اگرژی در نیروگاه زباله‌سوز با استفاده از روش معکوس

تجزیه و تحلیل اگرژی، توصیف واقعی‌تر از عملکرد سیستم نسبت به تجزیه و تحلیل انرژی ارائه می‌دهد. همچنین منابع، مکان‌ها و مقادیر ناکارآمدی‌های ترمودینامیکی واقعی را ارائه می‌کند. اولین گام در انجام تجزیه و تحلیل اگرژی، محاسبه اگرژی جریان برای تمام جریان‌های نشان داده شده است. اگرژی جریان شامل چهار جزء اگرژی شیمیایی، فیزیکی، جنبشی و پتانسیل است. در این مطالعه از دو مورد آخر به عنوان فرض ساده‌کننده صرف‌نظر شده است. بنابراین، مجموع اگرژی‌های فیزیکی و شیمیایی، مقدار اگرژی هر جریان در سیستم را نشان می‌دهد. قابل ذکر است که اگرژی‌های شیمیایی مولی استاندارد برای مواد مختلف معمولاً بر واحد مول اجزا ارائه می‌شود [۱۷].

$$e_i^{ph} = (h_i - h_0) - T_0(s_i - s_0) \quad (1)$$

$$\bar{e}_i^{ch} = \sum \bar{x}_j \bar{e}_j^{ch} + \bar{R}T_0 \sum \bar{x}_j \ln \bar{x}_j \quad (2)$$

$$x = \begin{bmatrix} C \\ O \\ H \\ W \\ N \\ S \\ Ash \\ \dot{m}_a \\ \alpha \\ \dot{m}_f \end{bmatrix} \quad (8)$$

ماتریس حساسیت (A) به عنوان معادلاتی تعریف می‌گردد که معلومات و مجهولات مسئله را به هم وابسته می‌سازد. در این مطالعه با توجه به ثابت بودن مسئله به عنوان یک نیروگاه زباله‌سوز این ماتریس همانند ماتریس مطالعه بنی‌فاطمه و همکاران خواهد بود [۲۱]. در این قسمت مسئله معکوس با کمک روش خطی‌سازی و تبدیل مسئله غیر خطی به خطی حل می‌گردد. همچنین به منظور تضمین پایداری و قابلیت اعتماد جواب بدست آمده از روش تنظیم‌کننده برای پایداری جواب نیز استفاده می‌شود. با تعیین یک پارامتر تنظیم‌کننده مناسب، روش معکوس دقت حل به اندازه کافی افزایش خواهد یافت [۲۱].

### ۳-۳- تلفات و تخریب اگزوزی

حجم کنترل مورد نظر برای تحلیل اگزوزی این مطالعه در شکل (۲) نشان داده شده است. در این بخش عوامل تلفات و تخریب اگزوزی به تفکیک مورد بحث قرار گرفته و روابط مربوطه برای محاسبه عوامل ناکارآمدی مورد نیاز آورده شده‌اند.

#### ۳-۳-۱- تلفات اگزوزی ناشی از شیرابه

در نیروگاه‌های زباله‌سوز، زباله‌ها قبل از ورود به راکتور به منظور از دست دادن رطوبت موجود در یک مخزن ذخیره زباله انباشته می‌شوند. زباله ورودی معمولاً ۵ تا ۷ روز مورد استفاده قرار نگرفته و درصد زیادی از رطوبت موجود در زیر مخزن زباله جمع خواهد شد [۲۲]. در زیر مخزن زباله، مخزن شیرابه وجود دارد که شیرابه خارج شده از زباله در آن جمع‌آوری می‌گردد. خارج شدن جریان جرمی شیرابه خود نوعی تلفات انرژی محسوب می‌شود که بر طبق رابطه (۹) و (۱۰) مورد محاسبه قرار می‌گیرند. به عنوان فرض ساده‌کننده، شیرابه زباله را رطوبت خالص در نظر گرفته و از دیگر اجزای آن صرف‌نظر می‌شود. فرض یاد شده به دلیل تشکیل بیش از ۹۰ درصدی شیرابه از رطوبت، فرض درست و منطقی خواهد بود [۲۳].

منجر به بهبود کارایی انرژی، کاهش آلاینده‌ها و بهبود عملکرد کلی سیستم تولید انرژی از زباله شود.

برای محاسبه ترکیب شیمیایی زباله‌های جامد شهری از روش معکوس ارائه شده توسط بنی‌فاطمه و همکاران استفاده شده است [۲۱]. در روش معکوس ارائه شده عوامل قابل اندازه‌گیری زیر به عنوان ورودی روش معرفی خواهند شد.

- مولفه‌های گاز خروجی و درصد جرمی آن‌ها، از جمله اکسیژن، دی‌اکسیدکربن و دی‌اکسید سولفور و غیره.
- درصد جرمی کربن و نرخ جریان جرمی خاکستر.
- فشار و دمای گاز سینتری ورودی به واحد بازیابی حرارت، بخار تولیدی و گاز خروجی دودکش.
- پارامترهای زیر نیز توسط الگوریتم روش حل معکوس قابل تعیین هستند:

- محتوای زباله‌های جامد شهری که شامل درصد جرمی هیدروژن، اکسیژن، کربن، رطوبت، سولفور و سایر عناصر در سوخت می‌باشد.
- ارزش حرارتی زباله‌های جامد شهری
- نرخ جریان جرمی هوا

روش معکوس با تعریف بردار B به عنوان بردار پارامترهای اندازه‌گیری آغاز می‌شود. در ادامه ماتریس ضرایب A که از روابط واکنش‌های احتراق موجود در نیروگاه مورد محاسبه قرار خواهد گرفت. در این قسمت بردار x که بردار پارامترهای مجهول در مسئله معکوس است تعریف می‌گردد. بردار x از رابطه زیر قابل محاسبه است [۲۱].

$$Ax = B \quad (6)$$

بردار (B) به عنوان بردار پارامترهای قابل اندازه‌گیری به صورت زیر نشان داده شده است [۲۱].

$$B = \begin{bmatrix} CO_2 \\ CO \\ O_2 \\ H_2O \\ SO_2 \\ N_2 \\ Q \\ \dot{m}_{fg} - \dot{m}_r \\ \dot{m}_r \\ 100 \end{bmatrix} \quad (7)$$

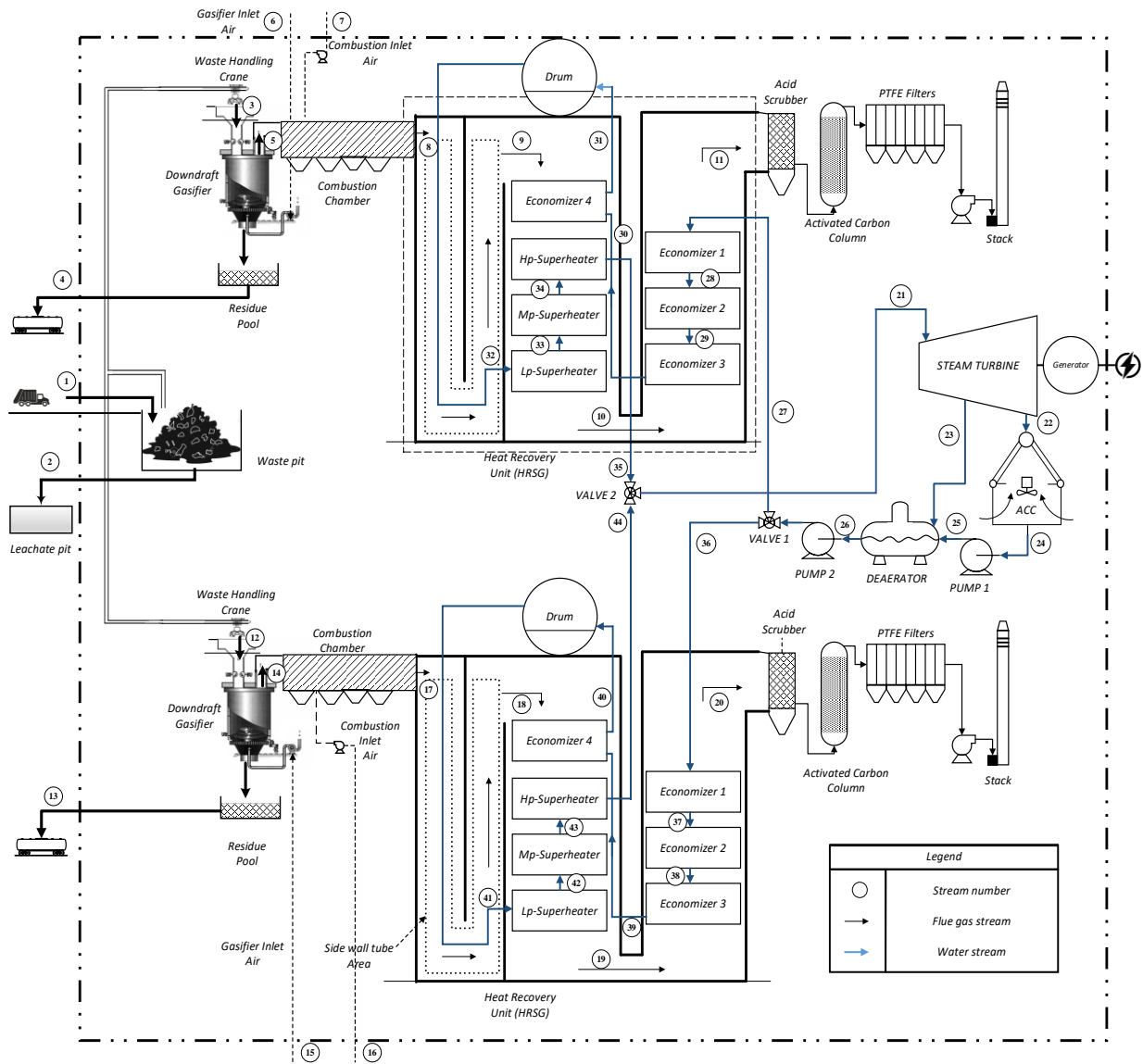
همچنین بردار (x) به عنوان بردار مجهولات از معادله (۶) محاسبه می‌گردد. بردار (x) به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۲۱].

مقدار خاکستر باقیمانده نسبت به دبی سوخت ورودی در این نو از نیروگاه‌ها، معمولاً عدد بالاتر نسبت به نیروگاه‌های معمول خواهد داشت [۲۴]. در روش ارائه شده در این مطالعه مقدار عددی تلفات انرژی خاکستر باقیمانده به دو پارامتر مستقل انرژی فیزیکی و شیمیایی خاکستر خروجی تقسیم شده است. تلفات انرژی فیزیکی جریان خاکستر طبق رابطه (۱۲) محاسبه خواهد شد [۲۵].

$$EL_1 = \dot{m}_3 e_3^{ph} \quad (9)$$

$$EL_2 = \frac{\dot{m}_3}{MW_{H_2O}} \bar{e}_{H_2O}^{ch} \quad (10)$$

### ۳-۳-۲- تلفات انرژی ناشی از خاکستر باقیمانده



شکل ۲ دیاگرام جریانی نیروگاه زباله‌سوز آرادکوه به منظور تحلیل انرژی سیستم

ترم تلفات انرژی شیمیایی جریان خاکستر نیز با استفاده از رابطه (۱۴) محاسبه خواهد شد [۱۶].

$$EL_4 = \left( \frac{\dot{m}_6}{MW_6} \right) [(\bar{x}_{C6} \bar{e}_C^{ch} + \bar{x}_{Ash6} \bar{e}_{Ash}^{ch}) + RT_0 (\bar{x}_{C6} \ln \bar{x}_{C6} + \bar{x}_{Ash6} \ln \bar{x}_{Ash6})] \quad (14)$$

$$e_6^{ph} = c_{P6} \left( T_6 - T_o - T_o \ln \frac{T_6}{T_o} \right) \quad (12)$$

برای محاسبه ظرفیت گرمایی ویژه جریان خاکستر رابطه (۱۳) مورد استفاده قرار خواهد گرفت [۱۶].

$$c_{P6} = (0.594 + 5.86 \times 10^{-4} T) \quad (13)$$

با تشکیل کربن مونواکسید مقدار آگزرژی بیشتری از حجم کنترل خارج خواهد شد. دو ترم تلفات آگزرژی شیمیایی و فیزیکی از روابط (۱۹) و (۲۰) محاسبه خواهند شد [۲۶].

$$EL_7 = \dot{m}_{13}(e_{13}^{ph}) \quad (19)$$

$$EL_8 = \dot{m}_{13}(e_{13}^{ch}) - \dot{E}L_3 \quad (20)$$

مقدار ترم تلفات آگزرژی تشکیل کربن مونواکسید متناسب با اختلاف آگزرژی شیمیایی استاندارد کربن مونواکسید و کربن دی اکسید است. مقدار این پارامتر از رابطه (۲۱) محاسبه خواهد شد [۲۷].

$$EL_9 = \frac{\dot{m}_8 \bar{x}_{CO} (\bar{e}_{CO}^{ch} - \bar{e}_{CO_2}^{ch})}{MW_2} \quad (21)$$

### ۳-۳-۵- تخریب آگزرژی در گازی ساز و محفظه احتراق

برای محاسبه تخریب آگزرژی در گازی ساز و محفظه احتراق به صورت جدا، نیاز به دستگاه آنالیزور گاز سنتز خواهد بود. در صورت دسترسی به چنین دستگاهی، می توان مقدار آگزرژی تخریب شده را برای این دو جز به تفکیک محاسبه نمود. در این مطالعه با توجه به عدم دسترسی به دستگاه مذکور، دو ترم تخریب در هم ادغام شده و ترم تخریب گازی ساز و محفظه احتراق را تشکیل خواهند داد [۲۶].

$$ED_1 = \dot{E}_2 + \dot{E}_4 + \dot{E}_7 - \dot{E}_6 - \dot{E}_8 - (EL_5 + EL_6) \quad (22)$$

### ۳-۳-۶- تخریب آگزرژی در بویلر بازیاب حرارت

دومین ترم تخریب آگزرژی در بویلر بازیاب حرارت رخ خواهد داد. این ترم تخریب در نتیجه انتقال حرارت بین دو جریان گرمی آب ورودی به بویلر بازیاب حرارت و دود تولید شده در محفظه احتراق رخ خواهد داد [۲۶].

$$ED_2 = \dot{E}_8 + \dot{E}_{15} - \dot{E}_{21} - \dot{E}_{13} - (EL_5 + EL_6) \quad (23)$$

### ۳-۳-۷- تخریب آگزرژی در توربین بخار

برای توربین بخار همانطور که از شکل (۲) مشخص است، ترم تخریب آگزرژی به توسط رابطه (۲۴) محاسبه می شود. برای

به منظور فرض ساده کننده مقدار آگزرژی شیمیایی و جرم مولی خاکستر به ترتیب برابر با ۹۹۹۵۰ کیلوژول بر کیلومول و ۷۶ کیلوگرم بر مول در نظر گرفته شده است [۲۶].

### ۳-۳-۳- تلفات آگزرژی ناشی از تشعشع و همرفت

تلفات آگزرژی حرارتی ناشی از تشعشع و همرفت دیواره ها با استفاده از معادله های (۱۵) و (۱۶) محاسبه خواهند شد. لازم به ذکر است که این پارامترها به طور جداگانه برای گازی ساز، محفظه احتراق و بویلر بازیاب حرارت تشکیل خواهد شد. مجموع این مقادیر کل تلفات ناشی از تابش یا همرفت را تشکیل خواهد داد [۲۷].

$$EL_5 = A q_r \left( 1 - \frac{4}{3} \times \frac{T_0}{T_s} + \frac{1}{3} \times \left( \frac{T_0}{T_s} \right)^4 \right) \quad (15)$$

$$EL_6 = A q_c \left( 1 - \frac{T_0}{T_s} \right) \quad (16)$$

$$q_c = 0/174 \left[ \left( \frac{T_s - 460}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_0 - 460}{100} \right)^4 \right] \quad (17)$$

$$q_r = 0.296(T_s - T_0)^{1.25} \sqrt{\frac{196.85V_w + 68.9}{68.9}} \quad (18)$$

در معادلات بالا  $q_r$  و  $q_c$  به ترتیب شارهای حرارتی همرفتی و تابشی به محیط هستند و  $A$  مساحت جانبی بویلر در تماس با محیط خواهد بود. علاوه بر این،  $T_s$  و  $V_w$  به ترتیب دمای سطح دیوار بویلر و سرعت باد را نشان می دهند.

### ۳-۳-۴- تلفات آگزرژی ناشی از خروج گاز آگزوز

جریان دود خروجی بویلر بازیاب حرارت از سه منبع ناکارآمدی آگزرژی فیزیکی دود خروجی، آگزرژی شیمیایی دود خروجی و آگزرژی ایجاد کربن مونواکسید تشکیل می شود [۲۸]. تلفات حاصل از آگزرژی فیزیکی بدین معنی است که جریان گرمی مذکور همچنان توانایی تولید کار را داشته و به تعادل ترمودینامیکی با محیط دست نیافته است. تلفات حاصل از آگزرژی شیمیایی تا رسیدن جریان گرمی به تعادل مرده با محیط ادامه خواهد یافت. ترم سوم تلفات آگزرژی در جریان گرمی دود مربوط به احتراق ناقص در محفظه احتراق است. آگزرژی شیمیایی کربن مونواکسید بالاتر از کربن دی اکسید بوده و

## ۳-۴- محاسبه بازده اگزرژی

اکنون با ارائه تمامی منابع برگشت‌ناپذیر و تلفات احتمالی که ممکن است در ناکارآمدی سیستم نقش داشته باشند، از روش تلفات برای محاسبه راندمان کل نیروگاه زباله‌سوز استفاده می‌شود. در اینجا مجموع تمام ترم‌های تلفات و تخریب اگزرژی بر اگزرژی سوخت تقسیم می‌گردد. عدد بدست آمده از مقدار واحد کم شده و راندمان اگزرژی طبق رابطه (۳۰) محاسبه خواهد شد [۲۷].

$$\psi_I = \left( 1 - \frac{(\sum_{i=1}^{10} EL_i + \sum_{k=1}^6 ED_k)}{\dot{m}_f e_f^{ch}} \right) \times 100 \quad (30)$$

مقدار دبی جرمی زباله در معادله بالا نیز از روش معکوس تخمین زده خواهد شد که از مزایای استفاده از روش معکوس برای تحلیل اگزرژی نیروگاه زباله‌سوز خواهد بود.

## ۴- تحلیل نتایج

برای حل این مسئله ابتدا تمامی پارامترهای مورد نیاز برای حل معکوس در نیروگاه زباله‌سوز آرادکوه اندازه‌گیری شده است. برای حل دقیق و نزدیکتر به واقعیت تعداد ۵ دسته داده اندازه‌گیری و میانگین آنها برای حل معکوس مورد استفاده قرار گرفته است. این داده‌ها در جدول (۱) نشان داده شده‌اند. با استفاده از معادلات حل معکوس (روش ارائه شده توسط بنی‌فاطمه و همکاران [۲۱]) آنالیز زباله ورودی به نیروگاه بر طبق جدول (۲) مورد محاسبه قرار می‌گیرد.

همانطور که از جدول (۲) مشخص است بیشتر درصد جرمی زباله از اکسیژن تشکیل شده است. همچنین به وسیله روش معکوس پارامترهای دبی جرمی زباله و هوا که اندازه‌گیری آنها با خطای بسیار بالا همراه است نیز مورد محاسبه قرار خواهد گرفت که در جدول (۲) آورده شده است.

در ادامه با توجه به عدم امکان اندازه‌گیری بعضی از پارامترهای مورد نیاز در فرآیند تحلیل اگزرژی، نیروگاه در نرم‌افزار ترموفلو مدل شده و داده‌های مورد نیاز کامل می‌گردد.

پارامترهای کار پمپ و فن از نرم‌افزار محاسبه و در جدول (۳) نشان داده شده است. پارامترهای دبی، دما، فشار برای جریان‌های جرمی سیستم در جدول (۴) آورده شده است.

توربین بخار ترم تلفات از دیواره نیز موجود است که به دلیل مقدار عددی بسیار پایین از آن صرف نظر شده است [۲۶].

$$ED_3 = \dot{E}_{21} - \dot{E}_{22} - \dot{E}_{23} - \dot{W}_{shaft} \quad (24)$$

## ۳-۳-۸- تخریب و تلفات اگزرژی در کندانسور

برای کندانسور سیکل تولید توان یک ترم تخریب و یک ترم تلفات اگزرژی در نظر گرفته خواهد شد. ترم تلفات مربوط به جریان جرمی هوای خنک کننده خواهد بود. ترم تخریب نیز از معادله بالانس اگزرژی محاسبه خواهد شد [۲۶].

$$EL_{10} = \dot{m}_{46}(e_{46}^{ph}) - \dot{m}_{47}(e_{47}^{ph}) \quad (25)$$

$$ED_4 = \dot{E}_{22} + \dot{E}_{46} - \dot{E}_{24} - \dot{E}_{47} \quad (26)$$

## ۳-۳-۹- تخریب اگزرژی در پمپ

برای پمپ‌ها نیز ترم تخریب اگزرژی ارائه می‌شود که در روابط (۲۷) و (۲۸) به تفکیک نشان داده شده است [۲۹].

$$ED_5 = \dot{E}_{26} - \dot{E}_{27} + \dot{W}_{pump,1} \quad (27)$$

$$ED_6 = \dot{E}_{24} - \dot{E}_{25} + \dot{W}_{pump,2} \quad (28)$$

## ۳-۳-۱۰- تخریب اگزرژی در دی‌اریتور

همانطور که پیش‌تر توضیح داده شد، دی‌اریتور نقش هوازادایی را دارد و ترم تخریب اگزرژی حاصل از اختلاط جریان‌ها را داراست [۲۶].

$$ED_7 = \dot{E}_{23} + \dot{E}_{25} - \dot{E}_{26} \quad (29)$$

## ۳-۳-۱۱- تخریب اگزرژی ژنراتور

برای محاسبه تخریب اگزرژی ژنراتور کافی است تفاضل مقدار جریان‌ها کار ورودی توسط شفت از برق تولیدی محاسبه گردد [۲۶].

$$ED_8 = \dot{W}_{shaft} - \dot{W}_{electricity} \quad (30)$$

جدول ۱ داده‌های اندازه‌گیری مربوط به تست نیروگاه زباله‌سوز آزادکوه

شماره	متغیر	واحد اندازه‌گیری	مقدار				
			تست ۱	تست ۲	تست ۳	تست ۴	تست ۵
۱	کربن دی‌اکسید	درصد حجمی گاز	۱۱/۱۶	۱۰/۳	۹/۷۲	۱۱/۳۵	۱۱/۰۲
۲	کربن مونواکسید	درصد حجمی گاز	۰/۱۱۶۷	۰/۱۰۷۷	۰/۱۰۱۶	۰/۱۱۸۷	۰/۱۱۵۲
۳	اکسیژن	درصد حجمی گاز	۷/۴۴	۸/۱۲	۸/۶۶	۸/۴۴	۷/۹۷
۴	رطوبت	درصد حجمی گاز	۱۳/۴۹	۱۳/۲۱	۱۱/۸۱	۹/۶۳	۱۱/۴۲
۵	سولفور دی‌اکسید	درصد حجمی گاز	۰/۰۴۵۵	۰/۰۴۳۵	۰/۰۴۰۴	۰/۰۴۹۵	۰/۰۵۳۰
۶	دبی جرمی بخار	کیلوگرم بر ثانیه	۰/۸۲۱۰	۰/۹۸۸۳	۱/۰۶۸۴	۰/۹۹۲۴	۰/۸۹۷۱
۷	دبی خاکستر خروجی گازی‌ساز	کیلوگرم بر ثانیه	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۱۵
۸	دبی خاکستر خروجی از بویلر	کیلوگرم بر ثانیه	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲
۹	درصد کربن موجود در خاکستر	درصد جرمی خاکستر	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲
۱۰	دمای آب تغذیه بویلر	سانتیگراد	۷۱/۸	۷۲/۹	۷۲/۴	۷۳/۵	۷۴/۲
۱۱	دمای بخار تولیدی بویلر	سانتیگراد	۴۳۷/۵۵	۴۳۷/۴۵	۴۳۶/۷۵	۴۳۶/۲۵	۴۳۲/۴۵
۱۲	دمای گاز ورودی به بویلر	سانتیگراد	۹۷۴/۰۱	۹۴۲/۰۳	۹۹۹/۷۸	۹۷۸/۶۸	۹۹۳/۴
۱۳	دمای گاز خروجی از بویلر	سانتیگراد	۲۰۲/۸	۲۰۳/۴	۲۰۵/۳	۲۰۶/۱	۲۰۶/۰
۱۴	فشار آب تغذیه	کیلوپاسکال	۲۲۴۲	۲۱۹۷	۲۲۴۱	۲۳۳۴	۲۴۲۰
۱۵	فشار بخار تولیدی	کیلوپاسکال	۲۳۳۰	۲۳۰۰	۲۳۰۰	۲۴۰۰	۲۴۹۰

اگرزری، تمامی عوامل ناکارآمدی محاسبه و در جدول (۶) آورده شده است.

جدول ۳ پارامترهای محاسبه شده کار فن و پمپ‌ها توسط نرم‌افزار ترموفلکس

پارامتر	مقدار (کیلووات)
کار فن	۹۶/۵۱
کار پمپ ۱	۱۴۲/۱
کار پمپ ۲	۱/۸

در شکل (۳) سهم هر یک از عوامل ناکارآمدی سیستم قابل مشاهده است. همانطور که در این شکل مشخص است، بیشترین مقدار تخریب و تلفات اگرزری مربوط به ترم تخریب اگرزری در گازساز و محفظه احتراق برابر با ۵۸ درصد از مقدار کل تخریب و تلفات خواهد بود. در مرتبه دوم اگرزری فیزیکی دود خروجی با مقدار ۱۷ درصد از کل تخریب تلفات اگرزری سیستم خواهد بود. همچنین در رتبه سوم ترم تخریب اگرزری در توربین بخار قرار خواهد گرفت. مقدار راندمان اگرزری این نیروگاه برابر با ۱۳/۱ درصد محاسبه شده است.

جدول ۲ آنالیز زباله محاسبه شده در نیروگاه زباله‌سوز آزادکوه

ردیف	متغیر	واحد اندازه‌گیری	محاسباتی
۱	درصد جرمی کربن	درصد جرمی	۲۷/۱۴
۲	درصد جرمی اکسیژن	درصد جرمی	۳۳/۲۹
۳	درصد جرمی هیدروژن	درصد جرمی	۳/۱۶
۴	درصد جرمی رطوبت	درصد جرمی	۱۵/۴۱
۵	درصد جرمی سولفور	درصد جرمی	۰/۳
۶	درصد جرمی خاکستر	درصد جرمی	۲۰/۲۱
۷	دبی جرمی زباله	کیلوگرم بر ثانیه	۰/۴۷۸۷
۸	دبی جرمی هوا	کیلوگرم بر ثانیه	۴۲۹۱/۴

با استفاده از اعداد دبی، دما، فشار و روابط ارائه شده در این مقاله اگرزری فیزیکی، شیمیایی و در نتیجه اگرزری هر جریان در جدول (۵) آورده شده است. با استفاده از اعداد محاسبه شده در جدول (۵) و روابط موجود برای عوامل تلفات و تخریب

جدول ۴ داده‌های دمایی و فشاری جریان‌های سیال موجود در نیروگاه زباله‌سوز آرادکوه

شماره جریان	نوع جریان	دما	فشار	دبی
۲	شیرابه زباله	۲۵/۰۰	۱۰۰/۰	۰/۰۲۰۰
۳	زباله	۲۵/۰۰	۱۰۰/۰	۰/۴۷۸۷
۴	خاکستر زباله	۴۰۵/۲۰	۱۰۰/۰	۰/۱۲۰۵
۵	گاز سنتز	-	۱۰۰/۰	-
۶	هوا	۲۵/۰۰	۱۰۰/۰	-
۷	هوا	۲۵/۰۰	۱۰۰/۰	-
۸	دود	۹۷۷/۴۵	۱۰۰/۰	۲/۹۴۱۰
۱۱	دود	۲۰۴/۶۵	۱۰۰/۰	۲/۹۴۱۰
۲۱	بخار	۴۳۵/۸۵	۲۲۸۶/۸	۰/۹۵۳۴
۲۲	بخار	۴۲/۰۰	۱۰/۷	۰/۸۶۵۴
۲۳	بخار	۱۸۶/۸	۱۱۹/۶	۰/۰۷۶۷
۲۴	بخار	۴۷/۲۲	۱۰/۷	۰/۸۶۵۴
۲۵	بخار	۴۷/۲۶	۳۴۰/۵	۰/۸۶۵۴
۲۶	بخار	۱۰۳/۹	۱۱۶/۱	۰/۹۵۹۲
۲۷	بخار	۱۰۴/۳	۲۵۹۷/۰	۰/۹۵۲۹
۴۶	هوا	۲۵/۰۰	۱۰۰/۰	۳/۱۳۹۰
۴۷	هوا	۳۹/۰۰	۱۰۰/۰	۳/۱۳۹۰

جدول ۵ اگزرژی فیزیکی، شیمیایی و جریانی جریان‌های جرمی موجود در نیروگاه زباله‌سوز آرادکوه

شماره جریان	نوع جریان	اگزرژی فیزیکی (کیلوژول بر کیلوگرم)	اگزرژی شیمیایی (کیلوژول بر کیلوگرم)	اگزرژی جریان (کیلووات)
۲	شیرابه	۰/۰۰۰	۴۹/۹۵۸	۰/۹۹۹
۳	زباله	۰/۰۰۰	۹۲۳۷/۳۸۶	۴۶۰۶/۲۳۰
۴	خاکستر	۱۰۸/۰۸۱	۱۴۶۰/۰۰۷	۱۸۸/۹۲۳
۵	گاز سنتز	-	-	-
۶	هوا	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۷	هوا	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۸	دود	۶۴۳/۵۳۹	۷۱/۶۱۳	۲۱۰۳/۳۷۵
۱۱	دود	۲۳۵/۲۵۰	۷۱/۶۱۳	۹۰۲/۴۸۹
۲۱	بخار	۱۱۸۷/۸۱۴	۹۵۰۰/۰۰۰	۱۶۳۵/۲۹۳
۲۲	بخار	۱۳۰/۱۵۶	۹۵۰۰/۰۰۰	۶۱۵/۴۲۰
۲۳	بخار	۵۵۸/۵۴۵	۹۵۰۰/۰۰۰	۵۴۵/۶۲۴
۲۴	بخار	۳/۲۰۹	۹۵۰۰/۰۰۰	۵۰۵/۵۶۰
۲۵	بخار	۳/۵۵۰	۹۵۰۰/۰۰۰	۵۰۵/۸۵۶
۲۶	بخار	۳۷/۳۷۲	۹۵۰۰/۰۰۰	۵۳۸/۶۳۱
۲۷	بخار	۴۰/۱۶۳	۹۵۰۰/۰۰۰	۵۴۱/۳۰۷
۴۶	هوا	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۴۷	هوا	۰/۳۲۹	۰/۰۰۰	۴۵/۸۳۵

#### ۴- اعتبارسنجی

به دلیل نوین بودن مطالعه حاضر، اعتبارسنجی آن متفاوت از روش‌های معمول و با مقایسه راندمان انرژی محاسبه شده از روش مستقیم با مقدار محاسبه شده روش معکوس صورت پذیرفته است. رابطه (۳۰) محاسبه راندمان به روش مستقیم را نشان می‌دهد. جدول (۷) مقدار توان تولیدی نیروگاه، راندمان محاسبه شده از روش مستقیم را در زمان آزمایش نشان می‌دهد.

$$\psi_D = \left( \frac{\dot{W}}{\dot{m}_f e_f h} \right) \times 100 \quad (30)$$

جدول ۷ محاسبه راندمان به روش مستقیم

مقدار برق تولیدی (کیلووات)	پارامتر
۶۲۰	تست ۱
۵۹۰	تست ۲
۶۵۰	تست ۳
۶۰۰	تست ۴
۵۵۰	تست ۵

میانگین راندمان برق تولیدی نیروگاه، مقدار ۶۰۲ کیلووات محاسبه شده است. با استفاده از رابطه (۳۰) مقدار راندمان ۱۳/۰۷ درصد قابل محاسبه است. مقدار خطای نسبی در محاسبه راندمان قابل قبول و برابر با ۰/۲۳ درصد است.

#### ۶- حساسیت‌سنجی پارامترها

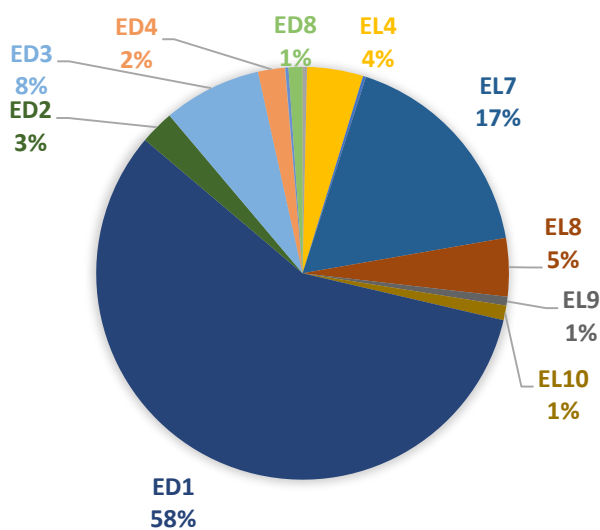
در این قسمت تاثیر پارامترهای آنالیز شیمیایی زباله بر راندمان نیروگاه مورد بررسی قرار گرفته است.

جدول ۸ آنالیز زباله محاسبه شده از روش معکوس

عنصر آنالیز شیمیایی	درصد خطا اولیه	درصد خطای محاسباتی در راندمان انرژی
کربن	۵±	۱۲/۰۱
هیدروژن	۵±	۶/۵۶
اکسیژن	۵±	۵/۵۵
رطوبت	۵±	۵/۴۲
گوگرد	۵±	۴/۷۳
خاکستر	۵±	۴/۷۷

جدول ۶ ترم‌های تلفات و تخریب انرژی نیروگاه زباله‌سوز آرادکوه

نماد	تعریف	مقدار (کیلووات)
EL <sub>1</sub>	تلفات انرژی فیزیکی شیرابه زباله	۰/۰۰۰۰
EL <sub>2</sub>	تلفات انرژی شیمیایی شیرابه زباله	۰/۹۹۹۲
EL <sub>3</sub>	تلفات انرژی فیزیکی خاکستر خروجی راکتور	۱۳/۰۲۱۶
EL <sub>4</sub>	تلفات انرژی شیمیایی خاکستر خروجی راکتور	۱۷۵/۹۰۱۶
EL <sub>5</sub>	تلفات انرژی تشعشعی از دیواره‌ها	۹/۰۹۵۳
EL <sub>6</sub>	تلفات انرژی همرفت از دیواره‌ها	۰/۲۶۲۶
EL <sub>7</sub>	تلفات انرژی فیزیکی دود خروجی	۶۹۱/۸۷۴۵
EL <sub>8</sub>	تلفات انرژی شیمیایی دود خروجی	۱۸۲/۹۱۳۹
EL <sub>9</sub>	تلفات انرژی ناشی از واکنش احتراق ناقص	۲۷/۷۰۰۳
EL <sub>10</sub>	تلفات انرژی در کندانسور	۴۵/۸۳۴۹
ED <sub>1</sub>	تخریب انرژی راکتور گازی‌ساز و محفظه احتراق	۲۳۰۳/۶۷۴۶
ED <sub>2</sub>	تخریب انرژی در بویلر بازیاب حرارت	۱۰۶/۸۰۱۵
ED <sub>3</sub>	تخریب انرژی توربین بخار	۳۰۷/۷۳۲۴
ED <sub>4</sub>	تخریب انرژی کندانسور	۸۴/۱۲۵۱
ED <sub>5</sub>	تخریب انرژی پمپ ۱	۰/۸۷۲۳
ED <sub>6</sub>	تخریب انرژی پمپ ۲	۰/۲۰۹۳
ED <sub>7</sub>	تخریب انرژی دی‌اریتور	۱۰/۰۶۵۳
ED <sub>8</sub>	تخریب انرژی ژنراتور	۴۳/۸۰۰۰



شکل ۳ ترم‌های تلفات و تخریب انرژی نیروگاه آرادکوه

اگرزری در گازی‌ساز و تلفات اگرزری فیزیکی دود خروجی را کاهش داده و باعث افزایش راندمان اگرزری نیروگاه گردد. تجزیه و تحلیل جامع اگرزری انجام شده در این مطالعه، با مشخص نمودن تمامی عوامل تخریب و اتلاف اگرزری با دقت بسیار بالا، کمک قابل توجهی در شناسایی فرصت‌های بهبود سیستم ارائه می‌دهد. در ادامه توجه به این نکته ضروری است نتایج درست و با دقت بالا به کمک روش حل معکوس بدست آمده است.

#### ۸- تشکر و قدردانی

نویسندگان این مقاله از آقای مهندس ابولقاسمی و شرکت تی‌تی‌اس جهت انجام هر چه بهتر این مطالعه تشکر و قدردانی می‌نمایند.

#### ۹- فهرست علائم و اختصارات

##### علائم انگلیسی

A	مساحت ( $m^2$ )
$c_p$	ظرفیت گرمایی ویژه ( $kJ/kg.k$ )
e	جریان اگرزری مولی ( $kJ/kg.kmol$ )
E	جریان اگرزری ( $kJ/kg$ )
$\dot{E}D$	تخریب اگرزری ( $kJ/s$ )
$\dot{E}L$	تلفات اگرزری ( $kJ/s$ )
LHV	ارزش حرارتی پایین سوخت ( $kJ/kg$ )
$\dot{m}$	دبی جرمی ( $kg/s$ )
MW	جرم مولی ( $kg/kmol$ )
q	شار حرارتی ( $W/m^2$ )
T	دما ( $K$ )
v	سرعت ( $m/s$ )
$\dot{W}$	کار ( $kJ/s$ )

##### علائم یونانی

$\psi$	راندمان اگرزری
زیرنویس‌ها	
c	انتقال حرارت همرفت
ch	شیمیایی
D	روش محاسبه راندمان مستقیم
f	سوخت
I	روش تلفات محاسبه راندمان
ph	فیزیکی
r	انتقال حرارتی تشعشی
w	باد

#### ۱۰- مراجع

[1] Y. Chen, M. Guo, Y. Liu, D. Wang, Z. Zhuang, and M. Quan, "Energy, exergy, and economic analysis of

به منظور حساسیت‌سنجی برای هر پارامتر مقدار خطای ۵ درصد در نظر گرفته شد و خطای محاسباتی در مقدار راندمان مورد محاسبه قرار گرفت که نتایج در جدول (۸) نشان داده شده است. همانطور که از مقادیر این جدول مشخص است، بیشترین حساسیت محاسبه راندمان نیروگاه مربوط به ترکیب درصد جرمی کربن در زباله خواهد بود.

#### ۷- نتیجه‌گیری

در این مطالعه رویکرد نوآورانه بر اساس روش حل معکوس برای تجزیه و تحلیل دقیق اگرزری یک نیروگاه زباله‌سوز ارائه گردیده است. استفاده از روش معکوس برای محاسبه آنالیز شیمیایی زباله و ارائه تمامی عوامل تخریب و تلفات اگرزری یک نیروگاه زباله‌سوز، این مطالعه را از مطالعات قبلی در این زمینه متمایز می‌سازد. نوآوری‌های موجود برای این مطالعه عبارت‌اند از:

- محاسبه دقیق اگرزری سوخت زباله مصرفی نیروگاه زباله‌سوز با استفاده از روش معکوس، که باعث تفاوت این مطالعه با مقادیر میانگین استفاده شده در مطالعات دیگر در تجزیه و تحلیل زباله می‌شود.
- شناسایی تمامی منابع مختلف ناکارآمدی، از جمله تخریب و اتلاف اگرزری به همراه تأثیر آنها بر کل سیستم که به شناسایی روش‌های افزایش راندمان نیروگاه منجر خواهد گشت.

به عنوان تفسیر فیزیکی نتایج می‌توان به مقادیر عددی عوامل تخریب و تلفات اگرزری توجه شود. بیشترین مقدار تخریب و تلفات اگرزری در راکتور گازی‌ساز و محفظه احتراق رخ داده است. در این فرآیند عمل گازی‌سازی و احتراق گاز حاصل رخ داده است که از بالاترین درجه تخریب اگرزری در روش‌های تخریب اگرزری است. در این نیروگاه حدود ۵۸ درصد از اگرزری وارد شده به عنوان سوخت به نیروگاه در حال اتلاف در این بخش بوده است. برای افزایش راندمان در این نیروگاه می‌توان نوع راکتور گازی‌ساز را تغییر و از راکتوری با تخریب اگرزری کمتر استفاده کرد. از راه‌های افزایش راندمان در نیروگاه موجود می‌توان پیش‌گرمایش سوخت ورودی را نیز پیشنهاد داد. همچنین پیش‌گرمایش هوای تاز ورودی می‌تواند روش مناسب برای کاهش این مقدار بالای تخریب اگرزری باشد. در رده بعدی تلفات اگرزری توسط اگرزری فیزیکی دود خروجی خواهد بود. این مقدار ۱۷ درصد از اگرزری ورودی را می‌توان با قرار دادن یک مبدل حرارتی پیش‌گرمکن هوا با دود به مقدار پایین‌تر کاهش داد. این مبدل توانایی کاهش هر دو عامل تخریب

- [10] R. Karamarkovic and V. Karamarkovic, "Energy and exergy analysis of biomass gasification at different temperatures," *Energy*, vol. 35, no. 2, pp. 537-549, 2010, doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2009.10.022>.
- [11] C. Bang-Møller, M. Rokni, and B. Elmegaard, "Exergy analysis and optimization of a biomass gasification, solid oxide fuel cell and micro gas turbine hybrid system," *Energy*, vol. 36, no. 8, pp. 4740-4752, 2011, doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2011.05.005>.
- [12] P. Vanaei, B. Jalili, M. Hosseinzadeh, and P. Jalili, "Efficiency Optimization Thermal Analysis and Power Output of a Modified Incinerator Plant Using Organic Rankine Cycle," *International Journal of Engineering*, vol. 36, no. 7, pp. 1300-1309, 2023, doi: <https://doi.org/10.5829/IJE.2023.36.07A.11>.
- [13] P. Vanaei, B. Jalili, M. Hosseinzadeh, and P. Jalili, "4E analysis of a municipal incinerator power plant with an ORC and optimization," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 45, no. 10, p. 544, 2023, doi: <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04430-4>.
- [14] T. Solheimslid, H. K. Harneshaug, and N. Lømmen, "Calculation of first-law and second-law-efficiency of a Norwegian combined heat and power facility driven by municipal waste incineration—A case study," *Energy conversion and management*, vol. 95, pp. 149-159, 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2015.02.026>.
- [15] S. Azami, M. Taheri, O. Pourali, and F. Torabi, "Energy and exergy analyses of a mass-fired boiler for a proposed waste-to-energy power plant in Tehran," *Applied Thermal Engineering*, vol. 140, pp. 520-530, 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2018.05.045>.
- [16] M. L. Hejrandoost, F. Fazelpour, and A. Saraei, "A new method to overcome difficulties of measurements for energy and exergy auditing of municipal solid Waste-to-Energy plants," *Energy Conversion and Management*, vol. 255, p. 115275, 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.115275>.
- [17] A. Farsi, I. Dincer, and G. F. Naterer, "Second law analysis of CuCl<sub>2</sub> hydrolysis reaction in the Cu-Cl thermochemical cycle of hydrogen production," *Energy*, vol. 202, p. 117721, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.117721>.
- [18] I. Dincer and M. A. Rosen, *Exergy: energy, environment and sustainable development*. Newnes, 2012.
- a centralized solar and biogas hybrid heating system for rural areas," *Energy Conversion and Management*, vol. 276, p. 116591, 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.116591>.
- [2] A. Xu *et al.*, "Exergy, economic, exergoeconomic and environmental (4E) analyses and multi-objective optimization of a PEMFC system for coalbed methane recovery," *Energy Conversion and Management*, vol. 297, p. 117734, 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2023.117734>.
- [3] H. Athari, S. Soltani, A. Bölükbaşı, M. A. Rosen, and T. Morosuk, "Comparative exergoeconomic analyses of the integration of biomass gasification and a gas turbine power plant with and without fogging inlet cooling," *Renewable energy*, vol. 76, pp. 394-400, 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2014.11.064>.
- [4] H. Baehr, "The exergy method of thermal plant analysis: By TJ Kotas; published by Butterworths, London, Boston, Durban, Singapore, Sydney, Toronto, Wellington, 1985; price£ 45.00; ISBN 408-01350-8," ed: Elsevier, 1987.
- [5] A. Bejan, G. Tsatsaronis, and M. J. Moran, *Thermal Design and Optimization* (Wiley-Interscience publication). Wiley, ISBN: 978-0-471-58467-4 1995, <https://www.wiley.com/en-us/Thermal+Design+and+Optimization-p-9780471584674>.
- [6] S. Soltani, S. Mahmoudi, M. Yari, and M. Rosen, "Thermodynamic analyses of an externally fired gas turbine combined cycle integrated with a biomass gasification plant," *Energy Conversion and Management*, vol. 70, pp. 107-115, 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2013.03.002>.
- [7] T. Maneerung, X. Li, C. Li, Y. Dai, and C.-H. Wang, "Integrated downdraft gasification with power generation system and gasification bottom ash reutilization for clean waste-to-energy and resource recovery system," *Journal of cleaner production*, vol. 188, pp. 69-79, 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.03.287>.
- [8] M. Mehrpooya, M. Khalili, and M. M. M. Sharifzadeh, "Model development and energy and exergy analysis of the biomass gasification process (Based on the various biomass sources)," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 91, pp. 869-887, 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2018.04.076>.
- [9] L. F. Pellegrini and S. de Oliveira Jr, "Exergy analysis of sugarcane bagasse gasification," *Energy*, vol. 32, no. 4, pp. 314-327, 2007, doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2006.07.028>.

- vol. 144, no. 6, p. 062101, 2022, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4051760>.
- [25] Y. A. Cengel, M. A. Boles, and M. Kanoğlu, *Thermodynamics: an engineering approach*. McGraw-hill New York, 2011, [https://archive.org/details/thermodynamicsen0000ceng\\_ed03/mode/2up](https://archive.org/details/thermodynamicsen0000ceng_ed03/mode/2up).
- [26] A. Bejan, G. Tsatsaronis, and M. J. Moran, *Thermal design and optimization*. John Wiley & Sons, 1995, <https://archive.org/details/thermaldesignopt0000bejan/page/n1/mode/2up>.
- [27] A. Sohrabi, A. Behbahaninia, S. Sayadi, and M. Banifateme, "Advanced exergy-based audit of heat recovery steam generators: a case study," *Journal of Energy Resources Technology*, vol. 144, no. 1, p. 012106, 2022, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4052467>.
- [28] J. Zueco, D. López-Asensio, F. Fernández, and L. M. López-González, "Exergy analysis of a steam-turbine power plant using thermocombustion," *Applied Thermal Engineering*, vol. 180, p. 115812, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2020.115812>.
- [29] Y. Zhang, X. Wei, and X. Qin, "Experimental study on energy, exergy, and exergoeconomic analyses of a novel compression/ejector transcritical CO<sub>2</sub> heat pump system with dual heat sources," *Energy Conversion and Management*, vol. 271, p. 116343, 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.116343>.
- [19] B. Ma *et al.*, "Exergy loss analysis on diesel methanol dual fuel engine under different operating parameters," *Applied Energy*, vol. 261, p. 114483, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2019.114483>.
- [20] S. Piazza, F. Patuzzi, and M. Baratieri, "Energy and exergy analysis of different biomass gasification coupled to Fischer-Tropsch synthesis configurations," *Energy*, vol. 249, p. 123642, 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2022.123642>.
- [21] M. Banifateme, A. Behbahaninia, and G. Pignatta, "Estimating the chemical composition of municipal solid waste using the inverse method," *Journal of Cleaner Production*, vol. 393, p. 136156, 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2023.136156>.
- [22] S. Naderi, M. Banifateme, O. Pourali, A. Behbahaninia, I. MacGill, and G. Pignatta, "Accurate capacity factor calculation of waste-to-energy pow plants based on availability analysis and design/off-design performance," *Journal of cleaner production*, vol. 275, p. 123167, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.123167>.
- [23] M. Banifateme, A. Behbahaninia, and S. Sayadi, "Development of a loss method for energy and exergy audit of condensing hot water boilers," *Journal of Energy Resources Technology*, vol. 143, no. 5, p. 052104, 2021, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4049415>.
- [24] A. Behbahaninia, M. Banifateme, M. H. Azmayesh, S. Naderi, and G. Pignatta, "Markov and monte carlo simulation of waste-to-energy power plants considering variable fuel analysis and failure rates," *Journal of Energy Resources Technology*,

## بررسی پایداری دینامیکی تیر اولر - برنولی مدرج تابعی و مقطع متغیر با روش ریتز

**چکیده:** در مقاله حاضر، پایداری دینامیکی تیر اولر - برنولی مدرج تابعی با مقطع متغیر تحت بار محوری دینامیکی بررسی می شود. مقطع متغیر به صورت تابع نمایی و مصالح از نوع مدرج تابعی ترکیبی از آلومینیوم و اکسید زیرکونیوم فرض می شود. در گام اول، معادله دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش همیلتون استخراج می گردد. در گام بعدی، شکل ضعیف معادله محاسبه گردیده و از سری چبیشف به عنوان تابع تغییر مکان عرضی و از تابع بولوتین به عنوان سری زمانی استفاده می گردد. سپس ماتریس های سفتی مصالح، هندسی و جرم استخراج می گردد. در نهایت، مقادیر ضریب بار دینامیکی به ازای فرکانس های تحریک مختلف ریشه یابی می شوند. افزایش ضریب تغییرات سطح و ممان اینرسی، ضریب بار استاتیکی بی بعد و توان ماده تابعی سبب کاهش سفتی تیر گردیده و باعث انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد به سمت فرکانس های کوچک تر می شود. تمامی نمودارهای ارائه شده در این مقاله بی بعد است و می تواند ملاک طراحی مهندسان برای طراحی تیرهای مدرج تابعی تحت بار محوری دینامیکی قرار گیرد.

**واژه های راهنما:** پایداری دینامیکی، مواد مدرج تابعی، پایداری مقاطع متغیر، اصل همیلتون، تحلیل مقدار ویژه

امیرحسین طاهرخانی

کارشناسی ارشد

**مجید امین افشار\***

استادیار،

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه

بین المللی امام خمینی (ره)،

قزوین

مقاله علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۲۱

بازنگری: ۱۴۰۳/۰۱/۰۵

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۲۵

Amir Hossein  
Taherkhani  
M.Sc.

Majid  
Amin Afshar\*  
Assistant professor,  
Department of Technology  
and Engineering,  
Imam Khomeini  
International University,  
Qazvin

## Analysis of the dynamic stability of a functional graded Euler-Bernoulli beam and variable cross-section using the Ritz method

**Abstract:** In this article, the dynamic stability of a functionally graded Euler-Bernoulli beam with a variable cross-section under dynamic axial load is investigated. The variable cross-section is assumed to be an exponential function and the material is a combination of aluminum and subconium oxide. In the first step, the governing differential equation is derived using Hamilton's method. In the next step, the weak form of the equation is calculated and the Chebyshev series is used as the transverse displacement function and the Bolotin method is used as the time series. Then, the material, geometric, and mass hardness matrices are extracted. Finally, the values of the dynamic load factor are determined for different excitation frequencies. The increase in the coefficient of changes in the level and moment of inertia, the dimensionless static load coefficient and the power of the functional material causes the stiffness of the beam to decrease and causes the changes in the dimensionless dynamic load coefficient to be transferred to smaller frequencies.

**Keywords:** Dynamic stability, Functionally graded materials, Stability of variable sections, Hamilton's principle, Eigenvalue analysis

## ۱- مقدمه

بررسی تغییر شکل‌های بزرگ تیرهای منحنی عمیق مدرج تابعی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی پرداخت [۱۱]. حسینی و رحمانی به بررسی ارتعاش نانو تیرهای تیموشینکو عمیق منحنی شکل مدرج تابعی با استفاده از روش ناویر پرداختند [۱۲]. شفیع و همکاران به مطالعه ارتعاش غیرخطی میکرو تیرهای مخروطی درجه‌بندی‌شده از نظر عملکردی محوری پرداختند. میکرو تیر باتوجه‌به تئوری تیر اولر - برنولی و نظریه تنش زوج اصلاح شده با غیرخطی بودن هندسی فون کارمان مدل‌سازی شده است [۱۳]. پائول و داس رفتار پس از کمانش تیر تیموشینکو از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری حرارتی را مطالعه کردند [۱۴]. قدیری و همکاران به بررسی اثرات سطحی بر رفتار ارتعاشی یک نانو تیر دوار غیرمحللی با مصالح مدرج تابعی پرداختند [۱۵]. آکباس به بررسی ارتعاشات اجباری تیرهای عمیق متخلخل مدرج تابعی پرداخت [۱۶]. سلطانی و عسگریان به بررسی کمانشی ستون‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر پرداخت. در این تحقیق، به‌منظور بررسی رفتار پایداری و ارتعاش آزاد اعضاء، معادله حرکت حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای ماهیچه‌ای با مقطع متغیر با استفاده از ترکیب بسط مک لورن و روش سری‌های توانی حل شده است. نتایج بیانگر این است که با افزایش توان ماده تابعی، مقدار ضریب بارکمانشی و پایداری عضو به علت افزایش ضریب ارتجاعی سیستم افزایش می‌یابد. اما چون فرکانس ارتعاشی به صورت همزمان به هر دو پارامتر جرم و ضریب یانگ وابسته است قابل پیش بینی نیست [۱۷]. رضایی پزند و همکارانش با استفاده از روش ریتز به مطالعه رفتار کمانش جانبی - پیچشی تیر ماهیچه‌ای دوسر مفصلی با مقطع متقارن از جنس مواد تابعی دوطرفه که دارای مهار جانبی کافی در طول خود است، پرداختند [۱۸]. ابراهیمی و براتی به مطالعه کمانش نانو تیرهای غیرمحللی ساخته شده از مواد مدرج تابعی محوری بر روی محیط الاستیک متغیر پرداختند [۱۹]. جلایی و همکاران به بررسی پایداری دینامیکی صفحه گرافنی با اثر میرایی بر روی بستر ویسکوپاسترناک پرداختند [۲۰]. ژو و چانگ ارتعاشات و پایداری تیرهای رایلی چرخان متحرک محوری را مطالعه کردند. مشخص گردید که با افزایش اینرسی دورانی تیر، پایداری سیستم کاهش می‌یابد [۲۱]. چن و همکاران به مطالعه ارتعاشات غیرخطی و رفتار پسا کمانش میکرو تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی دوبعدی پرداختند [۲۲]. کائو و همکاران ارتعاشات آزاد تیر اولر - برنولی مدرج تابعی با مقطع متغیر را بررسی کردند. ایشان از روش ترکیبی اغتشاش<sup>۱</sup> و تابع

مواد تابعی مدرج در ابتدا در سال ۱۹۸۴ توسط گروهی از دانشمندان در دانشگاه سندانی ژاپن مطرح گردید. مواد تابعی مدرج مواد مرکب شامل دو یا چند نوع ماده هستند که خواص آنها به‌صورت تابعی تغییر کرده و به‌صورت درجه‌بندی کنار هم قرار می‌گیرند. مواد تابعی مدرج معمولاً از دوفاز فلزی و سرامیکی ترکیب شده با هم ساخته می‌شوند به‌طوری‌که خواص مواد از یک‌طرف به‌طرف دیگر آنها به‌صورت کاملاً یکنواخت تغییر می‌کند. در سال‌های اخیر استفاده از مواد تابعی مدرج در هواپیما، فضاپیما، اتومبیل، کاربردهای دفاعی در پوشش‌های زره‌ای، پزشکی و سنسورها کاربرد زیادی پیدا کرده است. از طرفی یک عضو با مقطع متغیر نسبت به عضو منشوری که دارای سطح مقطع بزرگ‌تری است، از توان باربری بیشتری برخوردار است. در نتیجه با ترکیب ویژگی مواد مدرج تابعی و اعضای با مقطع متغیر می‌توان ظرفیت باربری تیر را به طور قابل‌ملاحظه‌ای افزایش داد [۱]، [۲]. نخستین بار تیموشنکو [۳]، ونگ [۴]، بازانت [۵] به مطالعه ظرفیت بارکمانشی ستون‌های الاستیک بر مبنای روش‌های حل بسته معادله دیفرانسیل حاکم یا تقریبی عددی پرداختند. بولوتین نخستین بار به بررسی کمانش دینامیکی سیستم‌های مکانیکی پرداخت. ایشان با معرفی یک بارگذاری دینامیکی مشخص برای سیستم دینامیکی بر مبنای روش‌های تحلیلی به مطالعه پایداری دینامیکی سیستم پرداخت [۶]. دربندی و همکاران یک راه‌حل تحلیلی برای کمانش ستون‌های با سطح مقطع متغیر تحت بارهای متمرکز و گسترده ارائه کردند [۷]. انصاری و همکاران با استفاده از تئوری ارینگن پایداری دینامیکی نانولوله کربن تک‌جداره را بررسی کردند. مشخص گردید که دامنه ناحیه ناپایداری برای مدل غیر موضعی تیر تیموشنکو بزرگ‌تر از مدل غیر موضعی تیر اوپلر برنولی است [۸]. قنادپور و همکاران، به مطالعه کمانش و ارتعاشات تیر اولر - برنولی غیرمحللی به روش ریتز پرداختند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر غیرمحللی ارینگن مقدار ضریب بار کمانشی کاهش و در فرکانس طبیعی بی‌بعد بسته به شرایط مرزی تکیه‌گاهی افزایش یا کاهش می‌یابد [۹]. حسینی هاشمی و ناظم نژاد به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی سطح مؤثر نانو تیر مدرج تابعی پرداختند. مشخص گردید که افزایش ابعاد نانو تیر مدرج تابعی مانند نسبت طول یا ضخامت و اثرات سطح مؤثر باعث کاهش فرکانس نرمال طبیعی می‌شود [۱۰]. کورتاران به

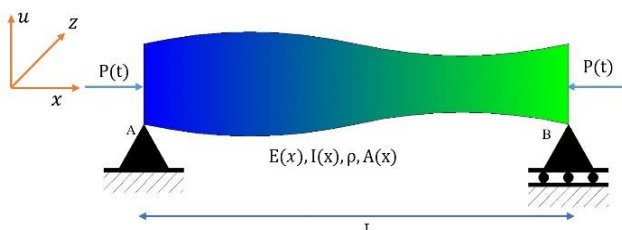
<sup>۱</sup> Perturbation

برای مقاطع جدار نازک باز و با اعمال اثرات محل اتصال بستر الاستیک و خروج از مرکزیت بار فشاری در معادلات بررسی کردند [۲۹]. ابراهیمی و همکاران پایداری حرارتی مکانیکی لوله‌های ریلی لغزان ساخته شده از مواد مدرج تابعی محوری را بررسی کردند [۳۰].

در پژوهش‌های پیشین عموماً فرکانس‌های طبیعی، پایداری استاتیکی، پایداری دینامیکی تاریخچه‌ی زمانی در تیرهای تیموشنکو مدرج تابعی بررسی شده است. در مقاله‌ی مذکور، با رویکرد جدید و با بهره‌مندی از تحقیقات گذشته، پایداری دینامیکی تیر اولر-برنولی مدرج تابعی بر مبنای تئوری بولوتین بررسی می‌شود. روش بولوتین روشی مبتنی بر تحلیل فرکانسی است و در این روش با استفاده از پاسخ سری زمانی مرزهای نواحی پایداری و ناپایداری دینامیکی بررسی می‌شود. برای محاسبه ماتریس‌های سفتی از روش نیمه تحلیلی ریتز با چند جمله‌ای چبیشف بهره گرفته می‌شود. روش فوق سرعت همگرایی بالایی دارد و برنامه نویسی و استخراج ماتریس به وسیله کدنویسی در نرم افزار متلب<sup>۳</sup> با سرعت بالاتر امکان پذیر است. برای مدل‌سازی مصالح مدرج تابعی نیز از الگوی اختلاط خطی کسر حجمی استفاده می‌شود. در تحقیقات پیشین، اثر تغییرات ممان اینرسی بر طبق توابع توانی لحاظ شده است. در این مقاله تغییرات ممان اینرسی و سطح مقطع بر مبنای توابع نمایی معادل می‌شود.

## ۲- مدل سازی و تعریف مسئله

مطابق شکل (۱) تیری با مقطع متغیر و مصالح مدرج تابعی با مشخصات گشتاور دوم سطح  $I(x)$ ، ضریب ارتجاعی  $E(x)$ ، جرم واحد طول  $\rho(x)A(x)$ ، طول  $L$ ، سطح مقطع  $A(x)$  و جرم مخصوص  $\rho(x)$  در نظر گرفته می‌شود. بار محوری متناوب  $P$  به صورت مجموع بارمحوری هارمونیک و استاتیکی نوشته می‌شود.



شکل ۱ تیری با مقطع متغیر و مصالح مدرج تابعی تحت بارمحوری متناوب

جی<sup>۱</sup> برای حل معادله دیفرانسیل استفاده کردند [۲۳]. علی مرادزاده و همکاران به مطالعه پایداری دینامیکی تیر مدرج تابعی بر بستر غیرخطی تحت بار متحرک پرداختند. در این پژوهش به طور همزمان اثر بسترخطی، برشی و غیرخطی در معادله دیفرانسیل مدل سازی شده است. محققین، تاثیر همزمان توان ماده تابعی، ضریب بستر خطی-برشی-غیرخطی و سرعت بار متحرک بر بیشینه‌ی تغییر مکان سازه را با استفاده تحلیل تاریخچه‌ی زمانی بررسی کرده اند [۲۴]. اسیری و همکاران به بررسی پایداری دینامیکی تیرهای ویسکوالاستیک ضخیم مدرج تابعی تحت بار پالس دینامیکی برای شرایط مرزی (کنسول، دوسر ساده) پرداختند. در این مطالعه رفتار تیر ویسکوالاستیک مطابق مدل کلوین - وویت<sup>۲</sup> و توزیع ضریب ارتجاعی و وزن مخصوص تیر بر مبنای تابع اختلاط خطی کسر حجمی نوشته شده است. در این پژوهش، از روش تحلیل تاریخچه‌ی زمانی (روش نیومارک) برای حل معادله استفاده شده است. نتایج بیانگر این است که افزایش توان ماده ی تابعی و ضریب ویسکوزیته بی‌بعد باعث افزایش بیشینه‌ی تغییر مکان سازه می‌شود [۲۵]. شارما و همکاران به تجزیه و تحلیل مودال یک تیر مدرج تابعی با عملکرد محوری تحت اثر تغییرات دمایی پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که افزایش توان ماده تابعی و درجه حرارت باعث کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر می‌شود. هم چنین اثر پارامترهای توان ماده تابعی و درجه حرارت به ازاء شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای حالت های مودی مختلف پرداخت شده است. نتایج این تحقیق برای طراحی حسگرهای محیط کابردی است [۲۶]. اکباس به مطالعه ارتعاشات اجباری تیر کنسول تیموشنکو ساخته شده از مواد مدرج تابعی پرداخت. ایشان از روش ریتز برای استخراج ماتریس های سفتی بهره گرفت و از روش شتاب متوسط نیومارک و تحلیل تاریخچه زمانی برای محاسبه حداکثر تغییر مکان تیر استفاده کرده است [۲۷]. آردا و آیدوگو به بررسی ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو - ارنفست مدرج تابعی با روش ریتز پرداختند. اثر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی تیر مقطع مستطیلی با استفاده از مدل تیموشنکو-ارنفتست در نظر گرفته شده است. اثر توان ماده‌ی تابعی در شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی تیر بررسی شده است [۲۸]. سلطانی و آهنیان ارتعاش آزاد و پایداری خمشی-پیچشی تیر جدار نازک ماهیچه‌ای ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار دادند. ایشان پایداری و ارتعاش آزاد را بر پایه مدل ولاسو

<sup>3</sup> MATLAB

<sup>1</sup> G-Function

<sup>2</sup> Kelvin-Voigt

$$A(x) = A_0 e^{\frac{ax}{L}} \quad (5)$$

در رابطه فوق  $a$  ضریب مثبت،  $L$  طول عضو،  $I_0$  و  $A_0$  به ترتیب ممان اینرسی و مساحت مقطع بزرگتر در ابتدای تیر هستند [۲۲].

## ۲-۲- استخراج معادله دیفرانسیل حرکت بر مبنای روش همیلتون<sup>۱</sup>

در این بخش با استفاده از روش همیلتون معادله متشکله مجموعه مورد نظر استخراج می‌گردد. بدین منظور باید اصل همیلتون برای کارهای جنبشی، خارجی و پتانسیل ناشی از (اینرسی در واحد طول ستون، بار کمانش محوری و انرژی کرنشی ستون) نوشته شود.

مطابق تئوری تیر اولر - برنولی، فرضیه‌های ذیل برقرار می‌باشند. الف) سطح مقطع تیر مدرج تابعی بعد از تغییر شکل مسطح باقی می‌ماند. یعنی تیر، دارای یک تغییر مکان در پلان  $x - z$  و یک دوران حول محور  $y$  است.

ب) از اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی در پلان  $x - z$  صرف نظر می‌شود.

ج) زاویه دوران کوچک بوده به گونه‌ای که فرضیه زوایای کوچک صادق است. بدین ترتیب برای تیر اولر - برنولی میدان‌های جابجایی به صورت زیر تعریف می‌گردد [۳۱].

$$\phi(x, z, t) = -z \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (6)$$

$$u(x, z, t) = u(x, t) \quad (7)$$

در رابطه‌ی فوق فرض می‌گردد که محورهای  $x$  و  $z$  به ترتیب در جهت طول و ضخامت هستند و  $z$  نسبت به تار خنثی اندازه گیری می‌شود.  $u$  معرف جابجایی عرضی تیر است. کرنش عرضی بر حسب جابجایی عرضی به صورت رابطه‌ی زیر نوشته می‌شود.

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$\epsilon_{zz}(x, z) = \gamma_{xz}(x, z) = 0 \quad (9)$$

در رابطه (۸)  $\epsilon_{xx}$  بیانگر کرنش نرمال ایجاد شده در تیر است. با استفاده از اصل حساب تغییرات، تغییر در کار ناشی از انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شود.

## ۲-۱- توزیع ضریب ارتجاعی، جرم واحد طول و مقطع متغیر در مواد مدرج تابعی

در این تحقیق یک تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. تیر مذکور ترکیبی از فلز و سرامیک است. خواص مواد در جهت طولی عضو به طور پیوسته و تدریجی از خواص کاملاً سرامیکی (زیرکونیا) در انتهای چپ به خواص کاملاً فلزی (آلومینیوم) در سمت راست تغییر می‌کند. ضمناً جنس مصالح تیر در راستای ضخامت ثابت فرض می‌شود. فرض بر این است که توزیع خواص مواد از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد پیروی می‌کند و بر اساس تابع توزیع توانی در طول تغییر می‌کند. هم چنین ضریب پواسون به علت تغییرات ناچیز در مواد مهندسی ثابت در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین توزیع خواص ماده مدرج تابعی شامل ضریب ارتجاعی و جرم واحد حجم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$E(x) = E_Z + (E_A - E_Z) \left(\frac{x}{L}\right)^m \quad (1)$$

$$\rho(x) = \rho_Z + (\rho_A - \rho_Z) \left(\frac{x}{L}\right)^m \quad (2)$$

$m$  عددی مثبت و حقیقی است که شاخص ناهمگنی ماده نام دارد. ضریب مذکور، چگونگی ترکیب کسر حجمی سرامیک و آلومینیوم را در امتداد طول عضو مشخص می‌کند. با افزایش مقدار شاخص مذکور، میزان سرامیک در ترکیب افزایش پیدا می‌کند. توصیه شده است که مقدار آن در بازه  $\frac{1}{3} \leq m \leq 3$  در نظر گرفته شود. زیر نویس های  $A$  و  $Z$  به ترتیب به خواص فلز و سرامیک اشاره می‌کند و مقدار مرتبط با ضریب ارتجاعی و چگالی هر یک به صورت زیر است [۱۷].

$$\text{ZrO}_2 \cdot E_Z = 200 \text{Gpa} \cdot \rho_Z = 5700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (3)$$

$$\text{Al} \cdot E_A = 70 \text{Gpa} \cdot \rho_A = 2702 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

ممان اینرسی مقطع و مساحت مقطع ماده، تابعی در جهت طولی هستند و با فرض آن که این خواص به صورت تابع‌نمایی تغییر کنند، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$I(x) = I_0 e^{\frac{ax}{L}} \quad (4)$$

<sup>1</sup> Hamilton

با اعمال عملگر تغییرات و انتگرال گیری جزء به جزء، تغییر در کار ناشی از بار کمانش محوری به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\delta V = - \int_0^{t_f} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_0^L dt + \int_0^L \left[ \int_0^{t_f} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u dt \right] dx \quad (16)$$

در رابطه (۱۶)،  $P_s$  و  $P_d$  و  $\Omega$  به ترتیب معرف متغیر ضریب بار دینامیکی، ضریب بار استاتیکی و فرکانس تحریک است. با استفاده از حساب تغییرات و اصل بقای انرژی و اعمال شرایط مرزی طبیعی و زمانی، روابط زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \delta \pi &= \delta T - \delta U - \delta V \\ &= - \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \delta u dx dt \\ &+ \int_0^L \rho(x)A(x) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \right]_0^{t_f} dx \\ &- \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \delta u - E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right\}_0^L dt \\ &+ \int_0^{t_f} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_0^L dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین معادله (۱۷) شامل دو بخش است. در بخش اول معادله دیفرانسیل حاکم بر عضو و در بخش دوم شرایط مرزی مسئله استخراج شده است. شرایط مسئله باتوجه به نوع آن (گیردار - آزاد - مفصلی) در تابع شکل اعمال می‌شود. معادله دیفرانسیل طبق رابطه زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

معادلات شرایط مرزی هندسی و زمانی در روابط (۱۲)، (۱۴) و (۱۶) با توجه به شرایط انتهایی تیر ارضاء می‌شوند؛ به طور مثال

$$\delta U = \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L \int_0^A \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} dA dx \right] dt \quad (10)$$

که  $t_f$  زمان نهایی است. روابط تنش- کرنش مطابق قانون هوک به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \quad (11)$$

با جایگذاری معادلات (۸) و (۱۱) در رابطه‌ی (۱۰) و انتگرال-گیری جزء به جزء، انرژی کرنشی تیر به صورت رابطه‌ی (۱۲) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta U &= - \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right] dt \\ &= \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \delta u - E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right\}_0^L dt \\ &- \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \delta u dx \right] dt \end{aligned} \quad (12)$$

کار جنبشی ناشی از اینرسی در طول واحد ستون به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$T = \int_0^L \left[ \int_0^{t_f} \frac{1}{2} \rho(x)A(x) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx \quad (13)$$

با اعمال عملگر تغییرات و انتگرال گیری جزء به جزء، تغییر در انرژی جنبشی به صورت رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_0^L \rho(x)A(x) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \right]_0^{t_f} dx \\ &- \int_0^L \left[ \int_0^{t_f} \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dt \right] dx \end{aligned} \quad (14)$$

کار ناشی از نیروی خارجی بار کمانش محوری به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L \frac{1}{2} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] dt \end{aligned} \quad (15)$$

در بخش قبل معادله حاکم بر مجموعه (۸) ارائه شد. در این بخش با استفاده از روش نیمه تحلیلی ریتز معادله مذکور بررسی می‌شود. بدین منظور لازم است که ابتدا شکل ضعیف معادله تشکیل شود. در گام بعدی، از سری‌های چندجمله‌ای چبیشف برای استخراج ماتریس‌های عضو استفاده می‌گردند.

### ۲-۵- شکل ضعیف‌شده معادله متشکله

در پژوهش حاضر از روش ریتز برای حل معادله متشکله استفاده می‌شود. در این روش، تابع باقیمانده  $R(x, t)$  در تابع وزنی  $v(x, t)$  ضرب شده و از حاصل آن انتگرال گیری می‌شود. پاسخ به صورت معادله نمایش داده می‌شود. در این رابطه تابع وزن  $v(x, t)$  است که باید نسبت به  $x$  حداقل دوبار مشتق پذیر باشد.

$$\int_0^L v(x, t) R(x, t) dx$$

$$R(x, t) = E(x)I(x) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} T(t) + \rho(x)A(x)w(x) \left( \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \right) + P_{cr}(\eta + \mu \cos(\Omega t)) \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) T(t) \quad (24)$$

معادله (۲۴) دو بار انتگرال گیری جز به جز گردیده تا دو مرتبه مشتق گیری با تابع وزن  $v(x)$  مبادله گردد و دو مرتبه مشتق گیری روی متغیر وابسته  $w(x)$  باقی بماند. در نهایت شکل ضعیف معادله به شکل رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\Psi = \int_0^L [E(x)I(x) \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right) T(t) - P_{cr} \left( \eta + \mu \cos(\Omega t) \right) \left( \frac{dv}{dx} \right) \left( \frac{dw}{dx} \right) T(t) + \rho(x)A(x)w(x)v(x) \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right)] dx = 0 \quad (25)$$

رابطه (۲۵) شکل ضعیف رابطه (۲۴) را نشان می‌دهد.

برای حل معادله (۲۵) باید معادله تغییر مکان عرضی را حدس زد به طوری که شرایط مرزی را ارضا کند. در مقاله حاضر از سری های چندجمله‌ای چبیشف به عنوان تابع تغییر مکان عرضی استفاده می‌شود.

$$w(x) = f(x) \sum_{j=1}^n C_j A_{j-1}(x) \quad (26)$$

با دو تکیه‌گاه ساده انتهایی (شکل ۱) طبق روابط زیر برای شرایط مرزی و زمانی حاصل شده‌اند:

$$M(x=0) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = 0$$

$$M(x=L) = \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} \quad (19)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = u(x, 0) = u(x, t_f) = 0$$

### ۲-۳- معادله دیفرانسیل تیر با مقطع متغیر و مصالح مدرج تابعی

معادله دیفرانسیل تیر موردنظر با اثر انرژی کرنشی، جرم در واحد طول و بارمحوری دینامیکی بر مبنای روش همیلتون به صورت زیر بیان می‌شود.  $u(x, t)$  برابر با خیز جانبی تیر موردنظر است.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \rho(x)A(x) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (20)$$

رابطه  $P = P_s + P_d \cos(\Omega t)$  به صورت زیر بیان می‌شود.

$$P = \eta + \mu \cos(\Omega t) \quad (21)$$

در رابطه فوق  $\eta = \frac{P_s}{P_{cr}}$  و  $\mu = \frac{P_d}{P_{cr}}$  است.

$\eta$  و  $\mu$  و  $P_d$  و  $P_s$  و  $P_{cr}$  به ترتیب معرف متغیر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد، ضریب بار استاتیکی بی‌بعد، ضریب بار دینامیکی، ضریب بار استاتیکی و ظرفیت بار کمانشی است.

$$u(x, t) = w(x) \times T(t) \quad (22)$$

پارامتر خیز جانبی  $u(x, t)$  تیر مطابق اصل جداسازی متغیرها، به صورت ضرب  $w(x)$  (پارامتر تابع شکل) در  $T(t)$  (پارامتر تابع زمانی) در نظر گرفته می‌شود.

با جایگذاری معادله‌های (۲۱) و (۲۲) در معادله (۲۰)، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$E(x)I(x) \frac{d^4 w}{dx^4} T(t) + \rho(x)A(x)w(x) \left( \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \right) + P_{cr}(\eta + \mu \cos(\Omega t)) \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right) T(t) = 0 \quad (23)$$

### ۲-۴- حل معادله با روش ریتز

با جای گذاری رابطه (۳۱) در رابطه (۲۵)، در نهایت معادله هدف به صورت رابطه (۳۲) نوشته می شود. از معادله بولوتین به عنوان تابع پیشنهادی برای بررسی پایداری دینامیکی تیر استفاده می شود. در رابطه زیر  $\Omega$  معرف فرکانس تحریک و  $a_k$  و  $b_k$  ضرایب بسط هستند [۶].

$$T(t) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} [a_k \sin\left(\frac{k\Omega t}{2}\right) + b_k \cos\left(\frac{k\Omega t}{2}\right)] \quad (32)$$

رابطه (۳۳) در معادله (۳۲) جای گذاری می شود و در نهایت رابطه مورد نظر به صورت زیر بیان می شود [۲۵].

$$([K_S] - P_{cr} \left(\eta \pm \frac{\mu}{2}\right) [K_G] - \frac{\Omega^2}{4} [M]) \{c\} = 0 \quad (33)$$

رابطه (۳۴)، رابطه مورد نظر برای محاسبه مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد است. رابطه مذکور از نوع مقدار ویژه است. برای حل لازم است از روش های ریشه یابی نیمه تحلیلی استفاده شود.

$$\left| [K_S] - P_{cr} \left(\eta \pm \frac{\mu}{2}\right) [K_G] - \frac{\Omega^2}{4} [M] \right| = 0 \quad (34)$$

چنانچه در رابطه (۳۵) اثر ضریب بار دینامیکی  $\mu$  صفر منظور گردد. رابطه مورد نظر برای محاسبه بار کمانشی استاتیکی تیر به دست می آید.

$$|K_S - P_{cr} K_G| = 0 \quad (35)$$

چنانچه در رابطه (۳۲) به جای تابع پیشنهادی بولوتین از معادله (۳۷) بعنوان پاسخ هارمونیک تیر استفاده شود. معادله (۳۸)، رابطه بدست آمده برای محاسبه فرکانس طبیعی تیر می باشد.

$$T(t) = e^{i\omega t} \quad (36)$$

$$|K_S - \omega^2 M| = 0 \quad (37)$$

برای ساده سازی روابط از بی بعد سازی متغیرها استفاده می شود.  $\bar{\Omega}$  و  $\bar{P}_{cr}$  و  $\bar{\omega}$  به ترتیب معرف فرکانس تحریک بی بعد، ضریب بار کمانشی بی بعد و فرکانس طبیعی بی بعد هستند.

$$\bar{\Omega} = \Omega \sqrt{\frac{\rho_Z A_0 L^4}{E_Z I_0}} \cdot \bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} L^2}{E_Z I_0} \quad (38)$$

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho_Z A_0 L^4}{E_Z I_0}} \quad (39)$$

$$f(x) = \prod_{m=1}^{n_1} (x_m - x)^{n_2}$$

در این رابطه  $C_j$  ماتریس بردار ویژه،  $n$  تعداد جملات سری،  $n_1$  تعداد تکیه گاه ها در طول تیر،  $x_m$  فاصله ی تکیه گاه  $m$  ام از ابتدای تیر و  $n_2$  پارامتری وابسته به نوع تکیه گاه است.  $n_2$  برای تکیه گاه ساده  $n_2 = 1$ ، تکیه گاه گیردار  $n_2 = 2$  و برای تکیه گاه آزاد  $n_2 = 0$  است [۱۴].

$$A_0(x) = L \quad (40)$$

$$A_1(x) = x$$

$$A_{j+1} = 2xA_j(x) - A_{j-1}(x) \quad (41)$$

رابطه (۲۸)، رابطه ای بازگشتی بر حسب  $x$  است. جملات بالاتر بر حسب جملات قبلی محاسبه می شوند.

تابع وزن  $v(x)$  نیز برابر تابع تغییر مکان عرضی در نظر گرفته می شود.

$$v(x) = \prod_{m=1}^{n_1} (x_m - x)^{n_2} \sum_{j=1}^n C_j A_{j-1}(x) \quad (42)$$

روش ریتز به صورت رابطه زیر بیان می شود.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c_j} = 0 \quad (43)$$

با جای گذاری روابط (۲۶ و ۲۹) در رابطه (۲۵) و با استفاده از ویژگی روش ریتز (۳۰)، در نهایت ماتریس های سفتی به صورت رابطه زیر نوشته می شوند.

$$K_{ij(S)} = \int_0^L E(x) I(x) \left(\frac{d^2 v_i}{dx^2}\right) \left(\frac{d^2 w_j}{dx^2}\right) dx$$

$$K_{ij(G)} = \int_0^L \left(\frac{dv_i}{dx}\right) \left(\frac{dw_j}{dx}\right) dx \quad (44)$$

$$M_{ij} = \int_0^L (\rho(x) A(x)) v_i w_j dx$$

در رابطه (۳۱)  $K_{ij(S)}$  و  $K_{ij(G)}$  و  $M_{ij}$  به ترتیب معرف ماتریس سفتی مصالح، ماتریس سفتی هندسی و ماتریس جرم تیر می باشد.

$$[M] \ddot{T}(t) + ([K_S] - (\eta + \mu \cos(\Omega t)) P_{cr} [K_G]) T(t) = 0 \quad (45)$$

۳- نتایج و بحث

جدول ۱ مشخصات تیر

L = 1000 mm	طول تیر
b = 200 mm	عرض مقطع
h = 100 mm	ارتفاع مقطع
$A_0 = 2 * 10^4 \text{ mm}^2$	مساحت ابتدایی مقطع
$I_0 = 16.667 * 10^{-6} \text{ mm}^4$	ممان اینرسی ابتدایی مقطع
$\eta = \frac{1}{2}$	ضریب بار استاتیکی بی بعد

رابطه (۳۵) رابطه موردنظر برای محاسبه مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد  $\mu$  است. رابطه فوق یک معادله با مقادیر ویژه است. برای حل این معادله لازم مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد به ازای مقادیر مختلف فرکانس تحریک ریشه یابی شود. بدین منظور از روش ریشه یابی مولر برای حل استفاده می شود. برای دقت در ریشه یابی تأثیر مقادیر فرکانس تحریک بی بعد بر معادله متشکله با گام ۰/۰۱ بررسی می شود.

۳-۱- صحت سنجی نتایج

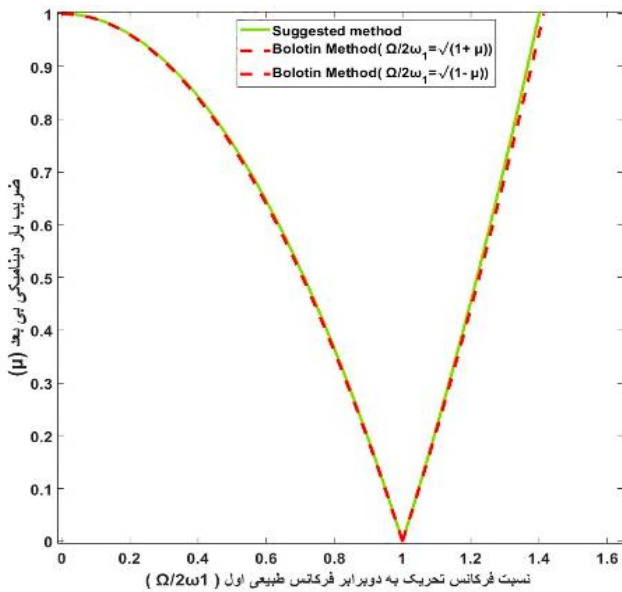
نخست برای صحت سنجی نتایج حاصل از این پژوهش، به مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با مدل های ارائه شده توسط محققین پرداخته می شود. همان طور که بیان شد، در بخشی کتاب از وانگ [۴] پایداری تیرهای الاستیک غیر منشوری بررسی شده است. ایشان با حل تحلیلی معادله دیفرانسیل متشکله، پاسخ دقیقی برای محاسبه بارکمانشی ارائه کرده اند. محاسبه پارامترهای بارکمانشی بی بعد استاتیکی به عنوان فصل مشترک مقاله حاضر و تحقیقات نامبرده تلقی می شود. بدین منظور، از نتایج این تحقیق برای صحت سنجی مقاله حاضر استفاده می شود.

همان طور که اشاره گردید از روش ریتز برای محاسبه تابع شکل معادله استفاده می شود. جهت همگرایی پاسخ ها، معادله تا جملات دهم بررسی می شود. تمامی مراحل فوق به وسیله کدنویسی در نرم افزار متلب انجام می شود. در گام اول، مقدار بارکمانشی استاتیکی محاسبه می گردد. به این صورت که باید ضریب  $\mu$  برابر صفر لحاظ شود و بارکمانشی  $P_{cr}$  مطابق رابطه (۳۵) محاسبه شود. بر مبنای بار کمانشی، مقادیر ضریب بار دینامیکی بی بعد  $\mu$  به ازای فرکانس های تحریک مختلف ریشه یابی می شود.

مشخصات مکانیکی تیر به صورت جدول (۱) فرض می شود. در ادامه با لحاظ مشخصات مکانیکی مذکور برای تیر، تأثیر مقطع متغیر با مصالح مدرج تابعی بر ضریب بار دینامیکی بی بعد بررسی می شود.

جدول ۲ مقادیر بارکمانشی بی بعد و فرکانس طبیعی بی بعد برای تیری با مقطع متغیر تحت شرایط مرزی مختلف

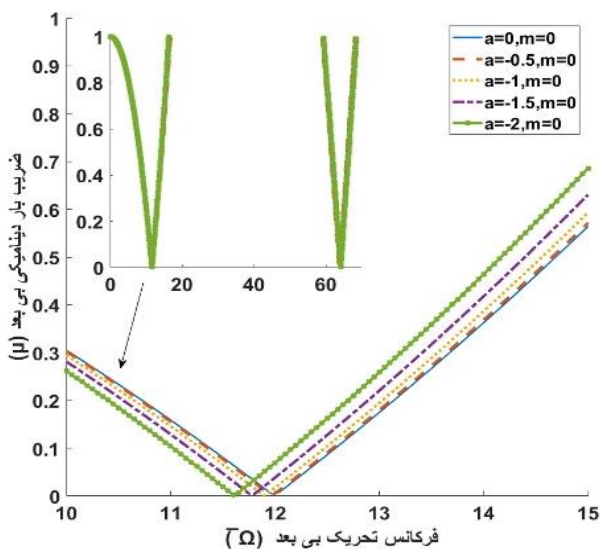
نتایج جدید			سلطانی [۱۷]	نتایج جدید			وانگ، وانگ [۴]	$\alpha$ (ضریب تغییرات سطح مقطع)	شرایط مرزی
$\omega$			$\omega$	$\overline{P}_{cr}$			$\overline{P}_{cr}$		
n=۱۰	n=۵	n=۳	$\omega$	n=۱۰	n=۵	n=۳	$\overline{P}_{cr}$		
۹/۸۴۵	۹/۸۴۵	۹/۸۵۷	۹/۸۴۵	۷/۶۴۳	۷/۶۳۵	۷/۶۷۲	۷/۶۳۴	-۰/۵	
۹/۷۷۳	۹/۷۷۳	۹/۸۱۰	۹/۷۷۳	۵/۸۲۷	۵/۸۲۷	۵/۹۲۸	۵/۸۲۷	-۱	دو سر ساده
۹/۶۵۳	۹/۶۵۳	۹/۷۲۸	۹/۶۵۳	۴/۳۸۹	۴/۳۸۹	۴/۵۴۶	۴/۳۸۹	-۱/۵	
۹/۸۷۰	۹/۸۷۰	۹/۸۷۲	۹/۸۷۰	۹/۸۷۰	۹/۸۷۵	۱۲/۰۰۰	۹/۸۷۰	.	
				۲/۱۱۰	۲/۱۱۲	۲/۱۱۲	۲/۱۱۰	-۰/۵	
				۱/۷۸۲	۱/۷۸۲	۱/۷۸۴	۱/۷۸۲	-۱	گیردار - آزاد
				۱/۴۸۰	۱/۴۸۰	۱/۴۸۷	۱/۴۸۰	-۱/۵	
				۱۵/۶۴۰	۱۵/۶۴۰	۱۵/۶۵۶	۱۵/۶۴۰	-۰/۵	
				۱۱/۹۹۰	۱۱/۹۸۹	۱۲/۰۱۳	۱۱/۹۹۰	-۱	گیردار - ساده
				۹/۰۹۸	۹/۰۹۸	۹/۱۹۷	۹/۰۹۸	-۱/۵	
.	.	۰/۷۷	-	.	۰/۰۹	۱/۰۸	-	-	$\Delta_{max} \%$



شکل ۲ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب نسبت فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی مود اول بی بعد

### ۳-۲- تأثیر مصالح مدرج تابعی $m$ و مقطع متغیر $a$ بر ضریب بار دینامیکی بی بعد $\mu$

در این بخش، تأثیر هم‌زمان مصالح مدرج تابعی و مقطع متغیر بر ضریب بار دینامیکی بی بعد تیری با شرایط مرزی مختلف (گیردار - آزاد)، (گیردار - مفصلی)، (مفصلی - مفصلی) بررسی می‌شود. مقدار ضریب بار استاتیکی بی بعد  $\eta$  در تمامی حالت‌های مختلف برابر  $0.5$  مقدار ضریب  $a$  نیز در حالت‌های  $(2, 1/5, 1)$  و  $(0.5)$  و مقدار پارامتر توان ماده تابعی  $m$  نیز در حالت‌های  $(2, 1)$  و  $(0)$  فرض می‌شود.



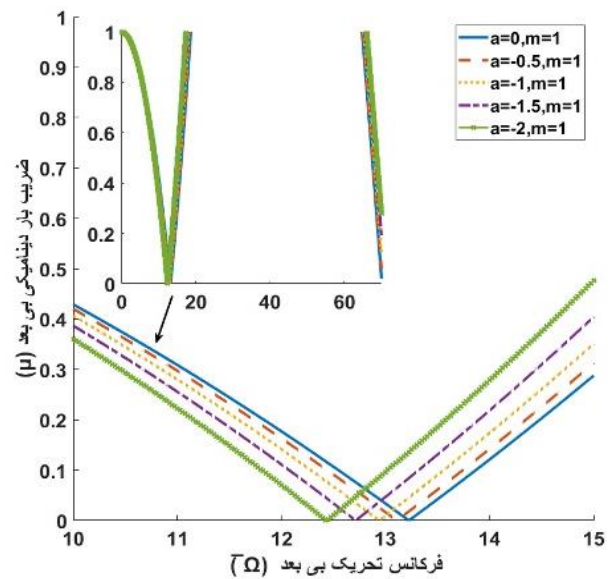
شکل ۳ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب فرکانس تحریک بی بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی دوسر مفصلی،  $m = 0$

مطابق جدول (۲)، مقادیر بار کم‌انرژی بی بعد برای تیری با مقطع متغیر تحت شرایط مرزی مختلف محاسبه می‌شود. برای افزایش دقت در محاسبات، معادله متشکله به‌ازای ۱۰ جمله بررسی می‌شود. با انتخاب جملات مراتب بالاتر مشخص است که مقادیر این پارامتر در مقاله حاضر با مقاله ی پیشین منطبق می‌شود. هم چنین مطابق جدول (۲)، مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد نیز در تیر با مقطع متغیر برای شرایط مرزی دو سر ساده محاسبه می‌شود. مشخص است مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد در روش حاضر و پژوهش سلطانی و عسگریان [۱۷] تطابق قابل قبولی دارد. در بخشی دیگر از صحت سنجی، نتایج تحقیق حاضر با نتایج پژوهش بولوتین [۶] مقایسه می‌شود. همان‌طور که بیان شد. در بخشی از کتاب بولوتین، پایداری دینامیکی تیری منشوری تنها با اثر جرم در واحد طول به روش تحلیلی بررسی شده است. محقق از روش تحلیلی برای حل معادله دیفرانسیل حاکم استفاده کرده است. درحالی‌که در پژوهش حاضر، پایداری دینامیکی تیر غیرمحملی غیر منشوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بار متناوب به روش ریتز بررسی می‌شود. برای صحت سنجی پژوهش حاضر با مدل بولوتین باید اثر مقطع غیر منشوری و مصالح مدرج تابعی نادیده گرفته شود و رفتار دینامیکی تیری منشوری تنها به‌ازای شرایط (مرزی مفصلی-مفصلی) و  $\eta = 0$  (ضریب بار استاتیکی بی بعد) بررسی شود. شکل (۲) نمودار تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد تیری مفصلی-مفصلی را بر حسب نسبت فرکانسی (فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی) بی بعد نمایش می‌دهد. محقق رابطه (۴۰) را برای محاسبه ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب نسبت فرکانسی ارائه کرده است.  $k$ ، پارامتری مربوط به مود فرکانس است.

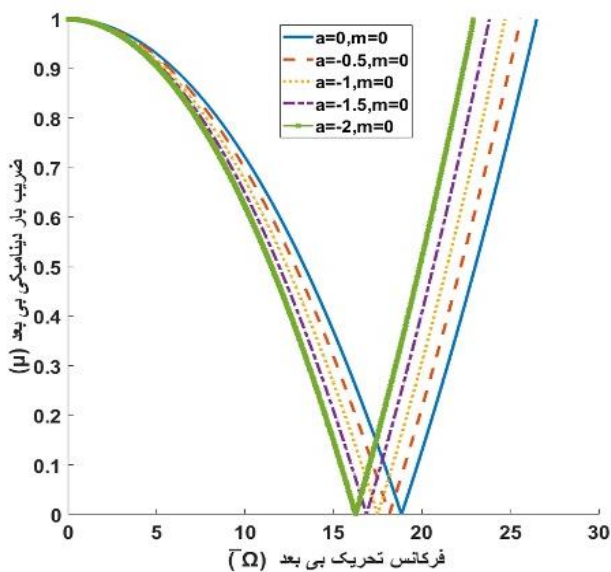
$$\frac{\Omega}{2\omega_k} = \frac{\sqrt{1 \pm \mu}}{k} \quad (40)$$

در شکل (۲) تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب نسبت فرکانسی بی بعد تیری با شرایط مرزی مفصلی - مفصلی تنها با اثر جرم واحد طول ترسیم می‌شود. باتوجه به شکل مشخص می‌شود. اگر مقدار نسبت بی بعد فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی مود اول برابر  $1 = \frac{\Omega}{2\omega_k}$  باشد. در این صورت ضریب پایداری دینامیکی برابر صفر است. این وضعیت که وضعیت تشدید نام دارد. در این حالت، مجموعه دچار وضعیت ناپایداری دینامیکی می‌گردد. در صورتیکه مقدار نسبت فرکانسی بی بعد برای صفر لحاظ گردد. مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد برابر ۱ می‌گردد. شکل (۲) مبین این است که نتایج تحقیق حاضر با نتایج تحقیق پیشین هم خوانی دارد.

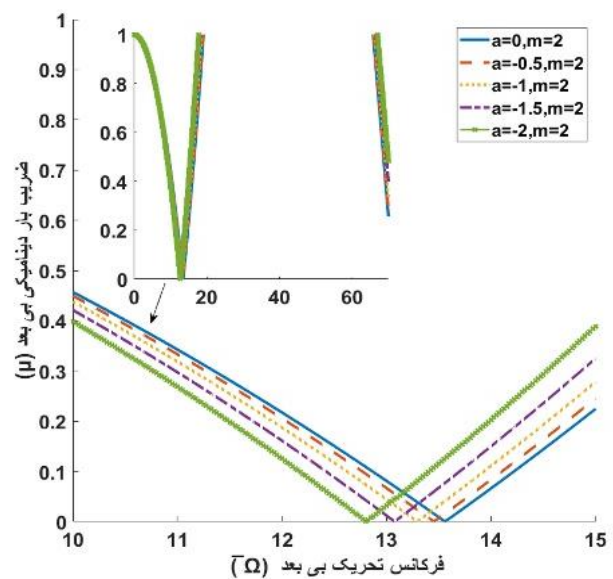
سمت چپ محور منتقل می‌شود. در واقع افزایش پارامتر مذکور منجر به کاهش صلبیت خمشی تیر می‌شود؛ کاهش صلبیت خمشی سبب می‌شود که فرکانس تشدید به‌ازای مقدار کوچک‌تری رخ دهد. از طرفی افزایش پارامتر توان ماده تابعی  $m$  نیز منجر می‌شود که تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به سمت راست محور منتقل شود. در واقع با افزایش پارامتر مذکور، میزان سرامیک (زیرکونیا) در طرح اختلاط ماده‌ی تابعی افزایش می‌شود و این منجر به افزایش سفتی ماده‌ی سازنده می‌شود. به همین دلیل تغییرات ضریب بار دینامیکی با افزایش پارامتر  $m$  به سمت راست متمایل می‌شود.



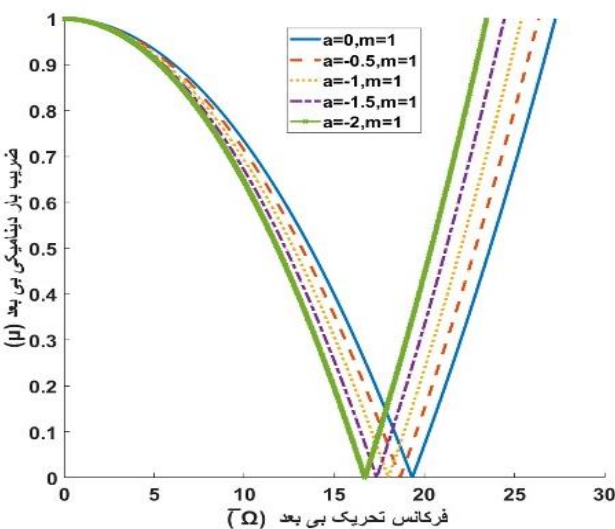
شکل ۴ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی دوسر مفصلی،  $m = 1$



شکل ۶ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - مفصلی،  $m = 0$

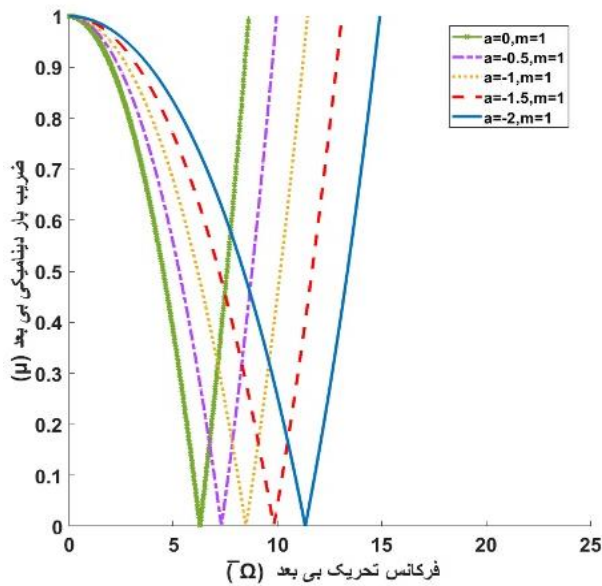


شکل ۵ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی دوسر مفصلی،  $m = 2$

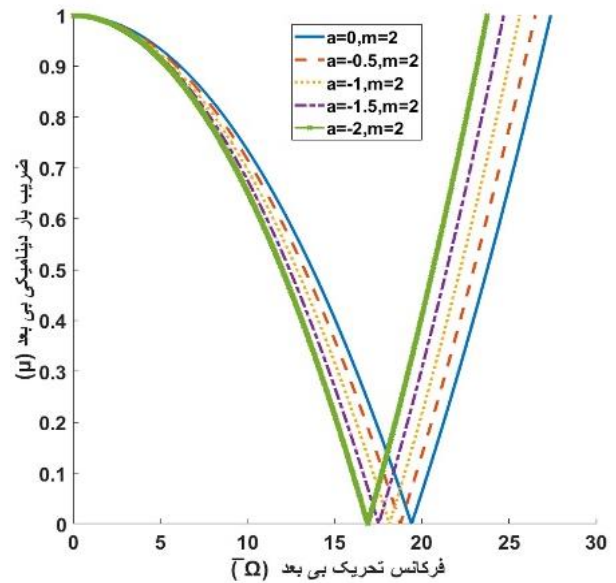


شکل ۷ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - مفصلی،  $m = 1$

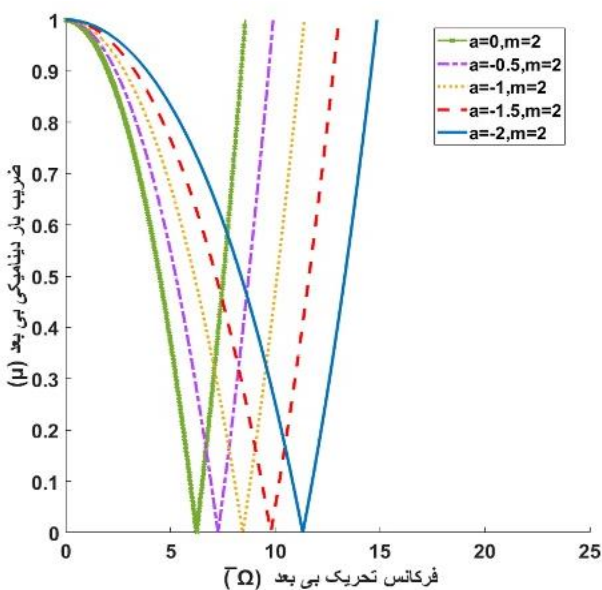
مطابق با شکل‌های (۳)، (۴) و (۵) مشخص است که تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد در تمام حالت‌های مختلف به‌صورت تابع قدرمطلق است. در نقطه خاصی (نقطه تکنینی) مقدار ضریب بار دینامیکی برابر صفر است. این نقطه خاص در بحث پایداری، فرکانس تشدید نام دارد. در واقع تیر تحت باری با مقدار فرکانس تشدید ناپایدار می‌گردد. اگر شرایط مرزی تکیه‌گاهی دو سر مفصلی در نظر گرفته شود. با افزایش ضریب تغییرات سطح مقطع و ممان اینرسی  $a$ ، تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد به



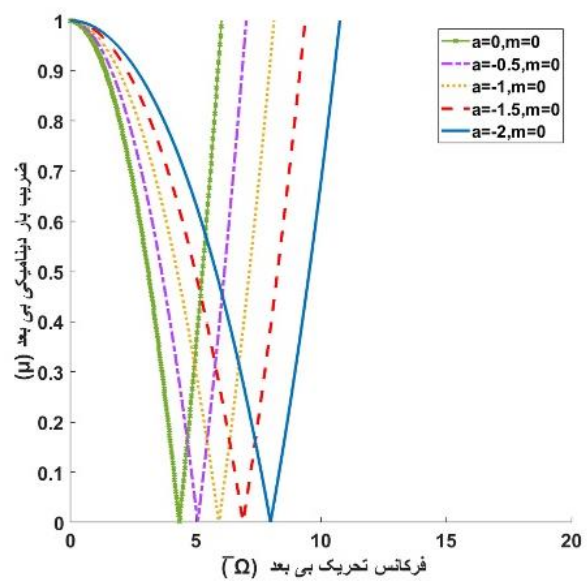
شکل ۱۰ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - آزاد،  $m = 1$



شکل ۸ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - مفصلی،  $m = 2$



شکل ۱۱ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - آزاد،  $m = 2$



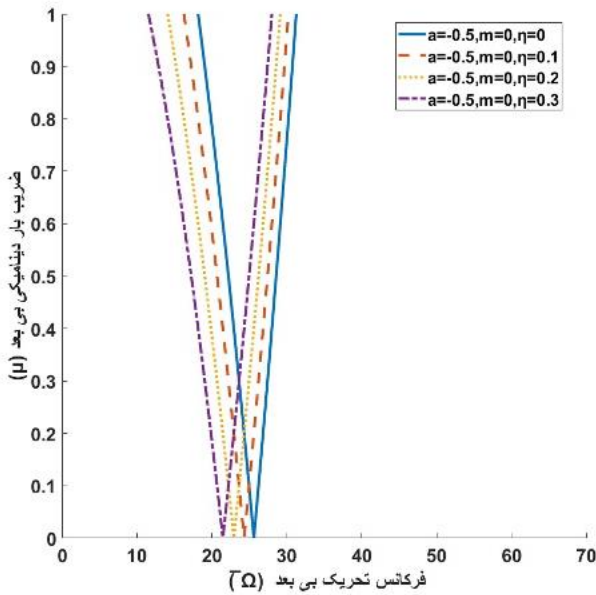
شکل ۹ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - آزاد،  $m = 0$

### ۳-۳- تأثیر ضریب بار استاتیکی بی‌بعد $\eta$ بر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد $\mu$

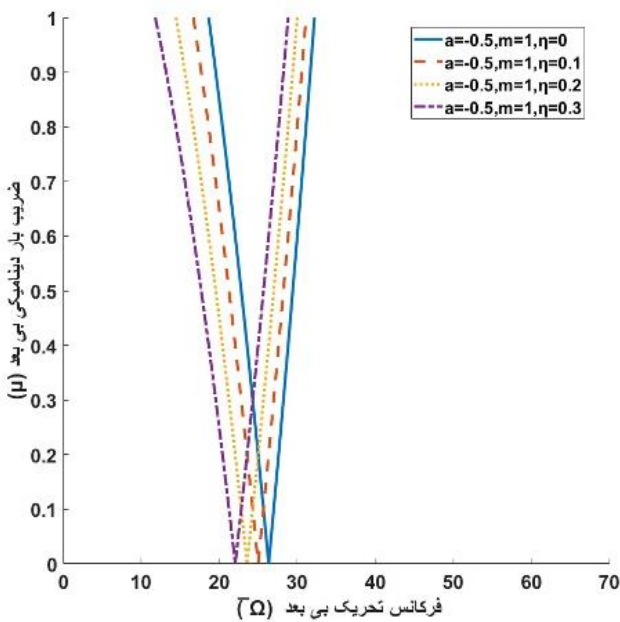
در این بخش، تأثیر ضریب بار استاتیکی بی‌بعد  $\eta$  بر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد تیری با شرایط مرزی مختلف (گیردار-آزاد)، (گیردار-مفصلی)، (مفصلی-مفصلی) بررسی می‌شود. مقدار ضریب بار استاتیکی بی‌بعد در تمامی حالت‌های مورد بررسی

مطابق با شکل‌های (۶)، (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) و (۱۱) مشخص است برای شرایط مرزی گیردار-مفصلی و گیردار-آزاد نیز افزایش پارامتر  $a$  به‌عنوان یک عامل کاهنده صلبیت خمشی محسوب شده و سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد در فرکانس‌های کوچک‌تر می‌شود. افزایش پارامتر  $m$  نیز به‌دلیل افزایش خصوصیات زیرکونیا در طرح اختلاط ماده‌ی تابعی، سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی به سمت راست محور می‌شود.

افزایش ضریب بار استاتیکی بی بعد همانند ضریب  $a$  سبب کاهش سفتی تیر می شود. کاهش سفتی تیر سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد به سمت فرکانس تحریک بی بعد کوچک تری می شود. مطابق حالت قبل، افزایش پارامتر  $m$  نیز منجر می شود که تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد تیر به سمت راست محور منتقل شود. زیرا افزایش پارامتر  $m$  باعث افزایش سفتی تیر می شود.

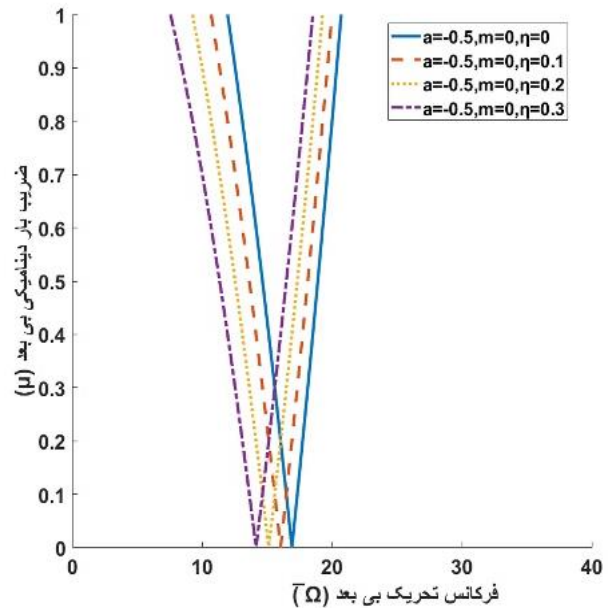


شکل ۱۴ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد برحسب فرکانس تحریک بی بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - مفصلی،  $m = 0$

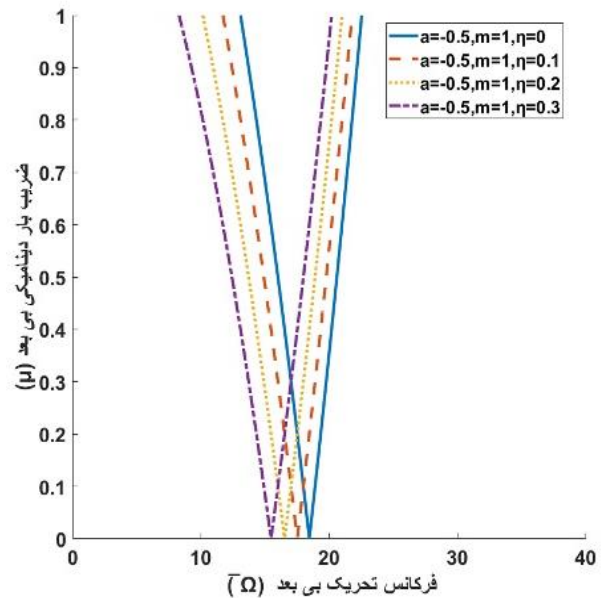


شکل ۱۵ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد برحسب فرکانس تحریک بی بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - مفصلی،  $m = 1$

مقدار  $\eta$  (۰/۳، ۰/۲، ۰/۱ و ۰) مقدار ضریب  $a$  (۰/۵) و مقدار پارامتر  $m$  نیز (۰/۱) فرض می شود.



شکل ۱۲ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد برحسب فرکانس تحریک بی بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی دوسر مفصلی،  $m = 0$



شکل ۱۳ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد برحسب فرکانس تحریک بی بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی دوسر مفصلی،  $m = 1$

مطابق با شکل های (۱۲) و (۱۳) اگر شرایط مرزی تکیه گاهی دو سر مفصلی در نظر گرفته شود، با افزایش ضریب بار استاتیکی بی بعد  $\eta$ ، تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب فرکانس تحریک بی بعد به سمت چپ محور منتقل می شود. در واقع

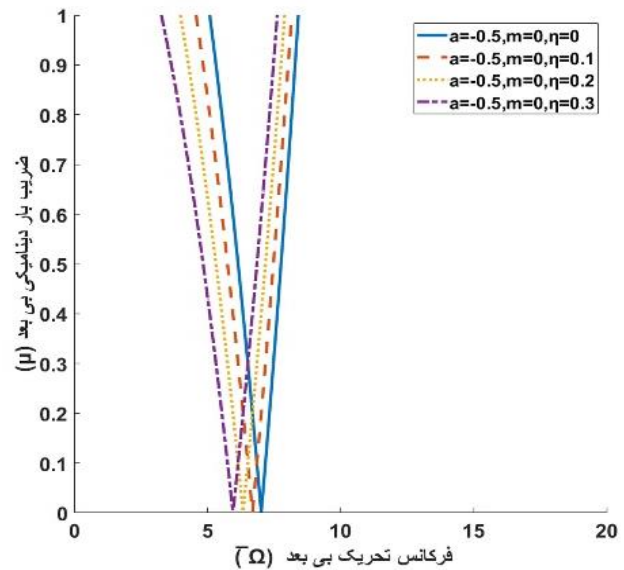
## ۴- نتیجه گیری

در مقاله حاضر بر مبنای روش نیمه تحلیلی ریتز پایداری دینامیکی تیر غیر منشوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بار محوری متناوب بررسی شد. در گام اول، شکل ضعیف معادله دیفرانسیل حاکم نوشته شد. از چند جمله‌های سری چیشیف به عنوان تابع تغییر مکان عرضی و از سری فوریه (پیشنهادی بولوتین) به عنوان تابع زمانی برای حل معادله استفاده گردید. بر این اساس ماتریس‌های سفتی مصالح، سفتی هندسی و ماتریس جرم استخراج گردید. پس از استخراج ماتریس‌های سفتی مقادیر ویژه (ضریب بار دینامیکی بی‌بعد) معادله بررسی شد. از تکنیک ریشه‌یابی مولر به وسیله کدنویسی در نرم‌افزار متلب برای محاسبه مقادیر ویژه استفاده گردید. خلاصه نتایج پژوهش حاضر به شرح ذیل است:

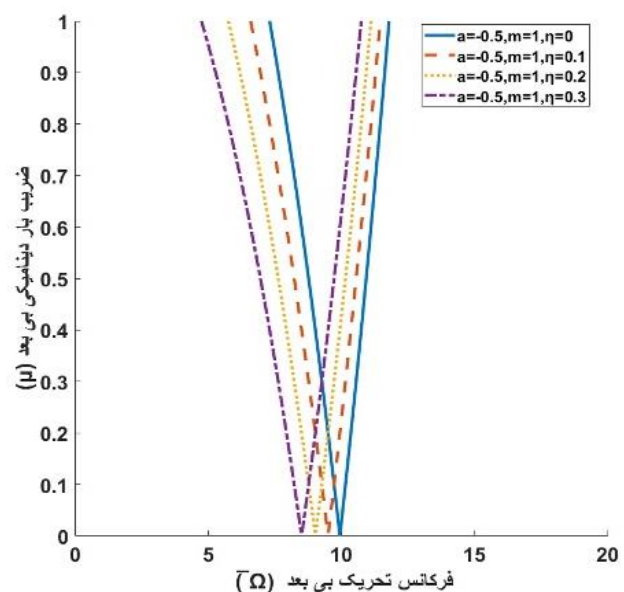
- افزایش ضریب تغییرات سطح مقطع و ممان اینرسی  $a$  در تیر مدرج تابعی با مقطع متغیر نمایی سبب کاهش سفتی تیر می‌شود. کاهش سفتی تیر بر مسیر پایداری دینامیکی اثرگذار بوده و باعث انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به سمت فرکانس‌های کوچک‌تر می‌شود. در واقع به دلیل وجود رابطه‌ی مستقیم بین فرکانس طبیعی و سفتی سازه، با کاهش سفتی سازه فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. از طرفی فرکانس تحریک بی‌بعد به صورت مضربی از فرکانس طبیعی لحاظ می‌گردد. پس کاهش سفتی سازه در نهایت به کاهش فرکانس تحریک بی‌بعد منتج شده و سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی به سمت فرکانس‌های کوچک‌تر می‌شود.

- افزایش پارامتر توان ماده تابعی  $m$  در تیر مدرج تابعی با مقطع نمایی باعث افزایش سفتی تیر می‌شود. بدین صورت که با افزایش پارامتر  $m$  درصد حضور سرامیک (زیرکونیا) در طرح اختلاط ماده‌ی تابعی افزایش می‌یابد و این منجر به افزایش سفتی ماده‌ی سازنده تیر می‌شود. افزایش سفتی سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به سمت فرکانس‌های بزرگ‌تر می‌شود. در واقع به دلیل وجود رابطه‌ی مستقیم بین فرکانس طبیعی و سفتی سازه، با افزایش سفتی سازه فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد. از طرفی فرکانس تحریک بی‌بعد به صورت مضربی از فرکانس طبیعی لحاظ می‌گردد. بنابراین افزایش سفتی سازه در نهایت به افزایش فرکانس تحریک بی‌بعد منتج شده و سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی به سمت فرکانس‌های بزرگ‌تر می‌شود.

- ضریب بار استاتیکی بی‌بعد  $\eta$  به عنوان یک پارامتر اثرگذار بر سفتی تیر است. افزایش این پارامتر به دلیل کاهش سفتی تیر،



شکل ۱۶ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - آزاد،  $m = 0$



شکل ۱۷ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - آزاد،  $m = 1$

مطابق با شکل‌های (۱۴)، (۱۵)، (۱۶)، و (۱۷) اگر شرایط مرزی گیردار-مفصلی یا گیردار-آزاد در نظر گرفته شود. افزایش ضریب استاتیکی بی‌بعد، سبب کاهش سفتی تیر شده و همانند تیر دوسر مفصلی، تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به سمت چپ محور منتقل می‌شود. قابل ذکر است که در شرایط مرزی گیردار-مفصلی در مقایسه با شرایط گیردار-آزاد و دوسر مفصلی سفتی بیشتر دارد. به همین دلیل تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد در بازه بیشتری از فرکانس تحریک بی‌بعد رخ می‌دهد.

- under axial loading," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 136, no. 4, pp. 472-476, 2010, doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000096](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000096).
- [8] R. Ansari, R. Gholami, and S. Sahmani, "On the dynamic stability of embedded single-walled carbon nanotubes including thermal environment effects," *Scientia Iranica*, vol. 19, no. 3, pp. 919-925, 2012/06/01/ 2012, doi: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2012.02.013>.
- [9] S. A. M. Ghannadpour, B. Mohammadi, and J. Fazilati, "Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method," *Composite Structures*, vol. 96, pp. 584-589, 2013/02/01/ 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.024>.
- [10] S. Hosseini-Hashemi and R. Nazemnezhad, "An analytical study on the nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams incorporating surface effects," *Composites Part B: Engineering*, vol. 52, pp. 199-206, 2013/09/01/ 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.04.023>.
- [11] H. Kurtaran, "Large displacement static and transient analysis of functionally graded deep curved beams with generalized differential quadrature method," *Composite Structures*, vol. 131, pp. 821-831, 2015/11/01/ 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.06.024>.
- [12] S. Hosseini and O. Rahmani, "Free vibration of shallow and deep curved FG nanobeam via nonlocal Timoshenko curved beam model," *Applied Physics A*, vol. 122, pp. 1-11, 2016, doi: <https://doi.org/10.1007/s00339-016-9696-4>.
- [13] N. Shafiei, M. Kazemi, and M. Ghadiri, "Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams," *International Journal of Engineering Science*, vol. 102, pp. 12-26, 2016/05/01/ 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.02.007>.
- [14] A. Paul and D. Das, "Non-linear thermal post-buckling analysis of FGM Timoshenko beam under non-uniform temperature rise across thickness," *Engineering Science and Technology, an International Journal*, vol. 19, no. 3, pp. 1608-1625, 2016/09/01/ 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2016.05.014>.
- [15] N. Shafiei, M. Kazemi, and M. Ghadiri, "Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams," *International Journal of Engineering Science*, vol. 102, pp. 12-26, 2016/05/01/ 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.02.007>.
- باعث انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به سمت فرکانس‌های کوچک‌تر می‌شود. در واقع به دلیل وجود رابطه‌ی مستقیم بین فرکانس طبیعی و سفتی سازه با کاهش سفتی سازه فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. از طرفی فرکانس تحریک بی‌بعد به صورت مضربی از فرکانس طبیعی لحاظ می‌گردد. پس کاهش سفتی سازه در نهایت به کاهش فرکانس تحریک بی‌بعد منتج شده و سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی به سمت فرکانس‌های کوچک‌تر می‌شود.
- همه نمودارهای ارائه شده در این مقاله بی‌بعد است و می‌تواند ملاک طراحی مهندسان برای طراحی تیرهای مدرج تابعی تحت بار محوری دینامیکی قرار گیرد.
- ### ۵- مراجع
- [1] B. Kieback, A. Neubrand, and H. Riedel, "Processing techniques for functionally graded materials," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, no. 1, pp. 81-106, 2003/12/05/ 2003, doi: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1).
- [2] Y. Fukui, "Fundamental Investigation of Functionally Gradient Material Manufacturing System using Centrifugal Force," *JSME international journal. Ser. 3, Vibration, control engineering, engineering for industry*, vol. 34, no. 1, pp. 144-148, 1991, doi: <https://doi.org/10.1299/jsmec1988.34.144>.
- [3] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of elastic stability*. Courier Corporation, 2009, [https://books.google.com/books/about/Theory\\_of\\_Elastic\\_Stability.html?id=98B6JOW2HiUC](https://books.google.com/books/about/Theory_of_Elastic_Stability.html?id=98B6JOW2HiUC).
- [4] C. M. Wang and C. Y. Wang, *Exact solutions for buckling of structural members*. CRC press, 2004, <https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.1201/9780203483534/exact-solutions-buckling-structural-members-wang-wang>.
- [5] L. Cedolin, *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific, 2010, <https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/7828>.
- [6] V. V. e. Bolotin, *The Dynamic Stability of Elastic Systems, Volume 1*. Aerospace Corporation, Systems Research and Planning Division, 1962, <https://www.semanticscholar.org/paper/The-Dynamic-Stability-of-Elastic-Systems.-By-V.-V.-Knops-Wilkes/aebec0b495fe1297583c2e598b70912fb6e75184>.
- [7] S. M. Darbandi, R. Firouz-Abadi, and H. Haddadpour, "Buckling of variable section columns

- functionally graded (AFG) beam resting on nonlinear elastic foundation subjected to moving load," *Nonlinear Engineering*, vol. 8, no. 1, pp. 250-260, 2019, doi: <https://doi.org/10.1515/nleng-2018-0051>.
- [25] S. A. Asiri, Ş. D. Akbaş, and M. Eltahir, "Dynamic analysis of layered functionally graded viscoelastic deep beams with different boundary conditions due to a pulse load," *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, no. 05, p. 2050055, 2020, doi: <https://doi.org/10.1142/S1758825120500556>.
- [26] P. Sharma, R. Singh, and M. Hussain, "On modal analysis of axially functionally graded material beam under hygrothermal effect," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 234, no. 5, pp. 1085-1101, 2020, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406219888234>.
- [27] Ş. D. Akbaş, "Forced Vibration Responses of Axially Functionally Graded Beams by using Ritz Method," *Journal of Applied and Computational Mechanics*, vol. 7, no. 1, pp. 109-115, 2021, doi: <https://doi.org/10.22055/jacm.2020.34865.2491>.
- [28] M. Arda and M. Aydogdu, "A Ritz formulation for vibration analysis of axially functionally graded Timoshenko-Ehrenfest beams," *Journal of Computational Applied Mechanics*, vol. 53, no. 1, pp. 102-115, 2022, doi: <https://doi.org/10.22059/jcamech.2022.334062.667>.
- [29] M. Soltani and A. Ahanian, "Free vibration and flexural-torsional stability analyses of axially functionally graded tapered thin-walled beam resting on elastic foundation," *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, vol. 53, no. 6, pp. 3587-3614, 2021, doi: <https://doi.org/10.22060/mej.2021.18445.6816>.
- [30] A. Ebrahimi-Mamaghani, R. Sotudeh-Gharebagh, R. Zarghami, and N. Mostoufi, "Thermo-mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 50, no. 2, pp. 412-441, 2022, doi: <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1717967>.
- [31] C. Wang, Y. Zhang, and X. He, "Vibration of nonlocal Timoshenko beams," *Nanotechnology*, vol. 18, no. 10, p. 105401, 2007, doi: <https://doi.org/10.1088/0957-4484/18/10/105401>.
- [16] Ş. D. Akbaş, "Forced vibration analysis of functionally graded porous deep beams," *Composite Structures*, vol. 186, pp. 293-302, 2018/02/15/ 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.013>.
- [17] M. Soltani, "Buckling analysis of axially functionally graded beams with variable cross-section," *mdrjms*, vol. 18, no. 3, pp. 87-99, 2018. [Online]. Available: <http://mcej.modares.ac.ir/article-16-20306-fa.html>.
- [18] M. Rezaiee-Pajand, A. R. Masoodi, and A. Alepaighambar, "Lateral-torsional buckling of functionally graded tapered I-beams considering lateral bracing," *Steel and Composite Structures, An International Journal*, vol. 28, no. 4, pp. 403-414, 2018, doi: <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2018.28.4.403>.
- [19] F. Ebrahimi and M. R. Barati, "Buckling analysis of nonlocal strain gradient axially functionally graded nanobeams resting on variable elastic medium," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 232, no. 11, pp. 2067-2078, 2018, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406217713518>.
- [20] M. H. Jalaei, A. G. Arani, and H. Tourang, "On the dynamic stability of viscoelastic graphene sheets," *International Journal of Engineering Science*, vol. 132, pp. 16-29, 2018/11/01/ 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.07.002>.
- [21] K. Zhu and J. Chung, "Vibration and stability analysis of a simply-supported Rayleigh beam with spinning and axial motions," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 66, pp. 362-382, 2019/02/01/ 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.09.021>.
- [22] X. Chen, X. Zhang, Y. Lu, and Y. Li, "Static and dynamic analysis of the postbuckling of bi-directional functionally graded material microbeams," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 151, pp. 424-443, 2019/02/01/ 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.001>.
- [23] D. Cao, B. Wang, W. Hu, and Y. Gao, "Free vibration of axially functionally graded beam," *Mechanics of Functionally Graded Materials and Structures*, 2019, doi: <http://10.5772/intechopen.85835>.
- [24] M. Alimradzadeh, M. Salehi, and S. M. Esfarjani, "Nonlinear dynamic response of an axially

## مطالعه عددی مشخصه های توربین بادی داریوس سه پره با پره های کمکی

**چکیده:** انرژی باد نویدبخش انرژی پاک است و منبع کافی و یک روش تولید برق بدون آلودگی است. توربین های بادی داریوس، بعنوان یکی از مبدل های انرژی باد، همواره با چالش هایی از جمله مشکل خود راه اندازی رو برو هستند. در پژوهش حاضر، از روش حجم محدود برای بررسی عملکرد آیرودینامیکی توربین داریوس سه پره مجهز به پره های کمکی استفاده شده است. پره های کمکی تحت چندین زاویه اتصال ( $\psi$ ) روی روتور متعارف داریوس سه پره  $0^\circ$ ،  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$  مورد آزمایش قرار گرفتند. محاسبات برای سه پتانسیل باد ۷، ۱۰ و ۱۴ متر بر ثانیه و نسبت های مختلف سرعت نوک پره (TSR) در محدوده ۰/۵ تا ۲/۵ انجام گرفت. نتایج حاصل برای روتور سه پره متعارف با داده های موجود در ادبیات فن مقایسه شد و توافق منطقی بین آنها بدست آمد. با تجزیه و تحلیل کلی پارامترهای در نظر گرفته شده، مشخص شد که روتور هیبریدی با زاویه اتصال صفر، حداکثر ضریب توان معادل با  $0.2714$ ،  $0.3265$  و  $0.3607$  را به ترتیب در سرعت های جریان آزاد ۷، ۱۰ و ۱۴ متر بر ثانیه در میان کلیه حالت های بررسی شده فراهم می کند.

**واژه های راهنما:** توربین بادی داریوس، پره کمکی، ضریب توان، نسبت سرعت نوک پره (TSR)

میلاد محمدنژاد  
دانشجوی دکتری

رحیم حسنزاده\*

دانشیار،  
دانشکده مهندسی  
مکانیک،  
دانشگاه صنعتی ارومیه،  
ارومیه

مقاله علمی پژوهشی  
دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۲۳  
بازنگری: ۱۴۰۳/۰۲/۱۱  
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۱۶

Milad  
Mohammadnejad  
PhD. Student

Rahim  
Hassanzadeh\*  
Associate Professor,  
Faculty of Mechanical  
Engineering  
Urmia University of  
Technology, Urmia

## Numerical analysis of a three-bladed Darrieus wind turbine with auxiliary blades

**Abstract:** Wind energy is promising clean energy and is a sufficient source and a method of generating electricity without pollution. Darrieus wind turbines, as one of the wind energy converters, have always some challenges such the self-starting problems. In the present research, using the finite volume method, the aerodynamic performance of a three-bladed Darrieus turbine equipped with auxiliary blades is studied. The auxiliary blades have been tested under several attachment angles ( $\psi$ ) on a conventional three-blade Darrieus rotor of  $0^\circ$ ،  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  and  $60^\circ$ . Calculations have been done for three wind potentials of 7، 10 and 14 m/s and different tip speed ratios (TSR) in the range of 0.5 to 2.5. The results obtained for the conventional three-bladed rotor are compared with the data available in the available literature and a reasonable agreement has been obtained between them. With the general analysis of the considered parameters, it has been found that, among all cases under consideration, the hybrid rotor with zero attachment angle has the maximum power factor equivalent to 0.2714، 0.3265 and 0.3607 at free-wind speeds of 7، 10 and 14 m/s, respectively.

**Keywords:** Darrieus wind turbine, Auxiliary blade, Power coefficient, Tip speed ratio (TSR)

## ۱- مقدمه

مطالعه عددی توربین بادی هیبریدی محور عمودی که با استفاده از ترکیب روتور داریوس سه پره نوع H با ایرفویل NACA0021 و روتور ساونیوس نوع باخ اصلاح شده در سرعت جریان آزاد ۹ متر بر ثانیه پرداختند. نتایج نشان داد توربین هیبریدی حداکثر ضریب توان ۰/۴۱۴ را در نسبت سرعت نوک پره ۲/۵ فراهم کرده و قابلیت خود راه اندازی توربین هیبریدی نسبت به حالت متعارف را بهبود می‌دهد. لیو و همکاران [۱۳] به بررسی عملکرد آیرودینامیکی از جمله قابلیت خود راه اندازی و راندمان استحصال انرژی یک روتور هیبریدی جدید با استفاده از رویکرد تعامل ساختار سیال- جامد پرداختند. در این مطالعه، بهترین عملکرد استحصال انرژی در TSR برابر با ۲/۳ با بهبود ۳۷/۵٪ حاصل می‌گردد. در مطالعه‌ای دیگر، پالاتا و همکاران [۱۴] توربین بادی هیبریدی با روتور خارجی داریوس سه پره با ایرفویل NACA4418 و روتور داخلی ساونیوس نوع باخ اصلاح شده دو پره را در اعداد رینولدز متفاوت در داخل تونل باد تحلیل نمودند. آنها گزارش دادند که توربین هیبریدی در نسبت‌های سرعت نوک پره کمتر از ۱/۵، ضریب توان را نسبت به روتور داریوس، بیش از ۲۰٪ افزایش می‌دهد که این میزان بهبود در نسبت سرعت نوک تقریباً ۰/۷ به ۰/۴۰ می‌رسد. عبدالسلام و همکاران [۱۵] در مطالعه‌ای عددی، تاثیرات نسبت شعاع روتور داریوس دو و سه پره با ایرفویل NACA0021 بر شعاع روتور ساونیوس مارپیچ و زاویه اتصال پره‌های روتور داخلی را بر عملکرد توربین بادی هیبریدی در سرعت جریان آزاد ۷ متر بر ثانیه مطالعه نمودند. در پژوهش آن‌ها، ارتفاع روتور داریوس و ساونیوس به ترتیب برابر با ۱ و ۰/۶ متر در نظر گرفته شده است. مطابق نتایج بدست آمده مشخص شده است در هر دو روتور داریوس دو و سه پره، نسبت شعاع و زاویه اتصال بهینه به ترتیب برابر با ۰/۴۳ و ۳۰° می‌باشد که ضریب توان ماکزیمم ۰/۴۹ را حاصل می‌کند. علاوه بر این، با توجه به افزایش مقدار ضریب گشتاور استاتیکی در توربین هیبریدی در مقایسه با روتور داریوس، توانایی خود راه اندازی نیز بهبود یافته است.

در سال ۲۰۲۲، تریپاتی و همکاران [۱۶] بصورت عددی عملکرد توربین بادی هیبریدی، متشکل از سه پره داریوس- دو پره ساونیوس را در نسبت سرعت نوک پره ۱ تا ۱/۴ و سرعت جریان آزاد ۹ متر بر ثانیه را مورد مطالعه قرار دادند. طبق نتایج حاصل شده، روتور هیبریدی در نسبت سرعت نوک پره ۱/۳ و ۱/۴، مقادیر ضریب توان را در مقایسه با روتور داریوس متعارف به ترتیب ۵/۶۶٪ و ۸/۳۹٪ افزایش می‌دهد.

انرژی باد را می‌توان توسط انواع مختلفی از توربین‌های بادی استخراج کرد که عمدتاً با توجه به محور چرخش آن‌ها طبقه بندی می‌شوند: توربین‌های بادی محور افقی<sup>۱</sup> و توربین‌های بادی محور عمودی<sup>۲</sup>. توربین‌های بادی محور عمودی دارای مزایایی نسبت به توربین‌های بادی محور افقی هستند، مانند قابلیت دریافت باد از همه جهات یا امکان نصب ژنراتور در پایین روتور به جای بالای برج. از سوی دیگر، توربین‌های بادی محور عمودی محدودیت‌هایی دارند زیرا کارایی کمتری نسبت به توربین‌های بادی محور افقی دارند [۱] و در معرض نیروهای نوسانی بر روی پره‌ها هستند که می‌تواند منجر به مشکلات خستگی در ساختار توربین شود. علاوه بر این، به دلیل تغییر مکرر زاویه حمله پره‌ها نسبت به جریان باد، توربین‌های محور عمودی دارای آیرودینامیک پیچیده‌ای هستند [۲]. با این حال، توربین‌های بادی محور عمودی برای تولید برق در مقیاس کوچک با سرعت باد کم، مانند استفاده خانگی، به لطف پیشرفت در آیرودینامیک، ساختار و طراحی مواد که آنها را کارآمدتر و قابل اعتمادتر کرده است، بسیار جذاب می‌باشند [۳].

اساس توربین‌های بادی محور عمودی نوع ساونیوس بر نیروی پسا<sup>۳</sup> می‌باشد و عمدتاً برای کاربردهای توان در مقیاس کوچک استفاده می‌شوند. از سوی دیگر، توربین‌های بادی محور عمودی نوع داریوس مبتنی بر نیروی برا<sup>۴</sup> بوده و معمولاً از دو یا چند ایرفویل تشکیل شده‌اند. راندمان تبدیل انرژی بالا اما قابلیت خود راه اندازی بسیار ضعیف از مشخصه‌های روتورهای داریوس می‌باشد [۴]. مطالعات فراوانی در زمینه بهبود عملکرد توربین‌های بادی داریوس انجام گرفته است که عمدتاً بر اساس تغییر شکل پروفیل پره [۵-۸] و یا استفاده از انواع سازه‌های خارجی برای متمرکز کردن جریان باد روی روتور [۹-۱۱] می‌باشد.

توربین‌های بادی هیبریدی از جمله مطالعات صورت گرفته در این زمینه می‌باشد که اساس شکل‌گیری این نوع از توربین‌ها، بر پایه ترکیب دو نوع روتور داریوس و ساونیوس می‌باشد. هدف از اینکار رفع مشکل خود راه اندازی روتور اصلی داریوس در مناطق با پتانسیل باد کم می‌باشد. عمدتاً در توربین‌های هیبریدی، روتور ساونیوس بعنوان روتور داخلی و روتور داریوس بعنوان روتور خارجی توربین در نظر گرفته می‌شود. از جمله‌ای این مطالعات می‌توان به پژوهش صورت گرفته توسط حسینی و گودرزی [۱۲] در سال ۲۰۱۹ اشاره کرد که به

<sup>3</sup> Drag<sup>4</sup> Lift<sup>1</sup> HAWTs<sup>2</sup> VAWTs

بررسی قرار می‌گیرد. استفاده از پره‌های کمکی یکسان با پره‌های اصلی از نظر هندسی، دامنه وسیع‌تر نسبت سرعت نوک بی بعد، سرعت‌های باد آزاد متفاوت و زوایای اتصال مختلف از نوع آوری-های کار حاضر می‌باشد که در کارهای مشابه قبلی سابقه ندارد.

## ۲- مشخصات هندسی روتور

در مطالعه حاضر، مشخصات هندسی روتور متعارف در نظر گرفته شده مطابق با پژوهش صورت گرفته توسط غزاله و همکاران [۲۰] می‌باشد. مطابق شکل (۱)، روتور در نظر گرفته شده دارای ۳ پره اصلی و ۳ پره کمکی می‌باشد. پروفیل مقطع پره‌های اصلی و کمکی و مشخصات هندسی آنها یکسان می‌باشد. پره‌های اصلی و کمکی به ترتیب روتور اصلی و روتور کمکی را تشکیل می‌دهند. برای بررسی تاثیر زاویه اتصال ( $\psi$ ) روتور کمکی نسبت به روتور اصلی و بدست آوردن مقدار مناسب آن، زوایای اتصال مختلفی همچون  $0^\circ$ ،  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$  بررسی شده است. مضافاً اینکه محاسبات برای مقادیر TSR در محدوده  $0/5$  تا  $2/5$  انجام شده است. همچنین برای بررسی عملکرد روتور داریوس مجهز به پره‌های کمکی در مناطق با پتانسیل باد مختلف، سرعت‌های جریان باد متفاوتی همچون  $7$ ،  $10$  و  $14$  متر بر ثانیه آزمایش شده است. در این مطالعه، نسبت شعاع روتور داخلی به روتور اصلی ( $r/R$ ) برابر مقدار ثابت  $0/8$  در نظر گرفته شده است. در جدول (۱) جزئیات هندسی روتور مورد نظر ارائه شده است.

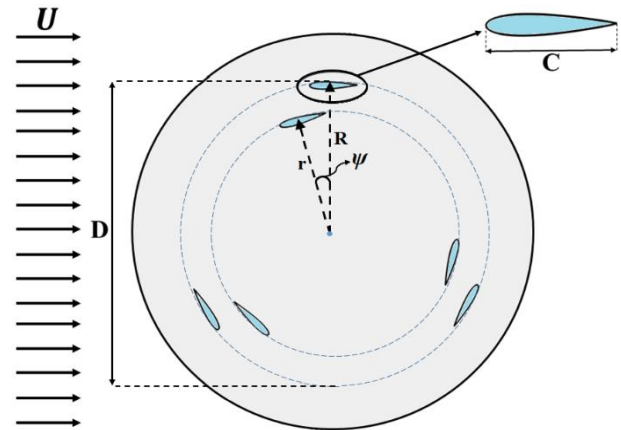
## ۳- شرایط مرزی و معادلات حاکم

در این پژوهش، عملکرد روتور داریوس مجهز به پره‌های کمکی بصورت دو بعدی با استفاده از روش دینامیک سیالات محاسباتی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور از یک دامنه محاسباتی مستطیلی شکل، مطابق شکل (۲) استفاده شده است که شامل دو ناحیه مجزا یعنی ناحیه چرخان (ناحیه در برگیرنده روتور) و ناحیه ساکن (ناحیه دور از روتور) می‌باشد. در مرز ورودی دامنه محاسباتی از شرط سرعت یکنواخت با شدت آشفتگی  $5\%$  در مرز خروجی از شرط مرزی فشار اتمسفریک و در مرزهای جانبی از شرط مرزی تقارن استفاده شده است. روی پره‌های اصلی و کمکی از شرط عدم لغزش و در مرز مشترک بین ناحیه چرخان و ناحیه ساکن از شرط مرز مشترک استفاده شده است.

اسدی و حسنزاده [۱۷] در یک مطالعه عددی، عملکرد توربین بادی هیبریدی با روتور خارجی داریوس دو پره با ایرفویل‌های متقارن ناکا  $10 \cdot 18$  یکسان و روتور داخلی ساونیوس نیم دایره‌ای و باخ را در دو سرعت جریان آزاد  $5$  و  $10$  متر بر ثانیه مقایسه نمودند. طبق نتایج به دست آمده، روتور ساونیوس نوع باخ عملکرد بهتری نسبت به نیم دایره از خود نشان می‌دهد. علاوه بر این، ماکزیمم بهبود عملکرد توربین بادی هیبریدی مجهز به روتور نوع باخ تحت زاویه اتصال  $90^\circ$  درجه، نسبت سرعت نوک پره  $1/5$  و سرعت ورودی  $5$  متر بر ثانیه  $20\%$  گزارش گردیده است. استفاده از پره کمکی از دیگر مطالعات صورت گرفته در زمینه بهبود عملکرد توربین‌های بادی داریوس می‌باشد. آرپینو و همکاران [۱۸] به صورت عددی، عملکرد توربین بادی محور عمودی داریوس با سه زوج پره که هر کدام از یک ایرفویل اصلی و کمکی تشکیل شده‌اند را در نسبت سرعت نوک پره  $1$  تا  $2$  و سرعت جریان ورودی  $12$  متر بر ثانیه مورد بررسی قرار دادند. طول وتر پره اصلی و کمکی به ترتیب برابر با  $47/2$  و  $26/9$  میلی‌متر می‌باشد. نتایج حاصل بیانگر این موضوع است که حداکثر ضریب توان در نسبت سرعت نوک پره  $1/5$  برابر با  $0/18$  حاصل می‌شود. همچنین، در سرعت‌های باد کم و نسبت سرعت نوک پره پایین، روتور معرفی شده دارای ضریب توان بالاتری در مقایسه با روتور متعارف می‌باشد.

در سال  $2022$ ، احمد و همکاران [۱۹] به صورت عددی توربین بادی محور عمودی داریوس سه پره نوع H دوگانه را مورد بررسی قرار دادند. لازم به ذکر است که ایرفویل‌های اصلی و کمکی به ترتیب دارای طول وتر  $0/546$  و  $0/5$  متر و ارتفاع  $3/12$  و  $1/605$  متر می‌باشد. حداکثر ضریب توان در نسبت سرعت نوک پره  $3/23$  و برابر  $0/475$  می‌باشد که در مقایسه با روتور متعارف حدوداً  $10$  درصد بهبود را نشان می‌دهد. همچنین، مثبت بودن ضریب گشتاور استاتیکی در تمام زوایای حمله نشانگر این موضوع است که توربین بادی پیشنهادی کاملاً خود راه انداز می‌باشد. همچنین در سرعت‌های باد پایین و نسبت سرعت نوک پره پایین در مقایسه با روتور متعارف دارای ضریب توان بالاتری می‌باشد.

در مقاله حاضر عملکرد توربین بادی داریوس متعارف مجهز به پره‌های کمکی یکسان نسبت به پره‌های اصلی با استفاده از تکنیک دینامیک سیالات محاسباتی به شکل دو بعدی تحلیل می‌شود. متغیرهایی همچون زاویه اتصال پره‌های کمکی نسبت به پره‌های اصلی، سرعت نوک پره و سرعت جریان آزاد باد مورد



شکل ۱ نمای شماتیک توربین بادی داریوس سه پره با پره‌های کمکی

جدول ۱ مشخصات هندسی روتور

جزئیات	پارامترها
۰/۴ m	طول پره (C)
۲/۵ m	قطر روتور (D)
NACA0015	نوع ایرفویل‌های اصلی
NACA0015	نوع ایرفویل‌های کمکی
پره‌های مستقیم	نوع پره ها
۰/۸	نسبت شعاع (r/R)
۰°، ۱۵°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰°	زاویه اتصال (psi)
۷، ۱۴، ۱۰ m/s	سرعت ورودی (U)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'} \right) \quad (۲)$$

برای شبیه‌سازی جریان آشفته حول روتور، مطابق با مطالعات قبلی، از مدل SST  $k-\omega$  استفاده شده است. برای حل معادلات حاکم، کلیه عبارات ادوکشن و دیفیوژن به ترتیب از روش بالادست مرتبه دوم و تفاضل مرکزی گسسته شده است. مشتقات زمانی نیز با روش مرتبه دوم ضمنی گسسته شده‌اند. برای اتصال میادین سرعت و فشار از الگوریتم سیمپل<sup>۱</sup> استفاده شده است. معیار همگرایی حل برای کلیه متغیرها برابر  $10^{-6}$  لحاظ گردیده است. همچنین، از گام زمانی معادل با  $0/3$  درجه چرخش روتور برای شبیه‌سازی استفاده شده است. علاوه بر معادلات حاکم بر مساله، از پارامترهای بی بعد زیر برای ارزیابی مشخصه‌های توانی روتور مورد نظر استفاده شده‌است:

$$TSR = \frac{\omega_o D}{2U} \quad (۳)$$

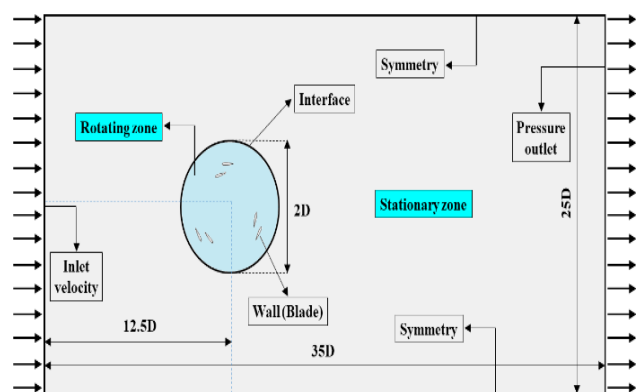
$$C_P = \frac{M \omega_o}{\frac{1}{2} \rho D U^3 H} \quad (۴)$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{4} \rho U^2 D^2} \quad (۵)$$

$$C_P = TSR \cdot C_M \quad (۶)$$

#### ۴- شبکه‌بندی و نتایج استقلال از شبکه

در شکل (۳) جزئیات مربوط به شبکه محاسباتی گزارش شده است. شبکه‌بندی ناحیه دوار بصورت متحرک و از نوع لغزشی و ناحیه ساکن بصورت ثابت می‌باشد. ناحیه چرخان، به دلیل تاثیر چرخش روتور بر جریان که باعث ایجاد گرادیان شدید سرعت و فشار می‌شود، از اهمیت بالایی برخوردار است. در این ناحیه برعکس ناحیه ساکن که از شبکه‌بندی با سازمان استفاده شده است، برای پوشش بهتر از شبکه‌بندی بی‌سازمان استفاده شده است. روی پره‌ها، از شبکه‌بندی مرزی مطابق شکل (۳) استفاده شده است که شامل ۱۰ لایه با ضریب رشد ۱/۱ می‌باشد. ضخامت لایه اول برابر با  $10^{-4}$  متر در نظر گرفته شده است که معادل با حداکثر مقدار تابع دیواره بی بعد  $3/28$  می‌باشد.



شکل ۲ ابعاد ناحیه محاسباتی و شرایط مرزی

معادلات ناویر استوکس دو بعدی ناپایا برای مساله مورد نظر به صورت زیر می‌باشند:

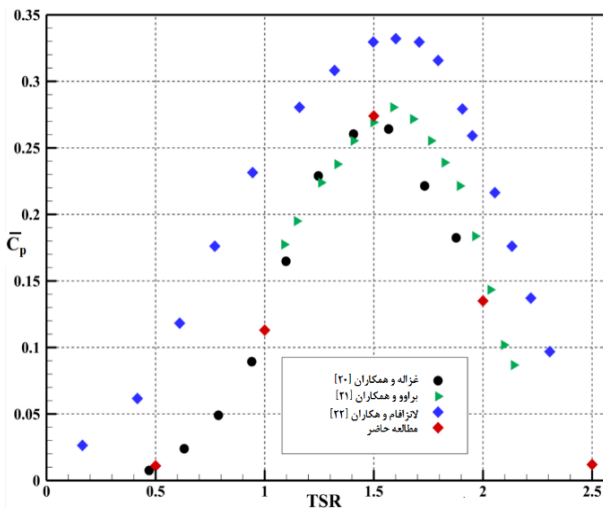
$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (۱)$$

<sup>۱</sup> SIMPLE

۰/۰۶۱٪ می‌باشد. لذا از ساختار شبکه‌بندی دوم برای شبیه‌سازی ها در این پژوهش استفاده شده است.

### ۵- اعتبارسنجی

در مطالعه حاضر، برای اطمینان از صحت نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های عددی، نتایج بدست آمده برای روتور متعارف در سرعت جریان آزاد ۸ متر بر ثانیه با داده‌های عددی و تجربی ارائه شده توسط غزاله و همکاران [۲۰]، براوو و همکاران [۲۱] و لانزافام و همکاران [۲۲] مطابقت داده شده است. نتایج در شکل (۴) ارائه گردیده است. با توجه به نتایج، مشاهده می‌گردد که مقادیر حاصل، تطابق بسیار خوبی با نتایج عددی و تجربی دارند. حداکثر خطای بوجود آمده بین داده‌های حاضر و داده‌های تجربی [۲۲] برابر ۰/۶۱۸۹٪ می‌باشد.



شکل ۴ نتایج اعتبارسنجی

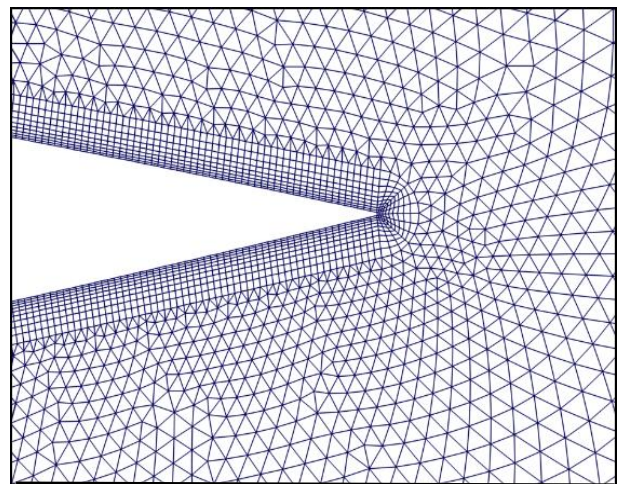
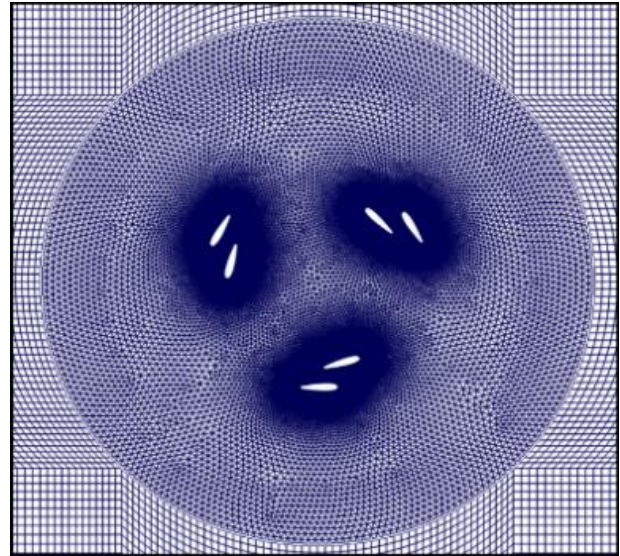
### ۶- نتایج

در بخش حاضر، ابتدا جریان لحظه‌ای و میدان‌های سرعت بی بعد شده جریان باد آزاد حول روتور توربین مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس تغییرات ضریب گشتاور در یک دور کامل روتور تحلیل می‌گردد و در نهایت مقادیر ضریب توان متوسط تمامی روتورهای مورد بررسی ارائه می‌گردد.

در شکل‌های (۵)، (۶) و (۷) میدان‌های سرعت نرمال شده جریان باد حول روتور ترکیبی به ترتیب در زوایای فضایی ۰°، ۴۵° و ۹۰° برای سرعت نوک بی بعد ۱/۵ و سرعت باد ۱۰ متر بر ثانیه قابل مشاهده می‌باشد. از تجزیه و تحلیل میدان‌های سرعت به‌دست آمده از شبیه‌سازی عددی موجود در شکل‌های (۵)، (۶) و (۷) می‌توان رفتار فیزیکی روتور در مواجهه با جریان

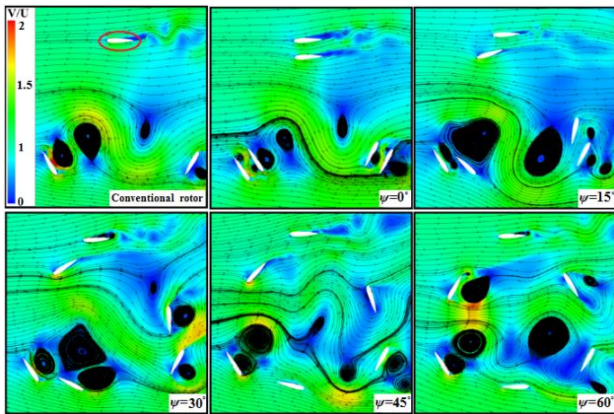
جدول ۲ استقلال نتایج از شبکه‌بندی برای زاویه اتصال ۰°، سرعت نوک بی بعد ۱/۵ و سرعت جریان آزاد ۱۰ متر بر ثانیه

شماره شبکه	تعداد گره	$\bar{C}_M$	$\bar{C}_P$	درصد خطا
۱	۴۶۶۷۷۳	۰/۲۳۰	۰/۳۴۵	---
۲	۷۱۳۲۹۱	۰/۲۱۷	۰/۳۲۶	۵/۸۲
۳	۹۵۲۳۳۵	۰/۲۱۶	۰/۳۲۴	۰/۶۱

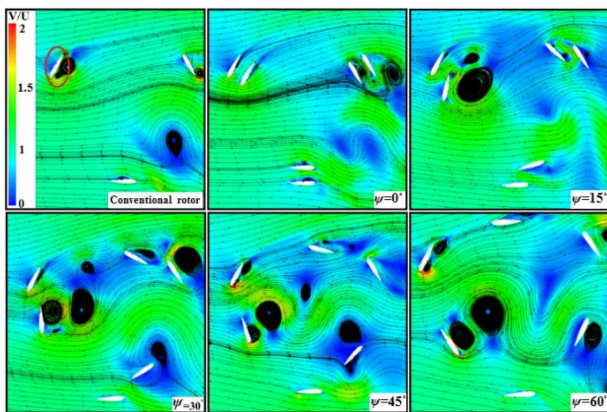


شکل ۳ شبکه‌بندی ناحیه محاسباتی

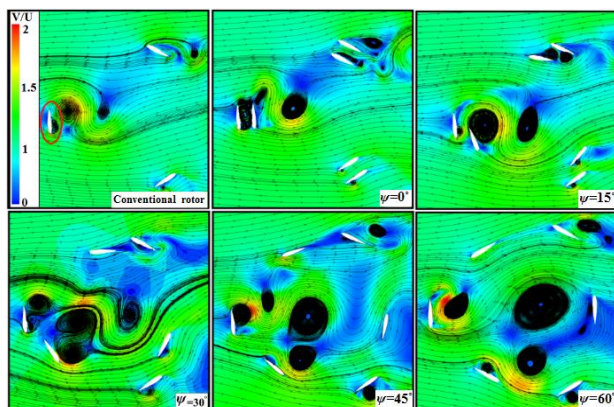
برای مطالعه استقلال نتایج از شبکه‌بندی، سه شبکه‌بندی مختلف شامل ۴۶۶۷۷۳، ۷۱۳۲۹۱ و ۹۵۲۳۳۵ گره مورد بررسی قرار گرفته است. جدول (۲) نتایج تاثیر وضوح شبکه‌بندی بر مقادیر متوسط ضریب توان و گشتاور را برای زاویه اتصال ۰°، سرعت نوک بی بعد ۱/۵ و سرعت جریان آزاد ۱۰ متر بر ثانیه ارائه می‌دهد. با بررسی نتایج ارائه شده در جدول (۲) می‌توان دریافت که مقدار خطای ایجاد شده بین شبکه‌بندی دوم و سوم



شکل ۵ میدان سرعت لحظه‌ای بی‌بعد در اطراف روتور توربین داریوس در سرعت ۱۰ متر بر ثانیه، نسبت سرعت نوک پره ۱/۵ و زاویه فضایی ۰°



شکل ۶ میدان سرعت لحظه‌ای بی‌بعد در اطراف روتور توربین داریوس در سرعت ۱۰ متر بر ثانیه، نسبت سرعت نوک پره ۱/۵ و زاویه فضایی ۴۵°

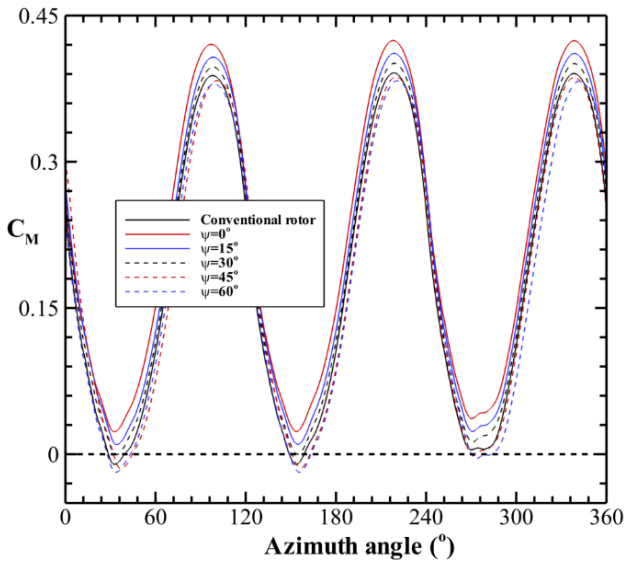


شکل ۷ میدان سرعت لحظه‌ای بی‌بعد در اطراف روتور توربین داریوس در سرعت ۱۰ متر بر ثانیه، نسبت سرعت نوک پره ۱/۵ و زاویه فضایی ۹۰°

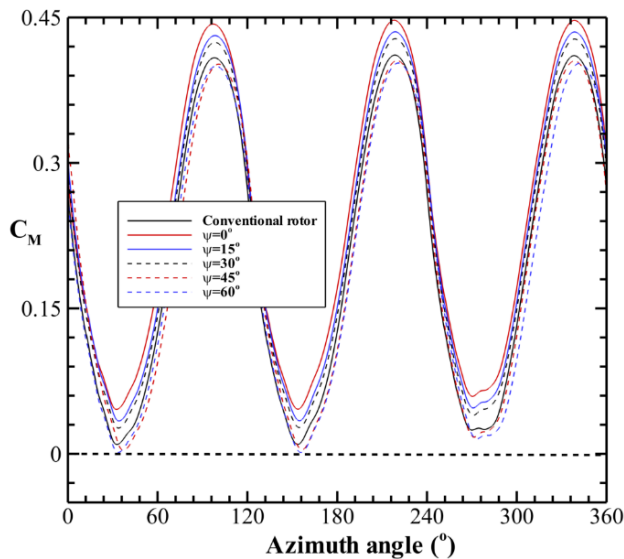
از سوی دیگر، با قرارگیری خط وتر پره‌های اصلی و کمکی ردیف اول عمود بر جریان نزدیک شونده، این ردیف از پره‌ها را می‌توان به‌عنوان بیشترین تولید کننده جریان گردابه‌ای معرفی کرد که منجر به از بین رفتن انرژی جنبشی جریان تزریق شونده

باد آزاد را توضیح داد که منجر به شرایط حداکثر و حداقل گشتاور تولید شده توسط روتور می‌شود. در زاویه فضایی صفر درجه، همان‌طور که در شکل (۵) مشاهده می‌شود بیشترین اختلاف فشار و در نتیجه نیروی برا روی پره ردیف اول مشخص شده با رنگ قرمز رخ می‌دهد. لذا این پره هم در روتور رایج و هم در روتورهای مجهز به پره کمکی بدون توجه به زاویه اتصال، بیشترین تولید کننده گشتاور مفید می‌باشد. از سوی دیگر، پره‌های دیگر به دلیل اینکه خط وتر آنها در مقابل جریان باد نزدیک شونده قرار گرفته است تولید گردابه‌های بزرگ می‌کنند که در اثر جدایی جریان از لبه انتهایی پره می‌باشد. این رخداد منفی در روتور ترکیبی به دلیل عبور بخشی از جریان نزدیک شونده از میان دو پره اصلی و کمکی ردیف دوم در زاویه اتصال صفر درجه تعدیل می‌شود و در نتیجه گردابه‌های تولید شده توسط این ردیف از پره‌ها نسبت به پره مشابه حالت مرجع کوچکتر می‌شود. با افزایش زاویه اتصال به ۱۵ درجه گردابه‌های تولید شده توسط پره‌های ردیف دوم سطح وسیعتری در داخل روتور اشغال کرده و جریان تزریقی به درون روتور بدون اندرکنش قابل توجهی با پره‌های ردیف سوم از روتور خارج می‌شود. به همین دلیل میدان سرعت درون روتور نسبت به حالت مرجع و روتور ترکیبی با زاویه صفر درجه تقلیل می‌یابد. با افزایش بیشتر زاویه اتصال تعداد گردابه‌های ایجاد شده درون روتور ترکیبی و انحراف جریان باد تزریق شده به درون روتور تشدید می‌شود. در زاویه فضایی ۴۵ درجه،

مطابق با شکل (۶)، در پشت پره اصلی حالت مرجع گردابه ای بزرگ در اثر جدایی جریان رخ می‌دهد که منجر به تقلیل گشتاور مفید تولید شده توسط این گره می‌شود. همچنین در مرکز روتور، جریان گردابه ای تشکیل می‌شود که عملکرد پره دوم را در حین عبور از این ناحیه کاهش می‌دهد. در روتور مجهز به پره کمکی با زاویه اتصال صفر درجه، با تزریق جریان بین دو پره اصلی و کمکی اول، هیچ گردابه‌ای تشکیل نشده و همچنین گردابه‌ای در مرکز روتور مشاهده نمی‌شود که منجر به افزایش تولید گشتاور مثبت پره‌های اول و دوم می‌شود. با افزایش زاویه اتصال به ۱۵ درجه، پره کمکی ردیف اول تولید کننده گردابه‌های بزرگ می‌شود که عمدتاً به دلیل قرارگیری خط وتر پره مذکور در مقابل جریان می‌باشد. پس از این زاویه اتصال، جریان‌های گردابه‌ای و انحراف شدید جریان در داخل روتور بصورت تابعی از زاویه اتصال درون روتور گسترش پیدا می‌کند. در شکل (۷) میدان سرعت نرمال شده برای زاویه فضایی ۹۰ درجه به تصویر کشیده شده است. در این زاویه، بیشترین گشتاور تولید شده را می‌توان برای پره‌های اصلی و کمکی ردیف سوم اختصاص داد.



شکل ۹ تغییرات ضریب گشتاور در یک دور کامل روتور داریوس با زاویه اتصال پره کمکی متفاوت  $0^\circ$ ،  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$  و مقایسه داده های تحت سرعت نوک پره  $1/5$  و سرعت باد  $10$  متر بر ثانیه

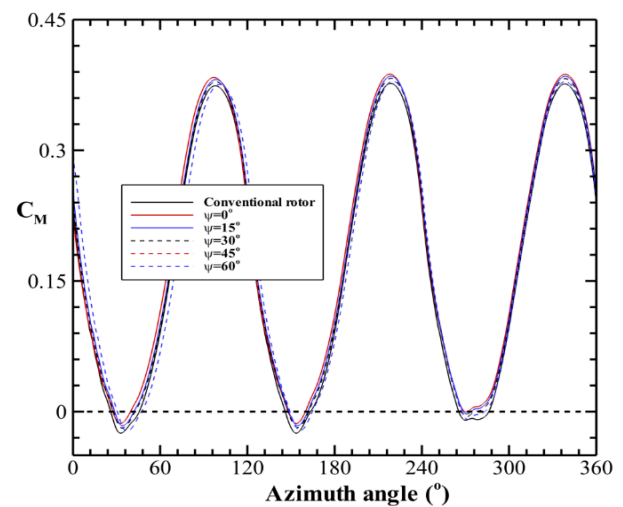


شکل ۱۰ تغییرات ضریب گشتاور در یک دور کامل روتور داریوس با زاویه اتصال پره کمکی متفاوت  $0^\circ$ ،  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$  و مقایسه داده های تحت سرعت نوک پره  $1/5$  و سرعت باد  $14$  متر بر ثانیه

در ادامه، جداول (۳)، (۴) و (۵) ضریب توان متوسط به ترتیب برای روتورهای داریوس و روتور مجهز به پره های کمکی تحت زوایای اتصال  $0^\circ$ ،  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$  در سرعت نوک پره  $0/5$  تا  $2/5$  و سرعت باد آزاد  $10$ ،  $14$  متر بر ثانیه را نشان می دهد. با توجه به نتایج می توان دریافت که افزایش سرعت باد، ضریب توان روتور داریوس و روتور ترکیبی برای تمامی زوایای اتصال و سرعت نوک پره را افزایش می دهد. بیشترین ضریب توان مربوط به زاویه اتصال صفر درجه معادل با  $0/2714$ ،  $0/3265$  و  $0/3607$  را به ترتیب در سرعت های جریان آزاد  $10$  و  $14$  متر بر ثانیه در میان کلیه حالت های بررسی شده فراهم می کند. پس

به داخل روتور می شود. با مشاهده میدان سرعت درون روتور مجهز به پره های کمکی می توان دریافت که بعد از زاویه اتصال  $15^\circ$  درجه، علاوه بر کاهش میدان سرعت درون روتور، تولید گردابه های بزرگ و انحراف جریان بصورت قابل توجهی توسعه پیدا کرده است.

شکل های (۸)، (۹) و (۱۰) بیانگر تغییرات ضریب گشتاور در یک دور کامل روتور می باشند و تغییرات در هر سه مورد برای زاویه اتصال پره کمکی متفاوت  $0^\circ$ ،  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$  تحت سرعت نوک پره  $1/5$  به ترتیب در سه سرعت باد  $7$ ،  $10$ ،  $14$  متر بر ثانیه می باشد. با هدف مقایسه، داده های روتور مرجع نیز ارائه شده است. با بررسی نتایج ارائه شده مشاهده می گردد که بیشترین مقدار ضریب گشتاور در هر سه سرعت باد آزاد، در زاویه حمله  $95^\circ$ ،  $220^\circ$  و  $335^\circ$  درجه رخ می دهد. از سوی دیگر کمترین مقدار ضریب گشتاور در زاویه حمله  $40^\circ$ ،  $155^\circ$  و  $275^\circ$  ایجاد می گردد. در سرعت باد  $7$  متر بر ثانیه تمامی روتورها گشتاور منفی را در زوایای بیان شده ایجاد می کنند و با ایجاد گشتاور منفی، بصورت جزئی وارد ناحیه مرده (ناحیه ای با گشتاور منفی) می شوند. ورود به ناحیه مرده عمدتاً مشکلاتی همچون عدم خود راه اندازی روتور را به همراه خواهد داشت. با افزایش سرعت باد آزاد به  $10$  متر بر ثانیه، روتور با پره کمکی با زاویه اتصال  $0^\circ$  و  $15^\circ$  هیچگونه گشتاور منفی ایجاد نمی کنند و با افزایش سرعت باد آزاد به  $14$  متر بر ثانیه، هیچ یک از روتورها گشتاور منفی ایجاد نمی کنند. با بررسی بیشتر می توان دریافت که روتور مجهز به پره کمکی تحت زاویه صفر درجه بیشترین گشتاور تولیدی را به همراه خواهد داشت. پس از آن، روتور با زاویه اتصال  $15^\circ$  درجه را می توان به عنوان روتور بهینه معرفی کرد.



شکل ۸ تغییرات ضریب گشتاور در یک دور کامل روتور داریوس با زاویه اتصال پره کمکی متفاوت  $0^\circ$ ،  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  و  $60^\circ$  و مقایسه داده های تحت سرعت نوک پره  $1/5$  و سرعت باد  $7$  متر بر ثانیه

جدول ۴ تغییرات ضریب توان برای سرعت ۱۰ متر بر ثانیه در نسبت سرعت نوک پره متفاوت

TSR	$C_P$				
	۱۵°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	روتور متعارف
۰/۵	۰/۰۱۳۹	۰/۰۱۱۶	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۶۰	۰/۰۱۰۶
۱	۰/۱۴۵۶	۰/۱۲۵۹	۰/۱۱۵۴	۰/۱۰۴۴	۰/۱۱۲۸
۱/۵	۰/۳۲۶۵	۰/۲۹۱۴	۰/۲۷۱۵	۰/۲۶۲۲	۰/۲۷۴۹
۲	۰/۱۵۸۶	۰/۱۳۴۷	۰/۱۲۲۲	۰/۱۱۷۱	۰/۱۳۵۱
۲/۵	۰/۰۱۹۰	۰/۰۱۶۳	۰/۰۱۵۱	۰/۰۱۴۴	۰/۰۱۱۱

از آن روتور ترکیبی با زاویه اتصال ۱۵ درجه بیشترین ضریب توان را فراهم می‌کند. نکته قابل توجه این است که در مقادیر سرعت نوک بی بعد کوچک همچون ۰/۵، مقدار ضریب توان روتور ترکیبی با زاویه اتصال بزرگتر یا مساوی ۴۵ درجه کمتر از حالت مرجع می‌باشد. لیکن با افزایش سرعت باد آزاد و مقدار سرعت نوک بی‌بعد این شرایط منفی برای روتور ترکیبی در مقایسه با حالت مرجع در زوایای اتصال بزرگتر تعدیل می‌شود.

### ۷- نتیجه گیری

در مطالعه‌ی حاضر، شبیه‌سازی‌های دوبعدی برای ارزیابی عملکرد یک توربین بادی محور عمودی داریوس مجهز به پره‌های کمکی انجام شده است. اثرات زوایای مختلف اتصال ۰°، ۱۵°، ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° و نسبت سرعت نوک پره، مقادیر ۰/۵ تا ۲/۵ تحت سه جریان باد آزاد با مقادیر ۰/۷، ۱۰، ۱۴ متر بر ثانیه بررسی گردید. علاوه بر این، توپولوژی رفتار فیزیکی جریان مربوط به پره‌ها با تحلیل میدان سرعت بر روی سطح ایرفویل‌ها به صورت عددی انجام گردید و عملکرد توربین از نظر ضرایب توان و گشتاور تولید شده بصورت تابعی از زاویه اتصال روتور و نسبت سرعت نوک پره ارزیابی شد.

جدول ۵- تغییرات ضریب توان برای سرعت ۱۴ متر بر ثانیه در نسبت سرعت نوک پره متفاوت

TSR	$C_P$				
	۱۵°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	روتور متعارف
۰/۵	۰/۰۱۵۴	۰/۰۱۳۸	۰/۰۰۹۴	۰/۰۰۶۹	۰/۰۱۵۲
۱	۰/۱۶۱۴	۰/۱۴۷۲	۰/۱۳۲۳	۰/۱۱۵۳	۰/۱۳۹۷
۱/۵	۰/۳۶۰۷	۰/۳۳۲۱	۰/۲۹۹۴	۰/۲۹۲۱	۰/۳۰۴۹
۲	۰/۱۶۷۴	۰/۱۵۴۱	۰/۱۳۲۳	۰/۱۳۱۶	۰/۱۵۶۰
۲/۵	۰/۰۲۴۸	۰/۰۲۳۱	۰/۰۲۱۸	۰/۰۲۰۵	۰/۰۲۴۳

جدول ۳ تغییرات ضریب توان برای سرعت ۷ متر بر ثانیه در نسبت سرعت نوک پره متفاوت

TSR	$C_P$				
	۱۵°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	روتور متعارف
۰/۵	۰/۰۱۱۷	۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۹۳
۱	۰/۱۳۱۵	۰/۱۱۱۲	۰/۱۰۰۱	۰/۰۹۰۷	۰/۱۱۱۳
۱/۵	۰/۳۷۱۴	۰/۳۴۳۹	۰/۳۰۶۰	۰/۲۵۷۲	۰/۳۵۳۴
۲	۰/۱۳۸۳	۰/۱۲۴۹	۰/۱۱۲۶	۰/۱۰۰۵	۰/۱۳۳۶
۲/۵	۰/۰۱۷۱	۰/۰۱۵۲	۰/۰۱۴۸	۰/۰۱۴۱	۰/۰۱۰۶

sustainable wind energy option for Barbados," *Energy Convers Manage*, Vol. 49, pp. 1652-1661, 2007/11/08/ 2008, <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2007.11.008>.

[4] M.A. Singh, A. Biswas, R.D. Misra, "Investigation of self-starting and high rotor solidity on the performance of a three S1210 blade H-type Darrieus rotor," *Renewable Energy*, Vol. 76, pp. 381-387, 2014/11/27/ 2015, <https://doi.org/10.1016/j.renene.2014.11.027>.

[5] S.M.H. Karimian, A. Abdolahifar, "Performance investigation of a new Darrieus Vertical Axis Wind Turbine," *Energy*, Vol. 191, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.116551>.

[6] M.H. Mohamed, A. Dessoky, F. Alqurashi, "Blade shape effect on the behavior of the H-rotor Darrieus wind turbine: Performance investigation and force analysis," *Energy*, Vol. 179, pp. 1217-1234, 2019/07/25/ 2019. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.05.069>.

[7] O.S. Mohamed, A.A. Ibrahim, A.K. Etman, A.A. Abdelfatah, A.M.R. Elbaz, "Numerical investigation of Darrieus wind turbine with slotted airfoil blades," *Energy Conversion and Management*, Vol. 5, 2020/01/01/ 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ecmx.2019.100026>.

[8] T. Zhang, Zh.Wang, W. Huang, D. Ingham, L. Ma, M. Pourkashanian, "A numerical study on choosing the best configuration of the blade for vertical axis wind turbines," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 201, 2020/06/01/ 2020. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2020.104162>.

[9] K. H. Wong, W. T. Chong, S. Ch. Poh, Y.Ch. Shiah, N. L. Sukiman, Ch.T. Wang, "3D CFD simulation and parametric study of a flat plate deflector for vertical axis wind turbine," *Renewable Energy*, Vol. 129, 2018/05/01/ 2018. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2018.05.085>.

[10] H. Jeong, A. Abdolahifar, S.M.H. Karimian, "Numerical analysis of the pitch angle effect on the performance improvement and flow characteristics of the 3-PB Darrieus vertical axis wind turbine," *Energy*, Vol. 239, 2022/01/15. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.122339>.

[11] K. Qasemi, L.N. Azadani, "Optimization of the power output of a vertical axis wind turbine augmented with a flat plate deflector," *Energy*, Vol. 202, 2020/04/01/ 2020. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.117745>.

[12] A. Hosseini, N. Goudarzi, "Design and CFD study of a hybrid vertical-axis wind turbine by employing a combined Bach-type and H-Darrieus rotor systems,"

بیشترین مقدار ضریب گشتاور در هر سه سرعت باد آزاد در زاویه حمله  $95^\circ$ ،  $220^\circ$  و  $335^\circ$  درجه رخ می‌دهد. از سوی دیگر کمترین مقدار ضریب گشتاور در زاویه حمله  $40^\circ$ ،  $155^\circ$  و  $275^\circ$  ایجاد می‌گردد.

حداکثر مقدار ضریب توان برای روتور هیبریدی با زاویه اتصال صفر، حداکثر ضریب توان معادل با  $0/2714$ ،  $0/3265$  و  $0/3607$  را به ترتیب در سرعت‌های جریان آزاد  $7$ ،  $10$  و  $14$  متر بر ثانیه در میان کلیه حالت‌های بررسی شده فراهم می‌کند. همچنین افزایش اندازه زاویه اتصال، تفاوت بین پره‌های کمکی و VAWT های متعارف به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد.

## ۸- فهرست علائم و اختصارات

### علائم انگلیسی

$A$	مساحت جاروب توربین ( $m^2$ )
$D$	قطر روتور ( $m$ )
$H$	ارتفاع روتور ( $m$ )
$M$	گشتاور ( $N.m$ )
$U$	سرعت جریان آزاد باد ( $m.s^{-1}$ )
$V$	مقدار سرعت ( $m.s^{-1}$ )
$p$	فشار ( $Pa$ )
$P$	توان ( $W$ )
$R$	شعاع روتور اصلی ( $m$ )
$r$	شعاع روتور کمکی ( $m$ )
$\omega_o$	سرعت دورانی ( $rad.s^{-1}$ )

### علائم یونانی

$\mu$	لزجت دینامیکی ( $kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\rho$	چگالی ( $kg.m^{-3}$ )
$\psi$	زاویه اتصال پره کمکی
اعداد بی بعد	
$Re$	عدد رینولدز
$CM$	ضریب گشتاور
$CP$	ضریب توان
$TSR$	نسبت سرعت نوک پره بی بعد

## ۹- مراجع

- [1] R.V Brulle. "Feasibility investigation of the giromill for generation of electrical power. Technical discussion," *Energy Research and Development Administration*, COO/2617, 1976/1/2/ 1977.
- [2] Y. Bazilevs, A. Korobenko, X. Deng, J. Yan, M. Kinzel, J. O. Dabiri, "Fluid-structure interaction modeling of vertical-axis wind turbines," *J Appl Mech Trans ASME*, Vol. 81, 2014/08/01/ 2014, <https://doi.org/10.1115/1.4027466>.
- [3] J.D.K. Bishop, G.A.J. Amarantunga, "Evaluation of small wind turbines in distributed arrangement as

- [18] F. Arpino, G. Cortellessa, M. Scungio, G. Fresilli, A. Facci, A. Frattolillo, "PIV measurements over a double bladed Darrieus-type vertical axis wind turbine: A validation benchmark," *Flow Measurement and Instrumentation*, Vol. 82, 2021/12/01/ 2021.  
<https://doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2021.102064>.
- [19] M. Ahmad, A. Shahzad, F. Akram, F. Ahmad, S.I. AliShah, "Design optimization of Double-Darrieus hybrid vertical axis wind turbine," *Ocean Engineering*, Vol. 254, 2022/06/15/ 2022.  
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111171>.
- [20] R.A. Ghazalla, M.H. Mohamed, A.A. Hafiz, "Synergistic analysis of a Darrieus wind turbine using computational fluid dynamics," *Energy*, Vol. 189, 2019/12/15 2019.  
<https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.116214>.
- [21] R. Bravo, S. Tullis, S. Ziada, "Performance testing of a small vertical-axis wind turbine," *Proceedings of the 21st Canadian Congress of Applied Mechanics (CANCAM07)*, Toronto, Canada, Vol. 3-7, 2007.
- [22] R. Lanzafame, S. Mauro, M. Messina, "2D CFD modeling of H-Darrieus wind turbines using a transition turbulence model," *Energy Proced.* Vol. 45, pp. 131–140, 2014/01/15 2014.  
<https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.116214>.
- Energy Conversion and Management*, Vol. 189, pp. 49-59, 2019/03/68/ 2019.  
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2019.03.068>.
- [13] K. Liu, M. Yu, W. Zhu, "Enhancing wind energy harvesting performance of vertical axis wind turbines with a new hybrid design: a fluid-structure interaction study", *Renewable Energy*, Vol. 140, pp. 912-927, 2019/03/12/ 2019.  
<https://doi.org/10.1016/j.renene.2019.03.120>.
- [14] A. Pallotta, D. Pietrogiaconi, G.P. Romano, "HYBRI-A combined Savonius- Darrieus wind turbine: performances and flow fields," *Energy*, Vol. 191, 2020.  
<https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.116433>.
- [15] A.M. Abdelsalam, M.A. Kotb, Kh. Yousef, I.M. Sakr, Performance study on a modified hybrid wind turbine with twisted Savonius blades, Vol. 241, 2021.  
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2021.114317>.
- [16] A. Tripathi, P. Das, T. Aggarwal, "Sahil, Efficiency enhancement of a hybrid Vertical axis wind turbine by utilizing Optimum parameters," *Materials Today: Proceedings*, 2022.
- [17] M. Asadi, R. Hassanzadeh, "On the application of semicircular and Bach-type blades in the internal Savonius rotor of a hybrid wind turbine system," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 221, 2022/10/15/ 2022.  
<https://doi.org/10.1016/j.jweia.2022.104903>.

## بررسی ارتعاشات آزاد تیر خمیده نازک کامپوزیتی - ساندویچی با لایه گذاری متعامد با استفاده از تئوری لایه ای

چکیده: در این مقاله ارتعاشات آزاد تیر خمیده نازک کامپوزیتی - ساندویچی با لایه گذاری متعامد با استفاده از فرمولبندی تئوری لایه ای مورد تحلیل قرار گرفته است. برای فرمولبندی مساله از تئوری لایه ای بر مبنای جابجایی استفاده شده است. جنس رویه ها از کامپوزیت با لایه گذاری متعامد می باشد. ابتدا یک میدان جابجایی کاملاً عمومی دو بعدی برای تیر فرض شده است و میدان کرنش تیر خمیده نازک بر اساس تئوری لایه ای به دست آمده است. سپس با استفاده از اصل همپلتون، معادلات حرکت حاکم و شرایط مرزی متناسب برای تیر خمیده ساندویچی در تئوری لایه ای به دست آمده است. در نهایت با استفاده از یک میدان جابجایی مناسب، معادلات حاکم بر مساله به یک مساله مقدار ویژه تبدیل شده است و فرکانس های طبیعی تیر خمیده کامپوزیتی - ساندویچی با شرایط مرزی ساده استخراج شده است. در قسمت نتایج عددی ابتدا پیش بینی تئوری برای فرکانس های طبیعی صحنه گذاری شده است و سپس فرکانس های ارتعاشات آزاد تیر کامپوزیتی - ساندویچی با شرایط مرزی ساده برای مدهای مختلف از جمله مدهای ارتعاشی خمشی و مدهای در راستای ضخامت استخراج شده است و بررسی پارامتری روی فرکانس های طبیعی انجام شده است.

واژه های راهنما: ارتعاشات آزاد، تئوری لایه ای، تیر خمیده نازک کامپوزیتی - ساندویچی، لایه گذاری متعامد

عیسی احمدی\*  
دانشیار

زهرا  
میرخوند چگینی  
کارشناسی ارشد

مهسا نجفی  
دکتری،  
گروه مهندسی مکانیک،  
دانشگاه زنجان، زنجان

مقاله علمی پژوهشی  
دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۱۴  
بازنگری: ۱۴۰۲/۰۹/۲۰  
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۳۰

## Free vibration of curved thin cross-ply composite-sandwich beam based on layerwise theory

Isa Ahmadi\*  
Associate Professor

Zahra Mirkhond  
Chegini  
MSc.

Mahsa Najafi  
PhD.,  
Department of  
Mechanical  
Engineering  
University of Zanjan,  
Zanjan

**Abstract:** In this study, the free vibration of a thin curved cross-ply composite-sandwich beam resting on the Winkler-Pasternak foundation is analyzed. A displacement based Layerwise theory is used for formulation of the problem. First, a general 2D-displacement field is considered for the curved beam. The strain field of the thin curved beam is obtained based on the strain-displacement relations, and then, the governing equations and the appropriate boundary conditions are derived utilizing the Hamilton's principle. These equations are converted into an eigen-value problem using an appropriate displacement field and the natural frequencies of the curved beam are obtained. Numerical result for free vibration frequencies of simply-supported curved thin cross-ply composite-sandwich beam for different modes, including flexural and thickness modes are obtained and parametric analysis is performed.

**Keywords:** Free vibration, Layerwise theory, Curved thin composite-sandwich beam, Cross-ply lamination, Thickness mode

## ۱- مقدمه

مدول کششی به مدول برشی عرضی در مواد کامپوزیتی، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی از اهمیت زیادی در تحلیل استاتیکی و دینامیکی لایه‌های کامپوزیتی و ساندویچی دارد. گو و همکاران [۱] در سال ۲۰۱۸ یک روش جامعی برای حل پاسخ استاتیکی و دینامیکی یک تیر خمیده با بستر الاستیک ارائه دادند. در سال ۲۰۲۰ بی و همکاران [۲] ارتعاشات عرضی غیرخطی یک تیر خمیده با شرایط مرزی غیرخطی را بررسی کردند. آنها با استفاده از اصل همپلتون تعمیم‌یافته، معادله حاکم برای دینامیک تیر خمیده به دست آوردند. خدابخش پور و همکاران [۳] در سال ۲۰۲۱ ارتعاشات آزاد تیرهای خمیده کامپوزیتی با مقطع پلکانی را مورد تحلیل قرار دادند. در این تحقیق، روش‌های نیمه تحلیلی و المان محدود برای بررسی اثر میرایی در تحلیل ارتعاش توسعه داده شده است. همچنین با توجه به تاثیر پارامترهای مختلف مانند پارامترهای هندسی، شرایط مرزی و جهت گیری الیاف با نرم‌افزار تجاری انسیس<sup>۱</sup> مقایسه شدند. آسیون و همکارش [۴] با استفاده از نظریه زیگزاگ اصلاح شده به بررسی کمانش و تحلیل واکنش استاتیک غیرخطی تیرهای کامپوزیتی-ساندویچی پرداختند. آنها فرمولاسیون غیرخطی تئوری زیگزاگ اصلاح شده را با در نظر گرفتن نواقص هندسی و غیرخطی بودن، از رابطه تنش-جابجایی وون-کارمن توسعه دادند. صیاد و اوهاد [۵] با استفاده از تئوری تیر خمیده مرتبه پنجم به بررسی تاثیر کرنش‌های برشی عرضی و نرمال مانند اثر کشش ضخامت پرداختند. این تئوری تغییرات مرتبه بالاتر جابجایی‌های محوری (مماسی) و عرضی (شعاعی) را در نظر می‌گیرد. در سال ۲۰۱۹ وانگ و زو [۶] ارتعاشات آزاد یک تیر با هسته فوم فلزی تعبیه شده در بستر الاستیک وینکلر-پسترناک را با استفاده از روش چیشف مورد تحلیل قرار دادند. در این تحقیق تئوری تیر تیموشنکو مورد استفاده قرار گرفته و اصل همپلتون برای استخراج شرایط مرزی و معادلات حاکم بر مدل استفاده شده است. در سال ۲۰۲۲ تای [۷] خمش استاتیکی، ارتعاشات آزاد و کمانش تیرهای خمیده دو لایه ساندویچی مدرج تابعی را با استفاده از حل دقیق تحلیلی و تئوری تیر اصلاح شده تیموشنکو انجام داده است. سیستم تیر خمیده متشکل از دو لایه از تیر تک منحنی است که توسط اتصالات برشی به یکدیگر متصل می‌شوند. در سال ۲۰۲۰ دمیر و همکارانش [۸] ارتعاشات تیرهای خمیده ساندویچی سه‌لایه با لایه‌های الاستیک و هسته ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حرکت که

تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی تقویت شده با الیاف کربن کاربرد گسترده‌ای در صنایع هوایی و صنعت هوافضا دارد. پژوهشگران با تجزیه و تحلیل در ساختار کامپوزیت‌های چندلایه به این نکته دست یافته‌اند که در ساختارهای ناهمسانگرد و ناهمگن کامپوزیت‌های چندلایه، پدیده‌های منحصر به فردی می‌تواند در ابعاد هندسی مختلفی اتفاق بیافتد. توزیع تنش برشی بین‌لایه‌ای در سازه‌های کامپوزیتی بطور کلی شکل پیچیده‌ای دارد و این درحالی است که بسیاری از تئوری‌های برشی شکل ساده و از پیش تعیین شده‌ای برای توزیع تنش برشی جانبی در تیرها در نظر می‌گیرند و معمولاً از تنش عمودی جانبی صرف‌نظر می‌کنند. در سازه‌های همگن مانند تیرهای فلزی و در سازه‌های کامپوزیتی زمانی که تاکید اصلی برای تعیین پاسخ کلی سازه نظیر تعیین بار بحرانی کمانش، تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها باشد، تئوری‌های تک‌لایه معادل مانند تئوری کلاسیک و تئوری‌های برشی مخصوصاً برای سازه‌های نازک مناسب است و می‌تواند پیش بینی قابل قبولی برای رفتار سازه ارائه کند. در سازه‌های کامپوزیتی و مخصوصاً سازه‌های ساندویچی به علت پایین بودن نسبت مدول برشی به مدول الاستیک طولی، و تغییر ناگهانی خواص بین هسته و رویه‌ها توزیع تنش برشی شکل پیچیده‌ای دارد و سهم تغییر شکل برشی در پاسخ سازه افزایش می‌یابد. لذا دقت تئوری‌های تک لایه معادل در تحلیل سازه‌های ساندویچی و کامپوزیتی کاهش می‌یابد.

در این مقاله یک فرمولبندی بر اساس تئوری لایه‌ای برای تحلیل رفتار ارتعاشی تیرهای ساندویچی دارای انحنا ارائه شده است که قادر است علاوه بر مدهای ارتعاشی خمشی مدهای در راستای ضخامت را هم پیش‌بینی نمایند. مزیت اصلی این تئوری دقت بالای آن است که به علت در نظر گرفتن فرم کلی برای میدان جابجایی، تمام کرنش‌های برشی و عمودی را با فرم کلی و بدون تحمیل توزیع از پیش تعیین شده در نظر می‌گیرد. مدل ارائه شده قادر به پیش‌بینی تغییر شکل‌ها در راستای ضخامت نیز می‌باشد، لذا تئوری حاضر می‌تواند علاوه بر مدهای خمشی، سایر مدهای ارتعاشی را نیز پیش‌بینی نماید.

## ۲- مروری بر کارهای پیشین

تاکنون مدل‌ها و تئوری‌های زیادی برای تحلیل سازه‌های چندلایه و ساندویچی ارائه شده‌اند. به دلیل بالا بودن نسبت

<sup>1</sup> ANSYS

شکل برشی فرض معتبری نمی‌باشد. در تئوری لایه‌های مشکلات ناشی از ناهمگنی در راستای ضخامت مرتفع می‌شود، زیرا درجات آزادی مستقلی را برای هر لایه در نظر می‌گیرد و پیوستگی از ابتدا ارضا می‌شود، بنابراین نتایج آن قابل مقایسه با راه‌حل‌های الاستیسیته سه‌بعدی است. لذا در این مقاله یک فرمولبندی بر اساس تئوری لایه‌ای بر مبنای جابجایی برای مدلسازی رفتار تیر نازک خمیده کامپوزیتی-ساندویچی ارائه شده است. یک میدان جابجایی عمومی که هیچگونه فرم از پیش تعیین شده‌ای را به تیر تحمیل نمی‌کند برای تیر در نظر گرفته شده است. این میدان جابجایی با توجه به تئوری لایه‌ای که در آن تیر در راستای ضخامت به تعداد زیادی لایه و سطح عددی تقسیم‌بندی می‌شود، می‌تواند شکل عمومی برای توزیع کرنش‌های در راستای طول و ضخامت و همچنین کرنش برشی جانبی پیش‌بینی نماید. لذا کرنش‌های برون‌صفحه‌ای عمودی و برشی بطور کامل در نظر گرفته شده است. لذا جواب‌های این تئوری خطاهایی را که از اعمال میدان جابجایی با فرم از پیش تعیین شده در تئوری‌های تک لایه معادل بوجود می‌آید حذف می‌کند و همچنین می‌تواند علاوه بر مد فرکانس‌های طبیعی خمشی، سایر مودهای ارتعاشی تیر را نیز پیش‌بینی کند که مدهای ضخامت نامیده می‌شوند. در این مقاله معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و از روش ناویر برای حل معادلات و استخراج فرکانس‌های طبیعی تیر نازک خمیده کامپوزیتی-ساندویچی با شرایط مرزی ساده استفاده شده است.

## ۲-۱- تعریف مساله و مدل‌سازی

یک تیر خمیده با شعاع درونی  $R_i$ ، شعاع بیرونی  $R_o$ ، شعاع میانگین  $R$  و ضخامت  $h$  که بر روی بستر الاستیک وینکلر-پسترناک قرار دارد، در نظر گرفته می‌شود. طول آن در شعاع متوسط تیر برابر  $L=R\theta_0$  است. محور مختصات  $r\theta$  مطابق شکل (۱) به تیر متصل شده است که  $r$  راستای شعاعی و  $\theta$  راستای طولی (محیطی) تیر خمیده را نشان می‌دهد. همچنین برای راحتی فرمولبندی، مختصه ضخامت  $z$  بصورت  $z=r-R$  تعریف می‌شود که  $z=0$  سطح میانی تیر را نشان می‌دهد و سطح پایین و بالای تیر در  $z=\pm h/2$  قرار گرفته‌اند. پارامترهای سفتی عمودی (وینکلر) و برشی (پسترناک) تکیه‌گاه به ترتیب با  $K_p$  و  $K_w$  نشان داده می‌شود. تیرخمیده در شکل (۱) نشان داده شده است.

ارتعاشات آزاد تیرهای خمیده را به همراه شرایط مرزی کنترل می‌کند، با استفاده از اصل کار مجازی به طور کلی استخراج می‌شوند. عارفی و نجفی تبار [۹] به بررسی کمانش و ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی پرداختند. تیر ساندویچی از یک هسته نرم متشکل از صفحات کامپوزیتی تقویت‌شده با گرافن تابعی تشکیل شده است. روابط سینماتیکی براساس تئوری تیر ساندویچی مرتبه بالاتر در نظر گرفته شده است و معادلات حاکم با استفاده از فرمول‌بندی ریتز-لاگرانژ استخراج شده است. اوکار و همکارانش [۱۰] فرکانس‌های طبیعی تیرهای ساندویچی را که از هسته متخلخل ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی و صفحات تخت الاستیک همگن فلزی و سرامیکی تشکیل شده است، بررسی کردند. با توجه به ضعف تئوری‌های تک لایه معادل در پیش‌بینی رفتار کامپوزیت‌ها و سازه‌های ساندویچی، یک نظریه لایه‌ای توسط ردی برای آنالیز صفحه کامپوزیتی و ساندویچی ارائه شده است [۱۱]. لیو و همکارانش [۱۲] نظریه‌های لایه‌ای، پیاده‌سازی عددی آن‌ها و کاربرد آن‌ها در تحلیل سازه‌های کامپوزیتی را بررسی کردند. یاسین و همکاران [۱۳] یک نظریه لایه‌ای کارآمد مرتبه سوم برای تجزیه و تحلیل استاتیکی و ارتعاشات آزاد تیرهای خمیده کامپوزیتی ساندویچی با انحنای عمیق ارائه دادند. در سال ۲۰۲۳ نجفی و احمدی [۱۴] روشی برای تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات نانو تیر مدرج تابعی براساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی و تئوری لایه‌ای ارائه دادند. همانگونه که ملاحظه شد، نظریه‌های متعددی برای مدل‌سازی صفحات و تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی توسط محققان مختلف و به دلایل مختلف توسعه داده شده است. تئوری الاستیسیته سه بعدی، تئوری‌های تک لایه معادل، نظریه‌های زیگزاگ، و تئوری‌های لایه‌ای مثال‌های قابل ذکر هستند. تئوری‌های تک لایه معادل نمی‌توانند نتایج قابل قبولی از رفتار سازه‌های کامپوزیتی و ساندویچی ضخیم ارائه کنند. اکثر تئوری‌های ذکر شده قبلی به درستی تنش‌های برشی عرضی را پیش‌بینی نمی‌کنند. به عنوان مثال به دلیل تفاوت سفتی لایه‌های مختلف کامپوزیتی و رویه‌ها و هسته در تیرهای ساندویچی، تئوری‌های تک لایه معادل (با هر مرتبه‌ای) برای تحلیل تنش‌های بین صفحه‌ای این سازه‌ها مناسب نمی‌باشند. این تئوری‌ها بطور کلی فرم تغییر شکل از پیش تعیین شده را برای تیر (ورق) اعمال می‌کنند که دارای فرض‌های ساده کننده است. مثلاً تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول فرض می‌کند که صفحه‌های عمود بر تار میانی بعد از تغییر شکل بصورت صفحه باقی می‌مانند که این فرض در سازه‌های کامپوزیتی-ساندویچی به علت نقش بالای تغییر

با توجه به میدان جابجایی (۱)، کرنش‌های تیر در مختصات استوانه‌ای به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U_k(\theta, t)}{\partial \theta} + W_k(\theta, t) \right) \Phi_k(z) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = W_k(\theta, t) \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} = U_k(\theta, t) \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \\ &+ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial W_k(\theta, t)}{\partial \theta} - U_k(\theta, t) \right) \Phi_k(z) \end{aligned} \quad (3)$$

که در رابطه بالا برای تیرهای نازک که در آن نسبت ضخامت به شعاع تیر خیلی کوچک است ( $h/R \ll 1$ ) مقدار  $r = R(1+z/R) \approx R$  در نظر گرفته شده است. برای بدست آوردن معادلات حاکم بر تیر خمیده از اصل همپلتون استفاده می‌شود که به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\delta \Pi = \int_{t_1}^{t_2} (\delta \Pi_s + \delta \Pi_w - \delta \Pi_k) dt = 0 \quad (4)$$

که در آن  $\delta \Pi_s$ ،  $\delta \Pi_w$  و  $\delta \Pi_k$  تغییرات انرژی کرنشی، تغییرات کارانجام شده توسط نیروهای خارجی و تغییرات انرژی جنبشی تیر است. تغییر انرژی کرنشی در تیر خمیده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta \Pi_s = \int_V (\sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z}) R d\theta dy dz \quad (5)$$

تغییرات کار توسط نیروهای خارجی مربوط به بستر در سطح داخلی تیر به صورت زیر بدست آید:

$$\delta \Pi_w = \int_0^{\theta_0} ((K_w W_1 - K_p \frac{\partial^2 W_1}{R^2 \partial \theta^2}) \delta W_1) R d\theta \quad (6)$$

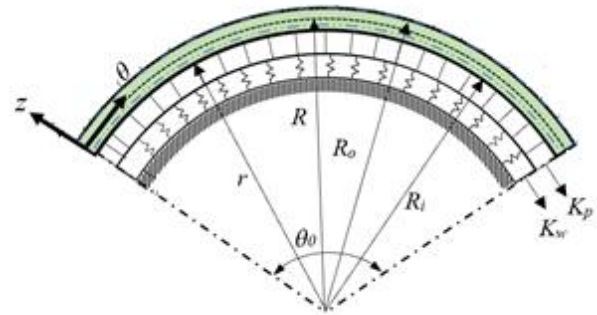
که  $K_w$  ضریب سفتی وینکلر و  $K_p$  ضریب پسترناک بستر است. تغییر انرژی جنبشی با توجه به میدان جابجایی (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\theta_0} E_{kj} \left( \frac{\partial U_j}{\partial t} \frac{\partial \delta U_k}{\partial t} + \frac{\partial W_j}{\partial t} \frac{\partial \delta W_k}{\partial t} \right) R d\theta dt \quad (7)$$

که در آن ماتریس  $E_{kj}$  بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$E_{kj} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \Phi_k(z) \Phi_j(z) dz \quad (8)$$

با استفاده از اصل همپلتون معادلات حاکم بر تیر خمیده به صورت زیر بدست می‌آید.



شکل ۱ هندسه، محورهای مختصات و بستر تیر خمیده ساندویچی

برای فرمولبندی فرض می‌شود که تیر در راستای ضخامت به تعدادی لایه با ضخامت یکنواخت تقسیم شده است که به این لایه‌ها، لایه‌های عددی گفته می‌شود. سطح تماس لایه‌های عددی سطوحی را تشکیل می‌دهد که به آنها سطوح عددی گفته می‌شود. این لایه‌های عددی از سطح داخلی تیر خمیده به سمت سطح بیرونی آن از یک تا  $N$  شماره‌گذاری شده است. همچنین سطوح عددی (شامل سطح پایینی و سطح بالایی تیر) از سطح داخلی تیر خمیده به سمت سطح بیرونی آن، از یک تا  $N+1$  شماره‌گذاری شده است. مولفه‌های جابجایی در سطح عددی  $k$  ام در راستای  $\theta$  و  $z$  به ترتیب با توابع مجهول  $U_k(\theta, t)$  و  $W_k(\theta, t)$  نشان داده می‌شوند. لذا اگر به تعداد  $N$  لایه عددی در تیر در نظر گرفته شود تعداد  $2N+2$  مجهول جابجایی وجود دارد. از مولفه جابجایی در جهت پهنای تیر صرف نظر می‌شود. با در نظر گرفتن جابجایی سطوح عددی، مولفه‌های جابجایی برای تیر را می‌توان به شکل زیر نشان داد.

$$\begin{aligned} u_\theta(\theta, z, t) &= U_k(\theta, t) \Phi_k(z), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N+1 \\ u_r(\theta, z, t) &= W_k(\theta, t) \Phi_k(z) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $u_\theta(\theta, z, t)$  و  $u_r(\theta, z, t)$  مولفه‌های جابجایی تیر در راستای طول تیر  $\theta$  و ضخامت تیر  $z$  هستند.  $k$  اندیس دامی<sup>۱</sup> است و جمع بر روی اندیس تکرارشونده از ۱ تا  $N+1$  انجام می‌شود. علاوه بر این، تابع درونیاب لاگرانژی خطی است که برای یافتن مولفه‌های جابجایی در جهت ضخامت استفاده می‌شود. تابع درونیاب خطی بصورت زیر است.

$$\Phi_k = \begin{cases} 0 & z \leq z_{k-1} \\ \frac{z - z_{k-1}}{h_{k-1}} & z_{k-1} \leq z \leq z_k \\ \frac{z_{k+1} - z}{h_k} & z_k \leq z \leq z_{k+1} \\ 0 & z \geq z_{k+1} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2)$$

<sup>1</sup> Dummy

$$\begin{aligned}
 A_{ab}^{kj} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{C}_{ab} \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \frac{d\Phi_j(z)}{dz} dz \\
 B_{ab}^{kj} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{C}_{ab} \Phi_k(z) \frac{d\Phi_j(z)}{dz} dz \\
 D_{ab}^{kj} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{C}_{ab} \Phi_k(z) \Phi_j(z) dz
 \end{aligned} \quad (14)$$

## ۲-۲- حل معادله

روش ناویر برای بررسی فرکانس ارتعاشات آزاد تیر خمیده لایه‌ای بکار گرفته شده است. شرایط مرزی برای تیر خمیده با مرزهای دوسر ساده (در لبه‌های  $\theta=0$  و  $\theta=\theta_0$ ) با توجه به رابطه (۱۰) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
 M_{\theta}^k(\theta, t) &= \frac{D_{11}^{kj}}{R} \frac{\partial U_j(\theta, t)}{\partial \theta} + (D_{11}^{kj} + B_{13}^{kj}) W_j(\theta, t) = 0 \\
 W_k(\theta, t) &= 0,
 \end{aligned} \quad (15)$$

براساس روش ناویر، برای ارضای شرایط مرزی، مولفه‌های جابجایی به صورت سری‌های مثلثاتی از مکان بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \{U(\theta, t)\} &= \{\bar{U}\}_m \cos(\alpha_m \theta) e^{i\omega_{mp} t} \\
 \{W(\theta, t)\} &= \{\bar{W}\}_m \sin(\alpha_m \theta) e^{i\omega_{mp} t}
 \end{aligned} \quad (16)$$

در این معادله فرکانس طبیعی تیر و  $\alpha_m = m\pi/L$  است. به منظور به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی تیر، با قرار دادن (۱۶) در معادله (۱۳) رابطه حاصل بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$([K] - [M]\omega_{mp}^2) \begin{Bmatrix} \{\bar{U}\}_m \\ \{\bar{W}\}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

که در آن  $\{0\}$  ماتریس ستونی با  $N+1$  مولفه صفر است. همچنین ماتریس‌های  $[K]$  و  $[M]$  صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 [K] &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} E_{kj} & [0] \\ [0] & E_{kj} \end{bmatrix} \\
 [K_{11}] &= \alpha_m^2 D_{11}^{kj} + \frac{1}{R^2} D_{55}^{kj} - \frac{1}{R} (B_{55}^{jk} + B_{55}^{kj}) + A_{55}^{kj} \\
 [K_{12}] &= -\frac{1}{R} (D_{11}^{kj} + D_{55}^{kj}) \alpha_m - (B_{13}^{kj} - B_{55}^{jk}) \alpha_m \\
 [K_{21}] &= -\frac{1}{R} (D_{11}^{kj} + D_{55}^{kj}) \alpha_m - (B_{13}^{jk} - B_{55}^{kj}) \alpha_m \\
 [K_{22}] &= D_{55}^{kj} + \frac{1}{R^2} D_{11}^{kj} + \frac{1}{R} (B_{13}^{kj} + B_{13}^{jk}) + A_{33}^{kj} \\
 &\quad + K_p \delta_{1k} - K_w \delta_{1j}
 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_{\theta}^k}{R \partial \theta} - Q_{\theta}^k + \frac{R_{\theta}^k}{R} &= E_{kj} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial R_{\theta}^k}{R \partial \theta} - \frac{M_{\theta}^k}{R} - N_z^k &= E_{kj} \frac{\partial^3 W}{\partial t^2} + K_w W_k \delta_{1k} \\
 -K_p \frac{\partial^3 W_k}{R^2 \partial \theta^2} \delta_{1k} &
 \end{aligned} \quad (9)$$

و شرایط مرزی ممکن در  $\theta=0$  و  $\theta=\theta_0$  بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 M_{\theta}^k &= 0 \quad \text{or} \quad \delta U_k = 0 \\
 R_{\theta}^k &= 0 \quad \text{or} \quad \delta W_k = 0
 \end{aligned} \quad (10)$$

و همچنین  $M_{\theta}^k, N_z^k, Q_{\theta}^k$  و  $R_{\theta}^k$  بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 (M_{\theta}^k, R_{\theta}^k) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{\theta}, \sigma_{\theta z}) \Phi_k dz \\
 (N_z^k, Q_{\theta}^k) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_z, \sigma_{\theta z}) \frac{d\Phi_k}{dz} dz
 \end{aligned} \quad (11)$$

با توجه به اینکه برای لایه‌های کامپوزیتی زاویه الیاف نسبت به راستای طولی تیر سنجیده شده است (زاویه صفر الیاف در راستای طول تیر و زاویه ۹۰ الیاف در راستای پهنا را نشان می‌دهد) رابطه تنش-کرنش را با توجه به مولفه‌های غیر صفر میدان کرنش که در رابطه (۳) آمده است می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta} \\ \sigma_z \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{13} & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

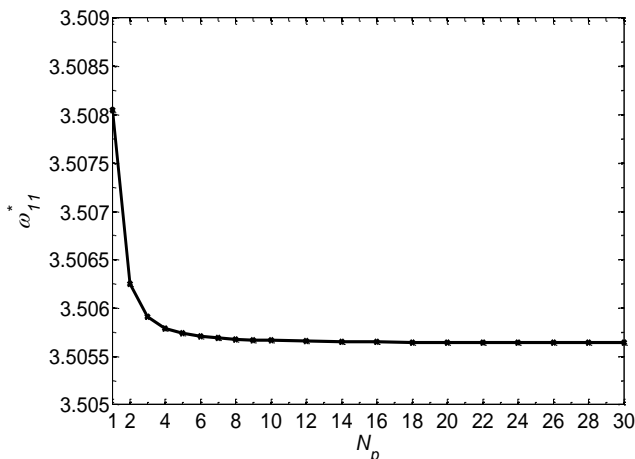
که در آن  $\bar{C}_{ab}$  مولفه‌های تانسور ضرایب الاستیک است. معادلات بر حسب میدان جابجایی بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}
 D_{11}^{kj} \frac{\partial^2 U_j}{R^2 \partial \theta^2} - (A_{55}^{kj} - \frac{1}{R} B_{55}^{jk} - \frac{1}{R} B_{55}^{kj} + \frac{1}{R^2} D_{55}^{kj}) U_j \\
 + (\frac{1}{R} D_{11}^{kj} + B_{13}^{kj} - B_{55}^{jk} + \frac{1}{R} D_{55}^{kj}) \frac{\partial W_j}{R \partial \theta} = E_{kj} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \\
 (B_{55}^{kj} - \frac{1}{R} D_{11}^{kj} - B_{13}^{jk} - \frac{1}{R} D_{55}^{kj}) \frac{\partial U_j}{R \partial \theta} + D_{55}^{kj} \frac{\partial^2 W_j}{R^2 \partial \theta^2} \\
 - (\frac{1}{R^2} D_{11}^{kj} + \frac{1}{R} B_{13}^{kj} + \frac{1}{R} B_{13}^{jk} + A_{33}^{kj}) W_j = K_w W_j \delta_{1j} \\
 - K_p \frac{\partial^2 W_k}{R^2 \partial \theta^2} \delta_{1k} - N^M (\frac{\partial^2 W_{N_c}}{R^2 \partial \theta^2}) + E_{kj} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}
 \end{aligned} \quad (13)$$

معادلات فوق شامل  $2N+2$  معادله دیفرانسیل کوپل است که باید بصورت همزمان حل شوند. همچنین ماتریس‌های ضرایب معادلات فوق ظاهر شده است به صورت زیر تعریف می‌شوند.

دقت نتایج این تئوری به تعداد لایه‌های عددی انتخاب شده بستگی دارد. با افزایش تعداد لایه‌های عددی (سطوح عددی) درجه آزادی مدل برای پیش‌بینی تغییر شکل تیر افزایش می‌یابد و می‌تواند با دقت بالاتر رفتار تیر را پیش‌بینی کند. برای بررسی اثر تعداد لایه‌های عددی بر پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی، ابتدا همگرایی نتایج عددی با افزایش تعداد لایه‌های عددی مورد بررسی قرار گرفته است. تعداد لایه‌های عددی در هر لایه فیزیکی گرافیت-اپوکسی با  $N_p$  نشان داده شده است. همچنین ضخامت تمام لایه‌های عددی در تیر یکسان در نظر گرفته شده است. تیر کامپوزیتی-ساندویچی با لایه‌گذاری [0/90/core/90/0]، که در آن ضخامت هر لایه فیزیکی گرافیت-اپوکسی برابر با  $h_c=0.1h$  و در نتیجه ضخامت هسته برابر  $h_c=0.6h$  می‌باشد در نظر گرفته شده است. در این مقاله ترتیب لایه‌های تیر کامپوزیت-ساندویچی از سطح داخلی تیر خمیده به سمت سطح خارجی آن در داخل کروش از چپ به راست نوشته شده است و زاویه صفر به معنای الیاف طولی تیر و ۹۰ به معنای الیاف در راستای پهنای تیر است.

با توجه به اینکه هر لایه فیزیکی گرافیت-اپوکسی به  $N_p$  لایه عددی تقسیم شده است و با توجه به یکسان بودن ضخامت لایه‌های عددی، در مجموع تعداد لایه‌های عددی در کل این تیر برابر با  $N=10N_p$  است. در شکل (۲) همگرایی فرکانس طبیعی اول خمشی  $\omega_{11}$  ( $p=1, m=1$ ) تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی برای  $L/h=10$  و  $L/R=1$  بررسی شده است.



شکل ۲ بررسی همگرایی فرکانس طبیعی تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی ( $L/h=10, \theta_0=L/R=1$ )

برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی تیر خمیده لازم است که دترمینان  $([K]-\omega_{mp}^2[M])$  برابر با صفر قرار داده شود. برای هر شماره مد  $m$ ، مدهای ارتعاشی مختلفی وجود دارد که با  $p$  نشان داده می‌شوند. اولین مد ارتعاشی ( $p=1$ ) مد خمشی نامیده می‌شود و سایر مدهای ارتعاشی ( $p>1$ ) مد ضخامت نامیده می‌شوند و فرکانس طبیعی مربوط به آن‌ها به صورت  $\omega_{mp}$  نشان داده می‌شود. برای هر  $m, p=1$  مد ارتعاشی خمشی است و برای  $p>1$ ، مدهای ضخامت نامیده می‌شود. تئوری حاضر می‌تواند با در نظر گرفتن فرم کلی برای میدان جابجایی فرکانس‌های طبیعی تیر خمیده مرتبط با مد ضخامت را پیش‌بینی نماید که تئوری‌های تک لایه معادل قادر به پیش‌بینی آن نیستند. علاوه بر مدهای خمشی، مدهای ضخامت می‌توانند نقش مهمی در تحلیل رفتار دینامیکی تیر خمیده ساندویچی داشته باشند. بنابراین بررسی فرکانس‌های طبیعی مربوط به آن‌ها به منظور بررسی دقیق رفتار تیر خمیده ساندویچی دارای اهمیت است.

## ۲-۳- نتایج عددی

تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی با هندسه و شرایط بارگذاری نشان داده شده در شکل (۱)، در نظر گرفته می‌شود. خواص مکانیکی مربوط به لایه‌های گرافیت-اپوکسی و هسته در جدول (۱) نشان داده شده است.

جدول ۱ خواص مکانیکی لایه‌ها گرافیت-اپوکسی و هسته [۱۵]

خواص مواد	$E_1$ (Gpa)	$E_2=$ $E_3$ (Gpa)	$G_{12}=$ $G_{13}$ (Gpa)	$G_{23}$ (Gpa)	$\nu_{12}=$ $\nu_{13}$	$\nu_{23}$
Gr-Ep	137.9	9.0	7.1	6.2	0.3	0.49
Core	0.232	0.232	0.096	0.096	0.2	0.2

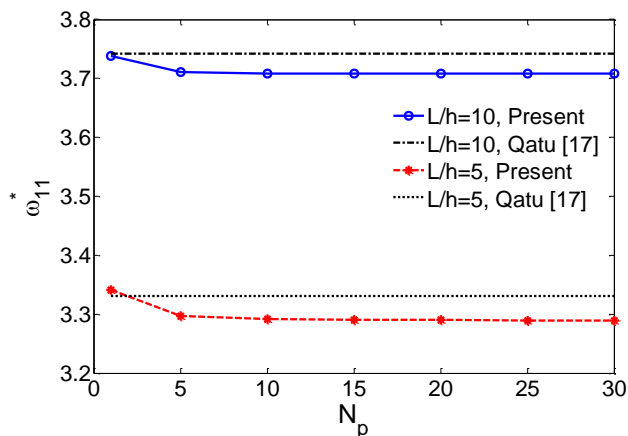
همچنین چگالی لایه‌های گرافیت-اپوکسی برابر  $\rho=1580\text{kg/m}^3$  و چگالی فوم  $\rho=320\text{kg/m}^3$  می‌باشد. همچنین در این مقاله فرکانس طبیعی بی بعد تیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_{mp}^* = \omega L^2 \left( \sqrt{\frac{12\rho}{C_{11}h^2}} \right)_{Gr-Ep} \quad (19)$$

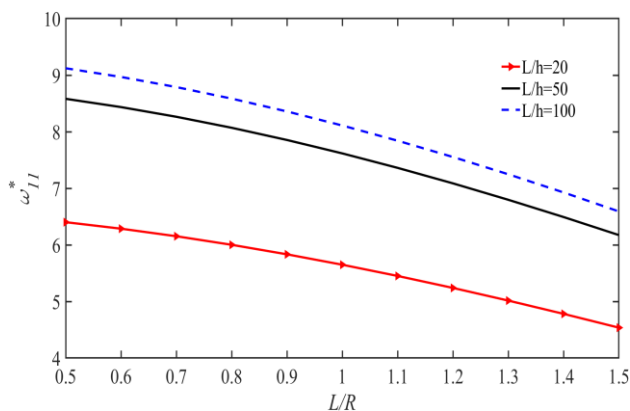
که در آن  $C_{11}$  ضریب الاستیک لایه کامپوزیتی گرافیت-اپوکسی ( $C_{11}=141.24\text{Gpa}$ )، چگالی لایه گرافیت-اپوکسی  $\rho$  و ضخامت تیر می‌باشد.

تیرخمیده کاهش می‌یابد. بار فشاری و ضرایب بستر در این نمودار صفر می‌باشد.

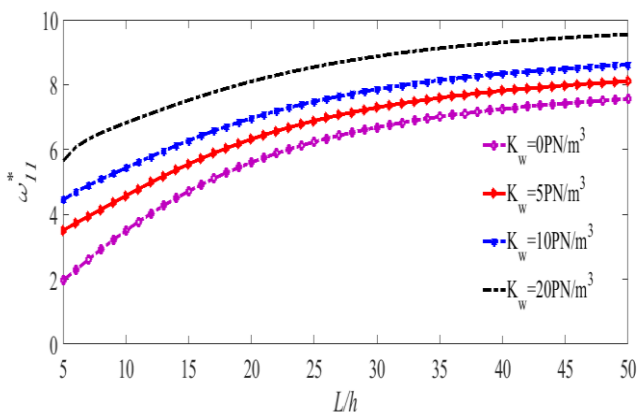
اثر وجود بسترالاستیک وینکلر-پسترناک بر فرکانس طبیعی تیر  $[0/90/core/90/0]$  در شکل‌های (۵) و (۶) ارایه شده است. نسبت  $L/R=1$  و طول تیرخمیده  $L=0.01m$  است. مشاهده می‌شود که افزایش پارامترهای بسترالاستیک وینکلر-پسترناک باعث افزایش فرکانس طبیعی تیرخمیده می‌شود.



شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول بر حسب افزایش تعداد لایه عددی و مقایسه با مرجع [۱۷]



شکل ۴ فرکانس بی بعد تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی  $[0/90/core/90/0]$  در نسبت طول به شعاع مختلف  $L=1m$



شکل ۵ اثر پارامتر بستر وینکلر بر فرکانس طبیعی تیر خمیده

مشاهده می‌شود که به منظور همگرایی نتایج حداقل ۸ لایه عددی برای هر لایه فیزیکی و در مجموع حداقل ۸۰ لایه عددی مورد نیاز می‌باشد. از این رو در تمامی محاسبات و نتایج ارائه شده هر لایه گرافیت-اپوکسی به ۱۰ لایه عددی تقسیم شده و ضخامت لایه‌های عددی در تمام لایه‌ها نیز با هم برابر است. بطور مثال در تیر بررسی شده در نمودار (۲)، هسته به ۶۰ لایه عددی تقسیم شده است.

به منظور بررسی درستی و صحت نتایج عددی، فرکانس طبیعی خمشی اول تا چهارم تیر  $[0/90]$  که با روش حاضر پیش‌بینی شده است، با نتایج مرجع [۱۶] و [۱۷] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود مقادیر فرکانس طبیعی پیش‌بینی شده انطباق خوبی با همدیگر دارند.

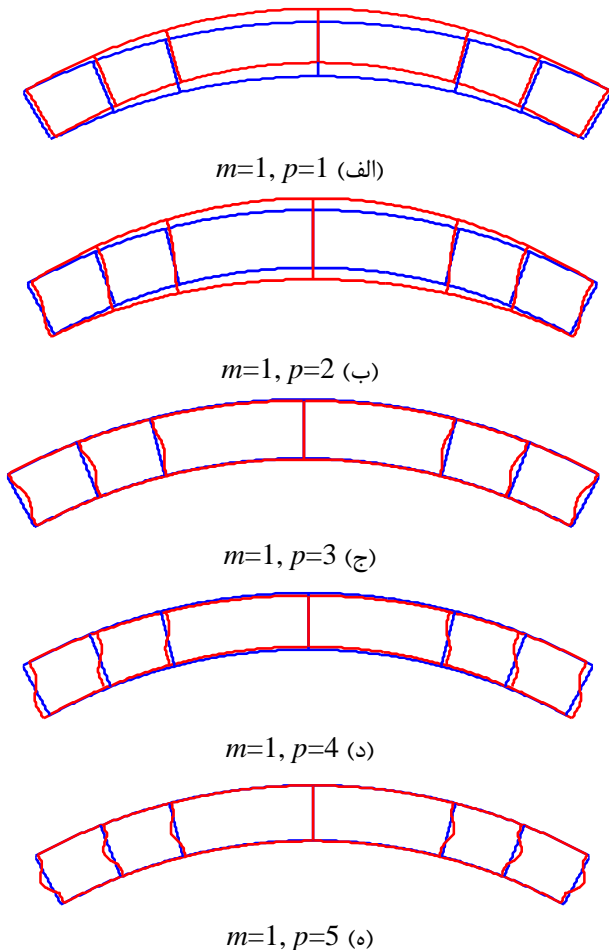
جدول ۲ مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد تیر خمیده کامپوزیتی با لایه‌گذاری  $[0/90]$  و  $(L/h=100)$

	$m$	[17] Deep beam	[16] Shallow beam	Present
$L/R=0.2$	1	4.6707	4.6911	4.6223
	2	18.767	18.792	18.5488
	3	42.255	42.291	41.67667
	4	75.131	75.179	73.8835
$L/R=1$	1	4.0115	4.4725	3.9893
	2	18.030	18.539	17.9172
	3	41.431	41.992	41.0894
	4	74.188	74.823	73.3632

فرکانس طبیعی بی بعد تیر خمیده کامپوزیتی  $[0/90]$  با  $L/h=10$  و  $L/h=5$  برای مقادیر مختلف تعداد لایه عددی  $N$  در شکل (۳) آمده است و با نتایج مرجع [۱۷] مقایسه شده است. همانطور که مشخص است جواب حاضر در عین انطباق با نتایج مرجع [۱۷] از مقادیر این مرجع کوچکتر است. برای تعداد لایه عددی  $N_p=1$ ، نتایج تئوری حاضر و تئوری تک لایه معادل [۱۷] بسیار نزدیک می‌باشند.

شکل (۴) فرکانس بی بعد تیرخمیده کامپوزیتی-ساندویچی را نسبت به تغییرات نسبت طول به شعاع  $(L/R)$  برای سه مقدار مختلف  $L/h$  در تیر ساندویچی  $[0/90/core/90/0]$  نشان می‌دهد. طول تیر ثابت و برابر با  $L=1m$  و ضخامت هسته  $h_c=0.6h$  انتخاب شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به شعاع  $(\theta_0=L/R)$  فرکانس بی بعد

فرکانس‌های خمشی نزدیکتر می‌شوند و نقش آنها در تحلیل رفتار دینامیکی تیر افزایش می‌یابد. همچنین در تیرهای ساندویچی به علت صلبیت پایین هسته نسبت به رویه‌ها ممکن است نقش این مدها قابل توجه باشد. رنگ آبی شکل اولیه تیر و رنگ قرمز شکل تغییر یافته (مد ارتعاشی) را نشان می‌دهد.

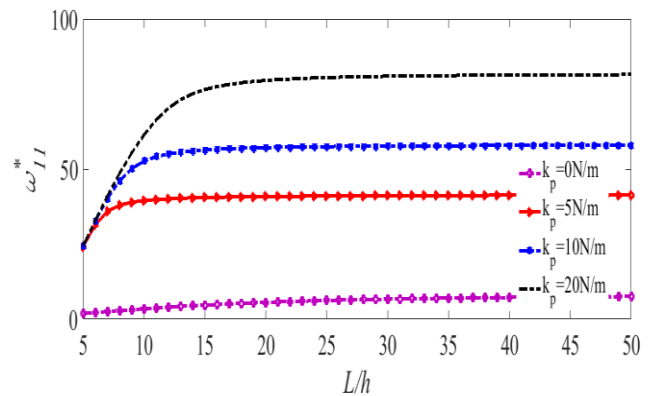


شکل ۷ شکل مدهای تیر خمیده [0/0/core/0/0] مربوط به مد خمشی اول  $m=1$  و شماره‌های مختلف مد ضخامت  $(L=1m, L/h=10, K_W=K_P=P_0=0, h_c=0.6h)$

فرکانس‌های طبیعی مربوط به شکل مدهای نشان داده شده در شکل (۷) برای مدهای اول تا چهارم مد ضخامت  $m=1$ ،  $(p=1, \dots, 4)$  در جدول (۳) تا جدول (۵) برای لایه‌گذاری‌های مختلف برای  $L=1m$  و  $h_c=0.6h$  آمده است.

جدول ۳ فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ضخامت مختلف تیر خمیده ساندویچی [0/0/core/0/0]  $(m=1, h_c=0.6h, L/R=1)$

$L/h$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
10	3.5469	55.1950	86.3150	113.2533
20	5.8545	193.5285	214.5570	270.1188
30	7.3641	294.9878	430.3295	535.2066



شکل ۶ اثر پارامتر بستر پسترناک بر فرکانس طبیعی تیر خمیده

همانگونه که ذکر شد مدل ارایه شده می‌تواند تغییر شکل‌های پیچیده تیر از جمله تغییر شکل برشی پیچیده و تراکم هسته و رویه‌ها را در نظر بگیرد و علاوه بر مدهای خمشی، مدهای ارتعاشی دیگری را نیز پیش‌بینی می‌کند. بطور مثال تئوری مرتبه اول برشی فرض می‌کند که صفحات عمود بر تار میانی بعد از تغییر شکل صفحه باقی می‌مانند و تئوری اویلر برنولی فرض می‌کند که صفحات عمود بر تار میانی بعد از تغییر شکل بصورت صفحه عمود بر تار میانی باقی می‌مانند. همچنین تئوری‌های مرتبه بالاتر نیز فرم از پیش تعیین شده‌ای برای تغییر شکل تیر در نظر گرفته و آن را بر تیر تحمیل می‌کند. تئوری حاضر هیچگونه فرم از قبل تعیین شده‌ای برای جابجایی در نظر نمی‌گیرد و با افزایش تعداد لایه‌های عددی می‌تواند تغییر شکل‌های پیچیده را پیش‌بینی کند. همانگونه که قبلاً گفته شد، برای هر شماره مد  $m$  مدهای ارتعاشی مختلفی وجود دارد که با  $p$  نشان داده می‌شوند. اولین مد ارتعاشی ( $p=1$ ) مد خمشی نامیده می‌شود و سایر مدهای ارتعاشی ( $p>1$ ) مد ضخامت نامیده می‌شود. شکل (۷) مدهای ارتعاشی تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی [0/0/core/0/0] برای شماره مدهای ارتعاشی مختلف مد ضخامت ( $p$ ) در مد اول خمشی ( $m=1$ ) شامل مدهای  $(m=1, p=1)$ ،  $(m=1, p=2)$ ،  $(m=1, p=3)$ ،  $(m=1, p=4)$  و  $(m=1, p=5)$  را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود در  $p=1$  صفحات عمود بر صفحه میانی، بعد از تغییر شکل هم تقریباً به شکل صفحه باقی مانده است ولی در  $p=2$  تا  $p=5$  این صفحات تغییر شکلی یافته است که نشان دهنده شکل‌های پیچیده از توزیع تغییر شکل در راستای ضخامت است که تئوری‌های تک لایه معادل توان پیش‌بینی آنها را ندارند. این مدهای ارتعاشی مدهای ضخامت نامیده می‌شوند. فرکانس این مدها از مود خمشی بسیار بالاتر است. در تیرهای کامپوزیتی ضخیم این فرکانس‌ها به

## ۳- نتیجه گیری

در این پژوهش از تئوری لایه‌ای به منظور مطالعه رفتار ارتعاشات آزاد تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی روی بستر وینکلر-پسترناک استفاده شده است. تئوری لایه‌ای بر خلاف تئوری‌های تکنیکی تک‌لایه معادل که فرم از پیش تعیین شده برای جابجایی تیر در نظر می‌گیرند فرم جابجایی (تغییر شکل) عمومی برای تیر در نظر می‌گیرد و لذا می‌تواند رفتار تیر کامپوزیتی-ساندویچی را با دقت بالایی پیش‌بینی نماید. این مساله در تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی که تغییر شکل‌های برشی نقش بیشتری در تعیین رفتار تیر دارند اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. در تئوری حاضر فرض می‌شود که هر لایه از تیر کامپوزیتی-ساندویچی در راستای ضخامت از تعدادی لایه فرضی تشکیل شده است، لذا هر لایه فیزیکی تیر به تعداد مشخصی لایه عددی تقسیم می‌شود. نتایج پیش‌بینی شده توسط تئوری حاضر با تئوری‌های به کار رفته در مقالات دیگر مورد مقایسه قرار گرفته و همگرایی نتایج نیز بررسی شده است. با توجه به مطالعات صورت گرفته در بخش‌های پیشین، نتایج زیر حاصل شده است.

- تئوری حاضر بر خلاف تئوری‌های تغییر شکل برشی فرم کلی برای میدان جابه‌جایی، کرنش و پتانسیل الکتریکی در نظر گرفته است. به بیان دیگر این تئوری از کرنش‌های برون صفحه‌ای برشی و عمودی در تیر صرف‌نظر نمی‌کند و بلکه فرم کاملاً عمومی برای آن در نظر می‌گیرد. لذا در تئوری حاضر نتایج پیش‌بینی شده برای فرکانس طبیعی کوچکتر از نتایج تئوری‌های تغییر شکل برشی است که از بعضی کرنش‌ها صرف‌نظر می‌کنند یا توزیع از پیش تعیین شده‌ای برای آن در نظر می‌گیرد.

- بر خلاف تئوری‌های تغییر شکل برشی، تئوری حاضر می‌تواند مقادیر فرکانس طبیعی مرتبط با مدهای ارتعاشی ضخامت را پیش‌بینی نماید. مطالعه دقیق رفتار ارتعاشی تیرخمیده نیازمند در نظر گرفتن فرکانس‌های طبیعی مرتبط با مدهای ارتعاشی خمشی و ضخامت است و از این‌رو به نظر می‌رسد تئوری ارائه شده در پژوهش حاضر می‌تواند پیش‌بینی دقیق‌تری از رفتار دینامیکی تیرخمیده کامپوزیتی-ساندویچی ارائه نماید.

- افزایش نسبت طول بر ضخامت تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد آن می‌گردد.
- افزایش نسبت طول به شعاع تیرخمیده کامپوزیتی-ساندویچی باعث کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود.

جدول ۴ فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ضخامت مختلف تیر خمیده ساندویچی  $(m=1, h_c=0.6h, L/R=1)$  [0/90/core/90/0]

$L/h$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
10	3.5057	54.5559	68.7174	87.2795
20	5.6139	143.2080	197.7427	241.2394
30	6.7010	216.4461	385.7756	523.5894

جدول ۵ فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ضخامت مختلف تیر خمیده ساندویچی  $(m=1, h_c=0.6h, L/R=1)$  [0/0/core/90/90]

$L/h$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
10	2.7509	33.7984	56.6836	96.7508
20	3.4125	96.1311	213.5804	249.2263
30	3.6010	174.0748	404.7613	524.2572

اثرات پارامترهای مربوط به بستر بر فرکانس طبیعی تیرخمیده کامپوزیتی-ساندویچی برای لایه‌گذاری‌های مختلف متقارن و نامتقارن در جدول (۶) آمده است. مشاهده می‌شود که افزایش پارامترهای مربوط به بستر الاستیک وینکلر-پسترناک باعث افزایش فرکانس طبیعی تیرخمیده می‌شود. اثر جابجا شدن محل قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی در رویه‌ها بر فرکانس طبیعی تیر ساندویچی در این جدول مشاهده می‌شود. فرکانس طبیعی مربوط به تیر با لایه‌گذاری [0/90/core/90/0] بزرگتر از فرکانس طبیعی تیر با لایه‌گذاری [90/0/core/0/90] است. همچنین فرکانس طبیعی این تیرها از تیر با لایه‌گذاری نامتقارن [90/90/core/0/0] بزرگتر است. همچنین مقادیر بی‌بعد مربوط به بستر بصورت زیر تعریف شده است.

$$K_0 = K_W (E_1 I / L^4), K_1 = K_P (E_1 I \pi^2) / L^2 \quad (20)$$

جدول ۶ فرکانس طبیعی  $\omega_{11}^*$  تیرخمیده ساندویچی برای پارامترهای بی‌بعد مربوط به بستر الاستیک  $K_W, K_P$  ( $L=1m, L/R=1, L/h=20, h_c=0.6h$ )

$K_I$	$K_0$	[90/0/core/0/90]	[0/90/core/90/0]	[90/90/core/0/0]
0	0	4.5289	5.6139	3.2810
	10	6.1312	6.9733	5.2287
	20	7.3928	8.1067	6.6249
0.1	0	7.3206	8.0377	6.5608
	10	8.4063	9.0393	7.7203
	20	9.3659	9.9395	8.7256
0.2	0	9.3091	9.8834	8.6775
	10	10.1847	10.7135	9.5833
	20	10.9898	11.4829	10.4096

*Structures & Materials*, vol. 22, no. 7, pp. 2250-2286, 2020. doi: <https://doi.org/10.1177/1099636218795381>.

[5] A. S. Sayyad, and P. V. Avhad, "A new higher order shear and normal deformation theory for the free vibration analysis of sandwich curved beams". *Composite Structures*, vol. 280, no., pp. 114948, 2022. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114948>.

[6] Y. Q. Wang, H. L. Zhao, "Free vibration analysis of metal foam core sandwich beams on elastic foundation using Chebyshev collocation method". *Archive of Applied Mechanics*, vol. 89, no., pp. 2335-2349, 2019. doi: <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01579-0>.

[7] H. N. Thi, "On mechanical behavior of two-layer functionally graded sandwich curved beams resting on elastic foundations using an analytical solution and refined Timoshenko Beam Theory". *Ain Shams Engineering Journal*, vol. 13, no. 4, pp. 101647, 2022. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asej.2021.11.016>.

[8] O. Demir, D. Balkan, R. C. Peker, M. Metin, and A. Arikoglu, "Vibration analysis of curved composite sandwich beams with viscoelastic core by using differential quadrature method". *Journal of Sandwich Structures & Materials*, vol. 22, no. 3, pp. 743-770, 2020. doi: <https://doi.org/10.1177/1099636218767491>.

[9] M. Arefi, and F. Najafitabar, "Buckling and free vibration analyses of a sandwich beam made of a soft core with FG-GNPs reinforced composite face-sheets using Ritz Method". *Thin-Walled Structures*, vol. 158, no., pp. 107200, 2021. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107200>.

[10] M. Avcar, L. Hadji, and R. Akan, "The influence of Winkler-Pasternak elastic foundations on the natural frequencies of imperfect functionally graded sandwich beams". *Geomechanics and Engineering*, vol. 31, no. 1, pp. 099, 2022. doi: <https://doi.org/10.12989/gae.2022.31.1.099>.

[11] J. N. Reddy, "Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis", CRC press, 2003, ISBN:9780203502808, 0203502809.

[12] K. Liew, Z. Pan, and L. Zhang, "An overview of layerwise theories for composite laminates and structures: Development, numerical implementation and application". *Composite Structures*, vol. 216, no., pp. 240-259, 2019. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.074>.

[13] M. Y. Yasin, H. M. Khalid, and M. S. Beg, "Exact solution considering layerwise mechanics for

• وجود بستر وینکلر-پسترناک به دلیل افزایش سفتی تیرخمیده کامپوزیتی-ساندویچی، باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی آن می‌گردد.

#### ۴- فهرست علائم و اختصارات

علائم انگلیسی	
$u_{\theta}(\theta, z), u_r(\theta, z)$	مولفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای $\theta$ و $z$
$U_i(\theta), W_i(\theta)$	جابه‌جایی سطح عددی $i$ ام در راستای $\theta$ و $z$
$\Phi_k(z)$	تابع درون یاب لاگرانژی برای سطح عددی $k$ ام
$\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}$	کرنش‌های نرمال و برشی
$\sigma_{ij}$	مولفه‌های تنش
$\rho$	چگالی
$\delta \pi_s$	تغییر انرژی کرنشی
$\delta \pi_w$	تغییر کار انجام شده توسط نیروهای خارجی
$\delta \pi_k$	تغییر انرژی جنبشی
$K_w$	پارامتر عمودی بستر الاستیک
$K_p$	پارامتر برشی بستر الاستیک
$P_0$	بار محوری
$\omega_{mp}$	فرکانس طبیعی
$N_p$	تعداد لایه‌های عددی فرضی
$h, b, L$	طول، عرض و ضخامت تیرخمیده
زیرنویس‌ها	
$p, m$	شماره مدهای ارتعاشی

#### ۵- مراجع

- [1] J. Guo, D. Shi, Q. Wang, F. Pang and Q. Liang, "A domain decomposition approach for static and dynamic analysis of composite laminated curved beam with general elastic restrains". *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 26, no. 16, pp. 1390-1402, 2019. doi: <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1432810>.
- [2] S. Q. Ye, X.Y. Mao, H. Ding, J.C. Ji, and L. Q. Chen, "Nonlinear vibrations of a slightly curved beam with nonlinear boundary conditions". *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 168, no., pp. 105294, 2020. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105294>.
- [3] S. Khodabakhshpour-Bariki, R.-A. Jafari-Talookolaei, M. Attar, and A. Eyvazian, "Free vibration analysis of composite curved beams with stepped cross-section". *Structures*, vol. 33, no., pp. 4828-4842, 2021. doi: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.07.041>.
- [4] A. Ascione and M. Gherlone, "Nonlinear static response analysis of sandwich beams using the Refined Zigzag Theory". *Journal of Sandwich*

- Structures & Materials*, vol. 21, no. 1, pp. 320-365,2019. doi: <https://doi.org/10.1177/1099636217693623>.
- [16] M. Qatu, "In-plane vibration of slightly curved laminated composite beams". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 159, no. 2, pp. 327-338,1992. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(92\)90039-Z](https://doi.org/10.1016/0022-460X(92)90039-Z).
- [17] M. S. Qatu, "Theories and analyses of thin and moderately thick laminated composite curved beams". *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, no. 20, pp. 2743-2756,1993. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90152-W](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90152-W).
- laminated composite and sandwich curved beams of deep curvatures". *Composite Structures*, vol. 244, no., pp. 112258,2020. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112258>.
- [14] M. Najafi, and I. Ahmadi, "Nonlocal layerwise theory for bending, buckling and vibration analysis of functionally graded nanobeams". *Engineering with Computers*, vol. 39, no. 4, pp. 2653-2675,2023. doi: <https://doi.org/10.1007/s00366-022-01605-w>.
- [15] F. Tornabene, N. Fantuzzi, and M. Baccocchi, "Foam core composite sandwich plates and shells with variable stiffness: Effect of the curvilinear fiber path on the modal response". *Journal of Sandwich*

## اهمیت انتشار عدم قطعیت در مطالعات و بررسی روش های تخمین آن

**چکیده:** عدم قطعیت در اندازه گیری ها، محاسبات و شبیه سازی ها یکی از موضوعات مهم و چالش برانگیز است که در مطالعات، کمتر مورد توجه قرار می گیرد. گزارش نتایج بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت های محتمل، می تواند موجب نتیجه گیری های نادرست گردد. جهت محاسبه انتشار عدم قطعیت از ورودی های یک مسئله به خروجی های آن، روش های تحلیلی و احتمالات متعددی گسترش یافته اند. در این تحقیق به معرفی و بررسی مهم ترین روش های محاسبه انتشار عدم قطعیت پرداخته شده است. روش های مورد بررسی شامل روش های تحلیلی انتشار بیشترین عدم قطعیت - بروت فورس، ترکیب بدترین حالت و انتشار واریانس و همچنین روش احتمالاتی مونت کارلو می باشد. در ادامه برای تابع دبی جرمی که حاصل ضرب سه پارامتر چگالی، سطح مقطع و سرعت است، بازه عدم قطعیت به روش های مختلف محاسبه و مقایسه شده است. مهمترین هدف از تحقیق حاضر تاکید بر اهمیت توجه به پارامتر عدم قطعیت به عنوان عاملی تأثیرگذار در تحلیل نتایج مطالعات مختلف به ویژه در حوزه مسائل مهندسی است.

**واژه های راهنما:** عدم قطعیت، خطا، انتشار عدم قطعیت، انتشار واریانس، بازه اطمینان

زهرا ایمانی نژاد

مدرس حق التدریس،  
گروه مهندسی مکانیک،  
مجتمع آموزش عالی گناباد،  
گناباد

**حمید بهلولی\***

استادیار،  
گروه مهندسی مکانیک،  
واحد بیرجند،  
دانشگاه آزاد اسلامی،  
بیرجند

مقاله مروری

دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۲۶

بازنگری: ۱۴۰۳/۰۱/۲۳

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۳۱

**Zohreh Imani Nejad**  
Adjunct Professor,  
Department of  
Mechanical Engineering,  
University of Gonabad,  
Gonabad

**Hamid Bohluli\***  
Assistant Professor,  
Department of  
Mechanical Engineering,  
Islamic Azad University,  
Birjand Branch,  
Birjand

## The importance of uncertainty propagation in studies and investigation of the methods to estimate it

**Abstract:** The consideration of uncertainty in measurements, computations, and simulations is one of the most challenging issues, often overlooked. Reporting results without taking possible uncertainties into account can lead to incorrect decisions. This study delves into various analytical and probabilistic methods for computing uncertainty propagation. It explores key analytical methods, such as the propagation of maximum uncertainty-Brute Force, the worst combination method, and variance propagation. Additionally, the study examines the Monte Carlo probabilistic approach. Subsequently, the study applies these methods to calculate the uncertainty in flow mass, which is determined by multiplying density, area, and velocity, using different approaches. This study emphasizes the importance of uncertainty as an effective parameter in different studies especially in engineering.

**Keywords:** Uncertainty, Error, Uncertainty propagation, Variance propagation, Confidence intervals

۱- مقدمه

اخیر گزارش نتایج همراه با بازه‌ی عدم قطعیت محتمل، در مطالعات حوزه‌ی مهندسی مکانیک نیز مانند سایر علوم رشد چشمگیری داشته است [۶-۸]، اما هنوز هم نیاز به توجه بیش‌تر به این موضوع وجود دارد.

۲- انتشار عدم قطعیت

بسیاری از کمیت‌های فیزیکی به صورت مستقیم قابل اندازه‌گیری نیستند و با کمک توابع ریاضی که دارای ورودی متغیرهای مستقل هستند، محاسبه می‌شوند. مثلاً کمیت  $F$  در رابطه‌ی (۱) وابسته به متغیرهای  $x_i$  است. از جمله کمیت‌های وابسته می‌توان به چگالی، سرعت، شتاب، توان، گرما و دبی اشاره نمود.

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (1)$$

اندازه‌گیری هر یک از متغیرهای مستقل  $x_i$  با درجه‌ای از عدم قطعیت همراه است. چنانچه هر یک از این متغیرها دارای میانگین  $\bar{x}_i$  و عدم قطعیت  $\delta x_i$  باشند، عدم قطعیت برای هر یک از آن‌ها به صورت رابطه‌ی (۲) گزارش می‌شود.

$$x_i = \bar{x}_i + \delta x_i \quad (2)$$

عدم قطعیت در پارامترها و متغیرهای ورودی یک تابع می‌تواند از طریق محاسبات ریاضی منتشر شده و باعث بروز عدم قطعیت در خروجی تابع گردد که به آن انتشار عدم قطعیت<sup>۵</sup> گفته می‌شود. به عنوان مثال دبی جرمی  $\dot{m}$  را در نظر بگیرید که طبق رابطه‌ی (۳) تابعی از چگالی  $\rho$ ، سطح مقطع  $A$  و سرعت  $v$  است. مقادیر گزارش شده برای هر یک از این کمیت‌ها به همراه بازه‌ی عدم قطعیت مربوط به آن در روابط (۴) تا (۶) بیان شده است که از طریق محاسبات منتشر شده و موجب بروز عدم قطعیت در  $\dot{m}$  می‌گردد. در ادامه عدم قطعیت برای  $\dot{m}$  محاسبه شده است.

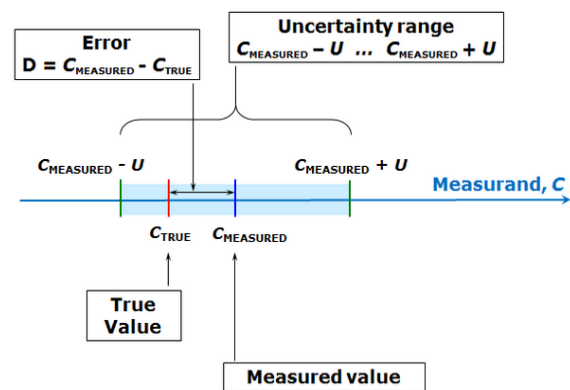
$$\dot{m} = \rho A v \quad (3)$$

$$\rho = 2.0 \pm 0.25 \frac{gr}{cm^3} \quad (4)$$

$$A = 3.4 \pm 0.075 cm^2 \quad (5)$$

$$v = 2.0 \pm 0.125 \frac{cm}{s} \quad (6)$$

عدم قطعیت<sup>۱</sup> در لغت به معنای شک و تردید است و اصطلاح رایج عدم قطعیت در اندازه‌گیری<sup>۲</sup> به معنی تردید درباره‌ی اعتبار نتایج یک اندازه‌گیری است [۱، ۲]. عدم قطعیت مفهومی پیچیده است که در منابع مختلف، تفاسیر گوناگونی نظیر ناکامل بودن<sup>۳</sup>، ناسازگاری<sup>۴</sup>، غیرقابل اعتماد بودن<sup>۵</sup>، احتمال خطا و محدوده‌ی خطا برای آن بیان شده است [۳]. باید توجه داشت که عدم قطعیت و خطا<sup>۶</sup> دو مفهوم کاملاً متفاوت هستند. خطا به معنی تفاوت بین مقدار اندازه‌گیری شده و مقدار دقیق یا مرجع<sup>۷</sup> است. از آنجا که مقدار واقعی یک کمیت دقیقاً مشخص نیست، لذا خطا یک مفهوم ایده‌آل است و امکان تعیین مقدار دقیق آن وجود ندارد. عدم قطعیت اطلاعاتی در مورد کیفیت اندازه‌گیری بیان می‌کند و به صورت یک گستره یا بازه که نشان‌گر مقدار احتمالی خطا در اندازه‌گیری‌های متعدد است، گزارش می‌شود. گاهی ممکن است نتیجه یک اندازه‌گیری به صورت اتفاقی و ندانسته دارای خطای بسیار ناچیز و یا حتی صفر باشد، یعنی ممکن است مقدار اندازه گرفته شده بر مقدار مرجع منطبق باشد در حالی که اندازه‌گیری با عدم قطعیت بالایی همراه است. در شکل (۱) تفاوت مفهوم خطا و عدم قطعیت نشان داده شده است. حتی دقیق‌ترین وسایل اندازه‌گیری نیز با درجه‌ای از عدم قطعیت همراه هستند، لذا احتساب عدم قطعیت در تصمیم‌گیری‌ها اهمیت زیادی دارد [۴].



شکل ۱ تفاوت مفهوم خطا و عدم قطعیت [۵]

بیان نتایج بدون توجه عدم قطعیت مربوط به آن‌ها می‌تواند سبب تصمیم‌گیری‌های نادرست گردد [۳]. گرچه در سال‌های

<sup>5</sup> Unreliability

<sup>6</sup> Error

<sup>7</sup> True value or Reference value

<sup>8</sup> Uncertainty propagation

<sup>1</sup> Uncertainty

<sup>2</sup> Uncertainty of Measurement

<sup>3</sup> Incompleteness

<sup>4</sup> Inconsistency

$$\delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial x_2} \delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i \right| \quad (12)$$

برای دبی جرمی با استفاده از روابط (۳) و (۱۲) داریم:

$$\delta \dot{m} = \left| \frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} \delta \rho \right| + \left| \frac{\partial \dot{m}}{\partial A} \delta A \right| + \left| \frac{\partial \dot{m}}{\partial v} \delta v \right| \quad (13)$$

$$\delta \dot{m} = A v \delta \rho + \rho v \delta A + \rho A \delta v \quad (14)$$

مقدار عددی دبی جرمی در این روش مقدار زیر بدست می‌آید.

$$\dot{m} = 13.6 \pm 2.85 \frac{gr}{s} \quad (15)$$

### ۳-۳- روش انتشار واریانس-تحلیلی

در این روش برای محاسبه‌ی عدم قطعیت از رابطه‌ی (۱۶) استفاده می‌شود.

$$\delta F(x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \delta x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \delta x_{(i,j)} \quad (16)$$

عبارت  $2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \delta x_{(i,j)}$  کواریانس نامیده می‌شود و در صورتی که  $x_i$  ها دارای وابستگی به هم باشند، دارای مقدار است ولی اگر متغیرهای  $x_i$  مستقل از یکدیگر باشند، عبارت کواریانس صفر است. عبارت‌های  $\delta x_i^2$  و  $\delta F(x_i)^2$  نیز واریانس هستند که در واقع توان دوم عدم قطعیت‌ها می‌باشند.

$$\delta F(x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \delta x_i^2 \quad (17)$$

رابطه‌ی (۱۷) به عنوان قانون عمومی انتشار عدم قطعیت<sup>۴</sup> شناخته می‌شود. با استفاده از رابطه‌ی دبی جرمی (رابطه‌ی (۳))، قانون عمومی انتشار عدم قطعیت به فرم زیر حاصل می‌شود.

### ۳- روش‌های متداول جهت محاسبه‌ی انتشار عدم قطعیت

جهت محاسبه انتشار عدم قطعیت روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی وجود دارند که در ادامه به معرفی مهم‌ترین آن‌ها پرداخته شده است. سپس به کمک هر روش، عدم قطعیت دبی جرمی محاسبه و در انتها روش‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

#### ۳-۱- روش انتشار بیش‌ترین عدم قطعیت-بروت فورس

روش انتشار بیش‌ترین عدم قطعیت-بروت فورس<sup>۱</sup> از کران‌های بالا و پایین بازه عدم قطعیت هر یک از متغیرهای دخیل در مسئله استفاده می‌کند. در واقع با دانستن رابطه‌ی ریاضی و مقادیر حداقل و حداکثر بازه عدم قطعیت هر یک از متغیرها، کمترین و بیش‌ترین عدم قطعیت ممکن برای مسئله محاسبه می‌شود. به این روش، روش حد بالا و پایین<sup>۲</sup> نیز گفته می‌شود. این روش بیشترین عدم قطعیت ممکن در خروجی را محاسبه می‌کند. برای مثال دبی جرمی، می‌توان با توجه به مقادیر عدم قطعیت داده شده برای هر کمیت، حد بالا و پایین آن‌ها را از روابط (۴) تا (۶) به صورت زیر محاسبه نمود.

$$1.75 < \rho < 2.25 \quad (7)$$

$$3.325 < A < 3.475 \quad (8)$$

$$1.875 < v < 2.125 \quad (9)$$

بنابراین طبق رابطه‌ی (۳)، با ضرب کران‌های بالا در هم و همچنین کران‌های پایین در هم، کران بالا و پایین دبی جرمی تا یک رقم اعشار به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\dot{m} = \bar{\dot{m}} \pm \delta \dot{m} \quad (10)$$

$$10.91 < \dot{m} < 16.61 \quad (11)$$

#### ۳-۲- روش انتشار بیش‌ترین خطا-تحلیلی

به این روش، روش ترکیب بدترین حالت<sup>۳</sup> هم گفته می‌شود و از رابطه‌ی (۱۲) محاسبه می‌شود.

<sup>3</sup> Worst-case combination method

<sup>4</sup> General law of uncertainty propagation

<sup>1</sup> Propagation of max uncertainty-Brute Force

<sup>2</sup> Upper lower bound method

$$\delta m^2 = (Av)^2(\delta\rho)^2 + (\rho v)^2(\delta A)^2 + (\rho A)^2(\delta v)^2 \quad (18)$$

با جایگزینی مقادیر عددی از روابط (۴) تا (۶)، بازه‌ی عدم قطعیت برای دبی جرمی بدست می‌آید.

$$m = 13.6 \pm 1.92 \frac{gr}{s} \quad (19)$$

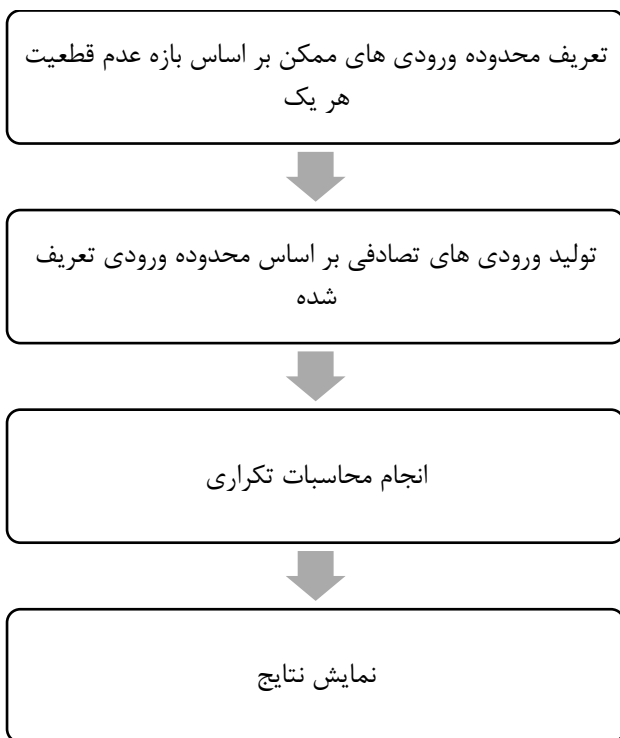
### ۳-۴- روش احتمالاتی مونت کارلو

در مسائل پیچیده که رابطه‌ی تحلیلی مشخصی بین پارامترهای دخیل در مسئله وجود ندارد، از روش‌های احتمالاتی جهت محاسبه‌ی انتشار عدم قطعیت استفاده می‌گردد. یکی از مشهورترین روش‌های تخمین عدم قطعیت مبتنی بر احتمالات، روش احتمالاتی مونت کارلو<sup>۱</sup> است که در دهه‌ی ۱۹۴۰ میلادی توسط جان ون نومن و استینسلاو اولام معرفی شد. روش مونت کارلو به هر تکنیکی گفته می‌شود که با نمونه‌سازی آماری، پاسخ‌های تقریبی برای مسائل کمی فراهم نماید. به طور کلی روش‌های مونت کارلو بر این اصل استوار است که اگر ورودی‌های توصیف کننده‌ی یک سیستم غیر قطعی باشند آن‌گاه پیش‌بینی عملکرد پیش‌رو نیز الزاما غیرقطعی است. ورودی روش فوق به جای یک مقدار منحصر به فرد، یک توزیع احتمال است و تحلیل مبتنی بر ورودی‌هایی با توزیع احتمال، خود یک توزیع احتمال خواهد بود. روش مونت کارلو بر مبنای اتکا بر محاسبات تکراری و اعداد تصادفی، به گونه‌ای تنظیم می‌شود که توسط رایانه اجرا شود. از روش مونت کارلو به عنوان رایج‌ترین روش برای پیش‌بینی عدم قطعیت در سیستم‌های پیچیده و با ورودی‌های فراوان یاد می‌شود.

در شبیه‌سازی مونت کارلو کل سیستم به تعداد دفعات بسیار زیادی مثلا هزاران بار اجرا می‌شود که هر بار شبیه‌سازی، یک تحقق<sup>۲</sup> سیستم نامیده می‌شود. در هر مرحله از شبیه‌سازی، از همه‌ی پارامترهای غیرقطعی نمونه برداری می‌شود، یعنی یک مقدار تصادفی از توزیع اختصاصی مربوط به هر پارامتر انتخاب می‌شود. اجرای شبیه‌سازی‌های مکرر منتج به ایجاد تعداد زیادی نتیجه مستقل و جداگانه می‌گردد که هر کدام نشان‌دهنده‌ی یک آینده محتمل برای سیستم است. به عبارتی هر یک از نتایج بیان‌گر یک مسیر ممکن است که سیستم احتمالا با گذشت زمان دنبال خواهد کرد. نتیجه تحقق‌های مستقل سیستم به شکل

توزیع‌های احتمال خروجی‌های ممکن درخواهند آمد، لذا خروجی‌ها به صورت مقادیری که نبوده و توزیع احتمال هستند. دقت شبیه‌سازی مونت کارلو تابعی از تعداد تحقق سیستم یا همان تعداد اجراهاست. فلوجارت نشان داده شده در شکل (۲) مراحل انجام یک شبیه‌سازی مونت کارلو را نشان می‌دهد. شکل (۳) نیز شماتیکی از نحوه‌ی انتشار عدم قطعیت از طریق شبیه‌سازی مونت کارلو را نشان می‌دهد.

به دلیل ماهیت تصادفی بودن روش مونت کارلو، هر بار نمونه‌برداری مستقل و بدون آگاهی از نمونه‌های قبلی صورت می‌گیرد، بنابراین نیاز به افزایش تعداد نمونه‌ها برای دستیابی به نتیجه‌ی جامع می‌باشد. مهم‌ترین نقطه ضعف روش مونت کارلو پیچیدگی محاسباتی و زمان بالای محاسبات آن است، لذا برای یک بررسی دقیق نیاز به چند هزار بار تکرار شبیه‌سازی است و این امر مستلزم استفاده از پردازش‌گرهای قدرتمند است. لازم به ذکر است که استفاده از این روش جهت بررسی انتشار عدم قطعیت در مدل‌های پیچیده که رابطه‌ی مشخصی بین متغیرها وجود ندارد و یا تعداد متغیرهای دخیل در مسئله بسیار زیاد است، توصیه می‌گردد. به عنوان مثال بررسی اثر عدم قطعیت در خواص مکانیکی مواد بر نتایج شبیه‌سازی فرآیندهای مختلف توسط روش مونت کارلو قابل ارزیابی است.

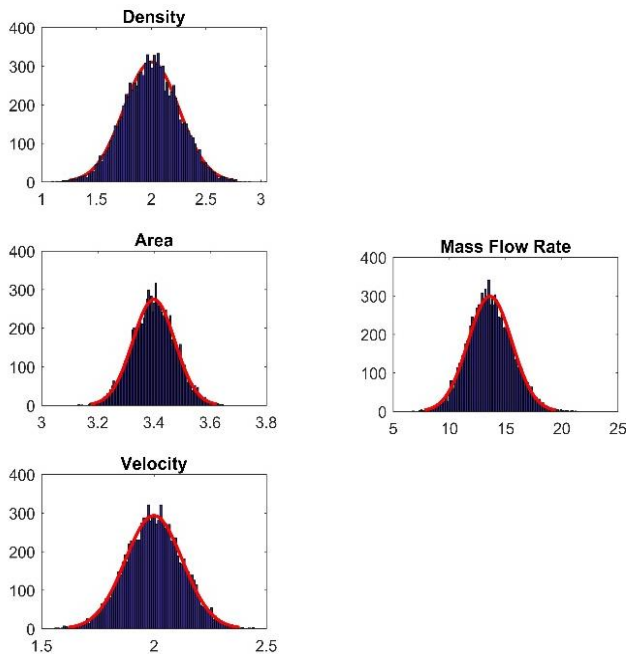


شکل ۲ مراحل شبیه‌سازی مونت کارلو [۹]

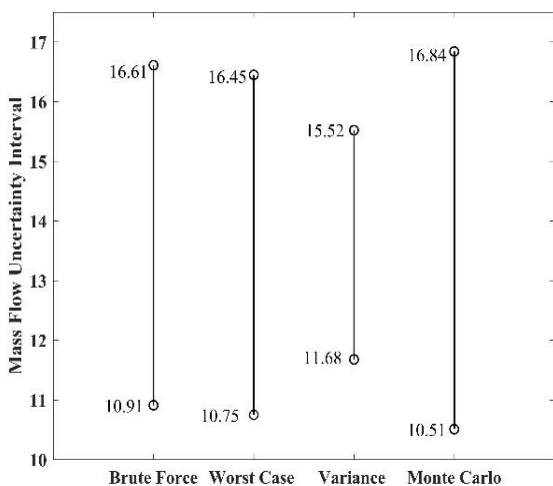
<sup>2</sup> Realization

<sup>1</sup> Monte Carlo Method (MCM)

بزرگ‌تر و نزدیک به هم هستند. روش احتمالاتی مونت کارلو نیز دارای بزرگ‌ترین بازه‌ی عدم قطعیت می‌باشد که بازه‌ی اطمینان ۵-۹۵٪ برای آن در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل ۴ توابع توزیع احتمال ورودی‌ها و خروجی‌های تابع محاسبه‌ی دبی جرمی

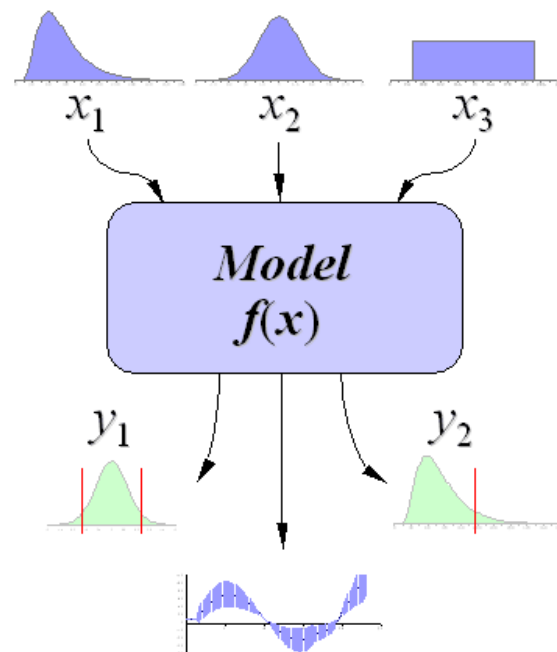


شکل ۵ مقایسه عدم قطعیت دبی جرمی از روش‌های مختلف

#### ۴- نتیجه‌گیری

مهم‌ترین هدف تحقیق حاضر، تاکید بر اهمیت عدم قطعیت به عنوان پارامتری مهم و تأثیرگذار در رابطه با گزارش نتایج به ویژه

#### Uncertainty Propagation



شکل ۳ انتشار عدم قطعیت در شبیه سازی مونت کارلو [۱۰]

یکی از خروجی‌های نتایج حاصل از روش مونت کارلو که معمولاً گزارش می‌شود، بازه‌ی اطمینان<sup>۱</sup> است. بازه‌ی اطمینان محدوده‌ی دامنه‌ی احتمالی هر یک از خروجی‌ها را نشان می‌دهد. جهت گزارش بازه‌ی اطمینان استاندارد خاصی وجود ندارد ولی معمولاً از معیارهای ۱-۹۹٪ یا ۵-۹۵٪ استفاده می‌شود. چنانچه نتایج در بازه‌ی اطمینان ۵-۹۵٪ بیان شود، به این معنی است که با احتمال ۹۰٪ مقدار واقعی بین حد بالا و پایین گزارش شده قرار دارند. استفاده از بازه‌ی اطمینان ۵-۹۵٪ در تحقیقات متداول تر است. گرچه برای مثال دبی جرمی، به دلیل ساده بودن رابطه‌ی ریاضی بین متغیرها، استفاده از روش‌های تحلیلی توصیه می‌گردد اما در ادامه روش مونت کارلو نیز جهت محاسبه‌ی انتشار عدم قطعیت بکار گرفته شده است. همان‌طور که شکل (۴) نشان می‌دهد، با در نظر گرفتن توابع توزیع نرمال برای چگالی، سرعت و سطح مقطع، ورودی‌های غیر قطعی ایجاد شده و سپس با تکرار محاسبات دبی جرمی تعیین و توزیع آن رسم شده است. بازه‌ی اطمینان ۵-۹۵٪ برای دبی جرمی  $\frac{gr}{s}$  [۱۶/۸۴, ۱۰/۵۱] بدست می‌آید.

در شکل (۵) بازه‌ی عدم قطعیت محاسبه شده برای دبی جرمی توسط روش‌های مختلف ترسیم شده است. در بین روش‌های تحلیلی، روش انتشار واریانس دارای کوچک‌ترین بازه است و دو روش بروفورس و ترکیب بدترین حالت دارای بازه‌های

<sup>۱</sup> Confidence Bound (CB)

- [4] D. Jailton Carreteiro and R. G. C. Paulo, "Methods for Evaluation of Measurement Uncertainty," in *Metrology*, Anil Ed. Rijeka: IntechOpen, 2018, p. Ch. 2., <https://doi.org/10.5772/intechopen.74873>.
- [5] L. T. Stant, P. H. Aaen, and N. M. Ridler, "Comparing methods for evaluating measurement uncertainty given in the JCGM 'Evaluation of Measurement Data' documents," *Measurement*, vol. 94, pp. 847-851, 2016, <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2016.08.015>.
- [6] P. F. Pelz, P. Groche, M. E. Pfetsch, and M. Schaeffner, *Mastering uncertainty in mechanical engineering*. Springer Nature, 2021, <https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/50950>.
- [7] J. Yuan, E. Denimal, S. Bi, J. Feng, Q. Hu, and A. Cicirello, "Special Section on Uncertainty Quantification and Management in Nonlinear Dynamical Systems in Aerospace and Mechanical Engineering," *ASCE-ASME J Risk and Uncert in Engrg Sys Part B Mech Engrg*, vol. 9, no. 4, 2023, <https://doi.org/10.1115/1.4063301>.
- [8] Z. Imani Nejad, W. Taylor, C. Smith, and K. Khalili, "Investigation of the Effect of Uncertainty in Muscle Pathways on the Knee Joint Contact Force in an Improved Musculoskeletal Model During Squat Motion," (in persian), *Journal of Mechanical Engineering*, vol. 52, no. 2, pp. 345-352, 2022, <https://doi.org/10.22034/jmeut.2022.48939/3010>.
- [9] Z. Imani Nejad, "Investigation on the effect of uncertainty propagation on internal forces of knee joint prosthesis in probabilistic modeling of musculoskeletal system," (in persian), PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Birjand, 2021 .
- [10] U. Burghaus, J. Stephan, L. Vattuone, and J. M. Rogowska, *A practical guide to kinetic Monte Carlo simulations and classical molecular dynamics simulations: an example book* ((No Title)). Nova Science Publishers, 2006.

نتایج حاصل از ابزارهای شبیه‌سازی پیچیده و با ورودی‌های متعدد است.

در این تحقیق به معرفی مهم‌ترین روش‌های تحلیلی و احتمالاتی جهت محاسبه‌ی انتشار عدم قطعیت پرداخته شده است. جهت تبیین دقیق روش‌های موجود، انتشار عدم قطعیت در تابع محاسبه‌ی دبی جرمی به عنوان یک مثال ساده محاسبه شده است. در مسائل ساده و با ورودی‌های محدود که رابطه‌ی مشخصی بین متغیرهای ورودی و خروجی وجود دارد، استفاده از روش‌های تحلیلی جهت محاسبه‌ی انتشار عدم قطعیت توصیه می‌گردد. اما در مسائل پیچیده و با ورودی‌های متعدد که غالباً در مطالعات چنین مسائلی مورد توجه هستند، استفاده از روش-احتمالاتی مونت کارلو کارگشا خواهد بود.

##### ۵- فهرست علائم و اختصارات

علائم انگلیسی

$m$	دبی جرمی (kg/s)
$A$	سطح مقطع ( $cm^2$ )
$v$	سرعت (cm/s)
$\rho$	چگالی ( $gr/cm^3$ )

##### ۶- مراجع

- [1] J. Kristiansen, "The guide to expression of uncertainty in measurement approach for estimating uncertainty: an appraisal," *Clinical Chemistry*, vol. 49, no. 11, pp. 1822-1829, 2003, <https://doi.org/10.1373/clinchem.2003.021469>.
- [2] I. Iso and B. OIML, "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement," vol. 122, ed. Geneva, Switzerland, 1995, pp. 16-17.
- [3] A. Kamal *et al.*, "Recent advances and challenges in uncertainty visualization: a survey," *Journal of Visualization*, vol. 24, no. 5, pp. 861-890, 01.10.2021, <https://doi.org/10.1007/s12650-021-00755-1>.