

تحلیل ارتعاشات میکروورق های مدرج تابعی دو جهته با لحاظ کردن اثر اندازه بر اساس تئوری ردی

چکیده: تاکنون هیچ پژوهشی جهت بررسی رفتار مکانیکی سازه های کامپوزیتی مدرج تابعی دو جهته گزارش نشده است. در این مقاله، ارتعاشات آزاد میکروورق های مدرج تابعی دو جهته با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری بهینه یافته ردی برای اولین بار بررسی شده است. فرض می شود که تمام خواص مکانیکی به جز نسبت پواسون در امتداد عرض و ضخامت طبق توابع غیر خطی تغییر می کنند. به منظور در نظر گرفتن پارامتر اثر اندازه از تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده شده است. معادلات حرکت با در نظر گرفتن اثرات برشی با استفاده از اصل همپلتون به دست آمده و سپس به روش نویر، معادلات حل شده است. پس از حل معادلات، فرکانس های ارتعاشی ورق مورد تحلیل قرار گرفته و تأثیرات پارامترهایی مثل ابعاد میکروورق و اثرات اندازه بر روی فرکانس طبیعی آن مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج ارائه شده می تواند به عنوان معیارهایی برای تحلیل مکانیکی سازه های کامپوزیتی دو بعدی و سه بعدی مدرج تابعی در آینده مورد استفاده قرار گیرد.

واژه های راهنما: اثر اندازه، تئوری ورق ردی، میکروورق، تئوری تنش کوپل اصلاح شده، فرکانس طبیعی، مدرج تابعی دو جهته

داوود هوشیار

دانشجوی کارشناسی ارشد

عبدالرضا راستی طلب*

استادیار،

گروه مهندسی مکانیک،

دانشگاه آزاد اسلامی واحد داریون،

داریون

مقاله علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۴/۰۳/۲۰

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۷/۲۲

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۱۹

Davood Hooshyar
MSc Student

Abdolreza
Rastitalab*

Assistant Professor,
Department of Mechanical
Engineering,
Darion Azad University,
Darion

Vibration analysis of bidirectional functionally graded microsheets considering size effect based on Reddy theory

Abstract: No research has been reported to investigate the mechanical behavior of bidirectional functionally graded composite structures. In this paper, the free vibrations of bidirectional functionally graded microplate are investigated for the first time using the modified coupled stress theory and the optimized Reddy theory. It is assumed that all mechanical properties except Poisson's ratio vary along the width and thickness according to nonlinear functions. In order to consider the size effect parameter, the modified coupled stress theory is used. The equations of motion are obtained by considering shear effects using Hamilton's principle and then the equations are solved using the Navier method. After solving the equations, the vibration frequencies of the sheet are analyzed and the effects of parameters such as microplate dimensions and size effects on its natural frequency are analyzed. The presented results can be used as criteria for the mechanical analysis of 2D and 3D functionally graded composite structures in the future.

Keywords: Size effect, Reddy sheet theory, Microsheet, Modified coupled stress theory, Natural frequency

۱- مقدمه

توصیف تغییرات مدول یانگ و چگالی پوسته‌های FG به کار گرفته شده‌اند.

صفحات ساخته شده از مواد مدرج تابعی کاربرد گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف از جمله مهندسی هوافضا، عمران و مکانیک پیدا کرده‌اند. برای برآورده کردن نیازهای گسترده صنعتی، این صفحات از بریدگی‌هایی با اشکال مختلف طراحی می‌شوند. علاوه بر این برای افزایش سفتی و کاهش وزن، این سازه‌ها با تیرها تقویت می‌شوند. با این حال، آنها اغلب در معرض بارهای استاتیکی و دینامیکی قرار می‌گیرند که می‌توانند باعث خم شدن، ارتعاش و به‌طور بالقوه منجر به آسیب خستگی شوند. بنابراین، پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی این صفحات از طریق روش‌های مختلف به‌طور گسترده مشاهده شده است [۸-۱۰].

زمانی و همکارانش تحلیل مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند. از روش حل مرزی به منظور تعیین تنش‌های طولی استفاده شده است. همچنین معادلات مکانیکی بر اساس روش سری‌های توانی تعیین گردیده شده است [۱۱].

ردی و همکارانش به آنالیز غیرخطی میکروتیرهای مدرج تابعی پرداخته‌اند. آنها تغییرات خواص مکانیکی میکروتیر را فقط در راستای ضخامت در نظر گرفتند. همچنین معادلات حرکت میکروتیرها را با در نظر گرفتن خواص مدرج تابعی تیرها بر اساس مدل دیفرانسیلی غیرموضعی ارینگن به‌دست آورده‌اند [۱۲].

آنالیز خمشی میکروورق‌های مدرج تابعی بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده توسط تای و همکارانش انجام گردیده است. آنالیز شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر شاخص توانی، خیز ورق افزایش یافته و با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، جابه‌جایی آن کاهش می‌یابد [۱۳].

منتاری و همکارانش به آنالیز استاتیکی ورق‌ها و پوسته‌های چندلایه با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر پرداختند. آنها معادلات حرکت را با استفاده از اصل همپلتون به‌دست آوردند و با استفاده از متد نویر معادلات را حل کردند. همچنین آنها بارهای خارجی وارد شده بر پوسته را به‌صورت سینوسی، گسترده و نقطه‌ای در نظر گرفتند. در پایان، نتایج به‌دست آمده را با سایر تئوری‌های مشابه مقایسه کردند [۱۴].

تحلیل خمشی میکروورق‌های مدرج تابعی بر اساس تئوری-های تغییرشکل برشی و تئوری تنش کوپل اصلاح شده توسط لی و همکارانش انجام شده است. تأثیر پارامترهای مختلف بر خیز سازه مورد بررسی قرار گرفته است [۱۵].

تأکید روز افزون بر دستگاه‌های مینیاتوری پژوهشگران را بر آن ساخته است تا مشاهداتی عمیق‌تر به موادی داشته باشند که می‌توانند در مقیاس اتم مورد استفاده قرار گیرند. در این بین، سازه‌های در مقیاس نانو و میکرو مورد اهمیت بیشتری واقع شدند و توجه دانشمندان را در زمینه‌های مختلف فناوری نانو و میکرو سیستم‌های الکترومکانیک به خود جلب کرده‌اند. بیشتر ریزساختارها به‌عنوان مثال نانو و میکروورق‌ها، نانولوله‌ها و نانوسیم‌ها جهت استفاده در سیستم‌های نانوالکترومکانیک ساخته شده‌اند. جهت اطمینان طولانی مدت به دستگاه‌هایی در ابعاد ریزساختارها، محققین باید درک عمیقی از فناوری نانو و خواص مکانیکی نانومواد داشته باشند [۱].

میکروورق‌ها به ورق‌هایی اطلاق می‌شود که ابعاد و اندازه‌های آنها در حدود میکرون هستند. میکروورق‌ها به خاطر شکلی که دارند خواص الکتریکی، مکانیکی، مغناطیسی و گرمایی خاصی دارند. به خاطر داشتن همین خواص به‌طور گسترده‌ای در وسایل میکروالکترومکانیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از این رو ارائه مدلی مناسب جهت تحلیل این اجزاء، برای یافتن پاسخ صحیح استاتیکی و دینامیکی بسیار شایان توجه است [۲].

مواد مدرج تابعی^۱ نوع جدیدی از مواد کامپوزیتی ناهمگن هستند که از مخلوطی از فلزات و سرامیک‌ها ساخته می‌شوند. از آنجایی که خواص مکانیکی مواد مدرج تابعی به‌طور مداوم در جهت ضخامت تغییر می‌کند، این نوع مواد خواص مؤثر شگفت‌انگیزی دارند. اگرچه تحقیقات کافی به خواص مکانیکی سازه‌های FG مانند صفحات و پوسته‌ها اختصاص داده شده است، که در آنها خواص مکانیکی آنها فقط در جهت ضخامت تغییر می‌کند، مطالعات کمی برای تجزیه و تحلیل رفتار مکانیکی سازه‌های FG دو بعدی گزارش شده است [۳].

در سازه‌های مدرج تابعی دوبعدی و سه‌بعدی، خواص مؤثر مواد FG به ترتیب در دو و سه جهت به‌طور مداوم یا نمایی تغییر می‌کنند. سازه‌هایی با مواد FG چند جهته، خواص مکانیکی شگفت‌انگیزی دارند که توجه دانشمندان را به خود جلب کرده است.

توابع متعددی برای توصیف دقیق تغییرات خواص مکانیکی مواد FG وجود دارد. طبق نتایج پژوهش وانگ و همکاران [۴] تابع نمایی و تابع توزیع توانی دو شکل توزیع رایج هستند که می‌توانند تغییرات خواص مکانیکی مواد تابعی را به‌طور دقیق توصیف کنند [۵-۷]. بنابراین در این مقاله، توابع نمایی برای

^۱ Functionally graded

برشی با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی غیر خطی لحاظ می‌شود. روابط تنش- کرنش در این مقاله، بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده لحاظ می‌گردد. همچنین میدان جابه‌جایی در نظر گرفته شده، سه‌بعدی بر اساس تئوری ورق ردی می‌باشد که از دقت بالایی برخوردار است. بنابراین در این پژوهش به تحلیل و دینامیکی میکروورق مدرج تابعی دو جهته با در نظر گرفتن اثرات اندازه پرداخته می‌شود. از دیگر نوآوری‌های پژوهش حاضر نسبت به پژوهش مورد نظر، میدان جابه‌جایی سه‌بعدی و دقیق در نظر گرفته شده بر اساس تئوری ورق ردی در این مقاله می‌باشد.

۲- فرضیات مسئله

فرضیات لحاظ شده در این مقاله شامل موارد زیر می‌باشد:

- ۱- هندسه ساختاری میکروورق، مستطیلی می‌باشد.
- ۲- تکیه‌گاه‌های سازه ساده در نظر گرفته شده است.
- ۳- به‌منظور در نظر گرفتن اثر اندازه، از تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده می‌شود.
- ۴- میدان جابه‌جایی با در نظر گرفتن اثرات برشی بر اساس تئوری ورق ردی می‌باشد.

۲-۱- تئوری تنش کوپل اصلاح شده

ساختار تئوری تنش کوپل اصلاح شده به‌گونه‌ای است که برخلاف تئوری گرا دیان کرنشی اصلاح شده، بخش‌هایی که سبب افزایش مرتبه مشتق معادلات حرکت می‌شود را شامل نمی‌شود. بر خلاف تئوسری کلاسیک تنش اصلاح شده، تئوری تنش کوپل اصلاح شده شامل یک پارامتر مقیاس طولی و تانسور متقارن تنش کوپل شده می‌باشد که سبب می‌شود علاوه بر کاهش حجم معادلات، نتایج دقیق‌تری به‌دست آید. بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده، تغییرات انرژی پتانسیل سیستم با در نظر گرفتن اثر اندازه، طبق رابطه (۱) ارائه می‌شود [۱۹].

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V m_{ij} \delta \chi_{ij} dV \quad (1)$$

در رابطه (۱)، تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی سیستم بر- اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده ارائه گردیده است. در رابطه فوق، σ_{ij} و ε_{ij} به ترتیب بیانگر مؤلفه‌های تانسور تنش و کرنش هستند. همچنین m_{ij} مؤلفه‌های تانسور متقارن تنش کوپل می‌باشد و χ_{ij} بیانگر مؤلفه‌های تانسور متقارن انحنای میکروورق می‌باشد که از رابطه (۲) تعیین می‌شود.

آنالیز استاتیکی ورق‌های هدفمند بر اساس یک تئوری جدید تغییر شکل برشی توسط فرزام و همکارانش انجام شده است. نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهد که میزان تغییرات خواص مکانیکی بر میزان خمش ورق‌ها تأثیر مستقیمی دارد [۱۶].

آنالیز خمشی ورق‌های مدرج تابعی با تغییرات در راستاهای ضخامت و طولی، انجام شده توسط فرزام و همکارانش، نزدیک- ترین پژوهش به مقاله حاضر می‌باشد. مهمترین تفاوت مقاله حاضر با پژوهش مورد نظر در تئوری بیان‌کننده روابط تنش- کرنش می‌باشد. در این مقاله، روابط تنش- کرنش بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده در نظر گرفته می‌شود در حالیکه در پژوهش فرزام و همکارانش، روابط تنش- کرنش بر اساس قانون هوک در نظر گرفته شده است. همچنین در این مقاله برخلاف پژوهش فرزام و همکارانش از تئوری تغییر شکل برشی غیرخطی استفاده شده است. این تئوری نسبت به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول دقت بیشتری دارد. از دیگر نوآوری‌های پژوهش حاضر نسبت به پژوهش مورد نظر، میدان جابه‌جایی سه‌بعدی و دقیق در نظر گرفته شده بر اساس تئوری ورق ردی در این مقاله می‌باشد.

آنالیز استاتیکی ورق‌های ساندویچی هدفمند با استفاده از تئوری ورق چهار توسط دمیرهان و همکارانش انجام گردیده است. معادلات حرکت و شرایط مرزی بر اساس اصل کار مجازی تعیین شده است. اثر پارامترهای گوناگون هندسی را بر خیز ورق در نظر شده است. نتایج تحلیل‌ها نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر شاخص توان در توزیع توانی خواص مکانیکی میزان خمش استاتیکی سازه افزایش می‌یابد [۱۷].

تحلیل ارتعاشات ورق‌های ویسکوالاستیک مدرج تابعی بر بستر وینکلر- پاسترناک با شرایط مرزی مختلف توسط وینه و همکارانش ایجاد شده است. مدل فونداسیون ویسکوالاستیک پیشنهادی، ضریب میرایی جدیدی را برای در نظر گرفتن اثرات ویسکوز در لایه برشی معرفی کرده و درک جامع‌تری از رفتار ارتعاشی ورق‌ها ارائه می‌دهد. معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر ساده و اصل همیلتون استخراج شده و یک روش تحلیلی برای حل این معادلات تحت شرایط مرزی مختلف اعمال شده که سازگاری مدل را نشان می‌دهد. [۱۸].

در اغلب پژوهش‌های انجام شده، خواص مواد به‌صورت مدرج تابعی یک جهته در نظر گرفته شده است. همچنین روابط جابه‌جایی در نظر گرفته شده اغلب دوبعدی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌باشد. در این پژوهش، میکروورق در نظر گرفته شده، مدرج تابعی دوجته می‌باشد. همچنین اثرات

$$\gamma_{xz} = (1 - 3c_1 z^2) \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$\gamma_{yz} = (1 - 3c_1 z^2) \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

در رابطه فوق، $c_1 = -\frac{4}{3h^2}$ می‌باشد. حال که میدان کرنش-جابجایی مربوط به میکروورق تعیین شد با جای گذاری رابطه (۴) در (۳) به تعیین مؤلفه‌های بردار چرخش می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) + 3c_1 z^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) \right) \\ \theta_y &= -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) + 3c_1 z^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) \right) \\ \theta_z &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (z - c_1 z^3) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

با جای گذاری رابطه (۶) در رابطه (۲) مؤلفه‌های تانسور انحنای میکروورق طبق رابطه (۷) تعیین می‌گردند.

$$\begin{aligned} \chi_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \frac{3c_1 z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \chi_y &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) - \frac{3c_1 z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \\ \chi_z &= \frac{z - 3c_1 z^2}{2} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \\ \chi_{xy} &= \frac{1 + 3c_1 z^2}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \frac{1 - 3c_1 z^2}{4} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\ \chi_{xz} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad + \frac{z - c_1 z^3}{4} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad + \frac{3c_1 z}{2} \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \chi_{yz} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \frac{z - c_1 z^3}{4} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \right) \\ &\quad - \frac{3c_1 z}{2} \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

در رابطه (۲)، θ_i بردار چرخش مربوط به میدان جابه‌جایی (u_1, u_2, u_3) می‌باشد و از رابطه (۲) تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \theta_x &= \theta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \theta_y &= \theta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \theta_z &= \theta_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه فوق، u_1, u_2 و u_3 به ترتیب بیانگر جابه‌جایی میکروورق در جهات x_1, x_2 و x_3 می‌باشند.

۲-۲- تعیین میدان کرنش-جابجایی

تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم بر این فرض استوار است که تغییرشکل برشی عرضی و در نتیجه تنش برشی بر روی کف و پایین سطح ورق صفر می‌باشد و در تمامی جاهای دیگر، غیر صفر می‌باشد. بنابراین میدان جابه‌جایی میکروورق بر اساس تئوری ورق ردی، طبق رابطه (۳) ارائه شده است [۲۰].

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + z\phi_x \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + z\phi_y \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (4)$$

در رابطه فوق، u, v و w به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستاهای x, y و z می‌باشند. همچنین ϕ_x و ϕ_y به ترتیب چرخش صفحات میانی در جهات x و y ناشی از تنش برشی می‌باشند و h بیانگر ضخامت ورق می‌باشند. با مشتق‌گیری از میدان جابه‌جایی، میدان کرنش-جابجایی ورق مستطیلی تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - c_1 z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - c_1 z^3 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ &\quad - c_1 z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned}$$

۳-۲- میکروورق مدرج تابعی دو جهته

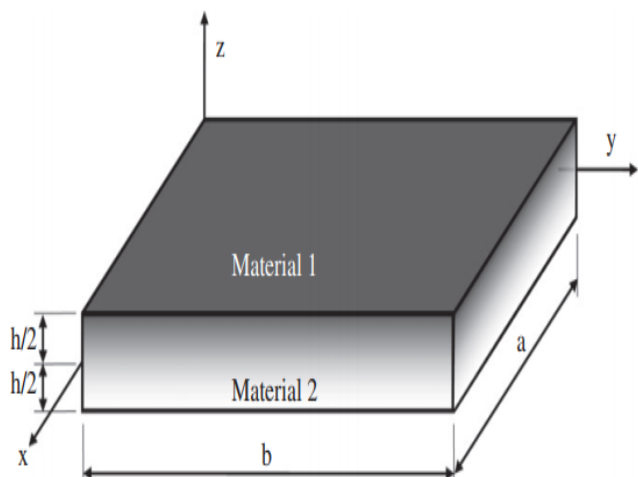
در این پژوهش جهت مدل سازی میکروورق از میکروورق مدرج تابعی دوجته با تغییرات خواص در راستاهای طولی و ضخامت به صورت همزمان، استفاده شده است.

شکل (۱) شماتیکی از ورق مدرج تابعی با طول a ، عرض و ضخامت h را نشان می دهد. مواد به کار برده شده در ورق مدرج تابعی دوجته به گونه ای می باشد که خواص مکانیکی ورق در دو جهت طبق رابطه (۸) تغییر می کنند [۲۰].

$$E(x, z) = \exp\left(\frac{\alpha x}{L}\right) \left((E_T - E_B) \left(\frac{z+c}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_B \right) \quad (8)$$

رابطه فوق، تغییرات مدول الاستیسیته در دو جهت طولی و ضخامت بر حسب متغیرهای x و z را نشان می دهد. در رابطه (۸)، E_T و E_B به ترتیب مدول الاستیسیته ماده بالایی و پایینی ورق می باشند. همچنین α و p به ترتیب شاخص طولی-ضخامتی و شاخص توانی مدرج تابعی می باشد. α مقادیر مثبت یا منفی به خود می گیرد؛ در حالیکه p فقط مقادیر مثبت به خود می گیرد. پارامتر c در رابطه (۸)، طبق رابطه (۹) تعریف می شود [۲۰].

$$c = \frac{(\eta_E - 1)hp}{2(2 + \beta)(\eta_E + p)}, \eta_E = \frac{E_T}{E_B} \quad (9)$$



شکل ۱ شماتیکی از ورق مدرج تابعی

۴-۲- تعیین معادلات ارتعاشی میکروورق

ابتدا با استفاده از روابط تنش- کرنش الاستیک خطی، رابطه تنش را بر حسب کرنش طبق رابطه (۱۰) بیان می کنیم.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(x, z)}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$m_{ij} = \frac{E(x, z)}{1 + \nu} \ell^2 \chi_{ij}$$

در رابطه (۱۰)، σ_x بیانگر تنش، ε_x بیانگر کرنش، ν بیانگر ضریب پواسون و ℓ بیانگر پارامتر طول می باشد که به منظور در نظر گرفتن اثر تنش کوپل مورد استفاده قرار می گیرد. پارامتر ℓ با استفاده از تست پیچش سیلندرهایی باریک یا تست خمش تیرهای نازک تعیین می شود [۱۹].

به منظور تعیین معادلات دینامیکی میکروورق ها از اصل همیلتون استفاده می کنیم، به طوریکه ابتدا انرژی های پتانسیل و جنبشی میکروورق ها را محاسبه می کنیم، سپس در اصل همیلتون جای گذاری می کنیم و پس از ساده سازی های مربوطه، معادلات دینامیکی به دست می آید. اصل همیلتون طبق رابطه (۱۱) تعریف می شود.

$$(\delta U - \delta W - \delta T)dt = 0 \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)، δU بیان کننده تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی سیستم، δT بیان کننده تغییرات انرژی جنبشی سیستم و δW بیان کننده تغییرات بار خارجی اعمالی به سیستم می باشد. به منظور استفاده از اصل همیلتون، ابتدا انرژی های پتانسیل و جنبشی میکروورق ها را محاسبه می کنیم، سپس تغییرات آنها را با استفاده از روابط ریاضی محاسبه می کنیم؛ به گونه ای که بر حسب مؤلفه های جابه جایی به دست آیند. پس از آن، تغییرات انرژی های جنبشی، پتانسیل و تغییرات بار خارجی اعمالی به سیستم را در اصل همیلتون جای گذاری می کنیم تا معادلات مکانیکی سیستم تعیین شود. حال به محاسبه انرژی پتانسیل کرنشی سیستم می پردازیم.

$$\delta\phi_y: \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} - \bar{Q}_y - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{X}_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{Y}_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{Y}_{yz}}{\partial x \partial y} \right) - 3c_1 Y_{xz} - \frac{c_x h}{3} = J_1 \ddot{v} + K_2 \ddot{\phi}_y - c_1 J_4 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \quad (13)$$

پارامترهای استفاده شده در رابطه (۱۳) به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz, (P_x, P_y, P_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z^3 dz \\ (A, B, D, E, F, H) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) \frac{E(x, z)}{1-\nu^2} dz \\ (A_n, B_n, D_n, E_n, F_n, H_n) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) \frac{\ell^2 E(x, z)}{2(1+\nu)} dz \\ (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) z dz, (R_x, R_y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) z^3 dz \\ I_i &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^i dz, \bar{M} = M - c_1 P, \bar{Q} = Q - 3c_1 R \\ \bar{Y} &= Y - c_1 W, \bar{X} = X - 3c_1 Z, \hat{X} = X + 3c_1 Z \\ J_i &= I_i - c_1 I_{i+2}, K_2 = I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6 \end{aligned}$$

۲-۵- حل معادلات ارتعاشی میکروورق

با توجه به اینکه حل تحلیلی و دقیق معادلات دیفرانسیل به دست آمده مشکل می باشد، جهت حل معادلات به دست آمده از روش عددی نویر استفاده می کنیم. در این روش، فرض می کنیم تمامی تکیه گاه های میکروورق ساده می باشند. طبق روش نویر، متغیرهای مسئله که شامل پارامترهای جابه جایی می باشند را با استفاده از سری فوریه دوگانه و بر حسب ضرایب ثابت V_{rs}, U_{rs} ، ϕ_{rs}^2 و ϕ_{rs}^1, W_{rs} بیان می شود. با جای گذاری روابط موجود در حل نویر در معادلات حرکت، معادلات مکانیکی قابل حل می شوند.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} U_{rs} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} V_{rs} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\ &+ \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (m_x \delta \chi_x + m_y \delta \chi_y + \tau_z \delta \chi_z + 2m_{xy} \delta \chi_{xy} + 2m_{xz} \delta \chi_{xz} + 2m_{yz} \delta \chi_{yz}) dA dz \quad (12) \end{aligned}$$

حال به محاسبه تغییرات انرژی جنبشی میکروورق می پردازیم. با جای گذاری روابط (۴)، (۵) و (۷) در رابطه های (۱۰) و (۱۲)، معادلات دینامیکی میکروورق های مدرج تابعی دوجهته طبق رابطه (۱۳) تعیین می شوند.

$$\begin{aligned} \delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X_{yz}}{\partial y^2} \right) &= I_0 \ddot{u} + J_1 \ddot{\phi}_x - c_1 I_3 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \\ \delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_{yz}}{\partial x \partial y} \right) &= I_0 \ddot{v} + J_1 \ddot{\phi}_y - c_1 I_3 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \\ \delta w: \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + c_1 \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) &+ 3c_1 \left(\frac{\partial Y_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial Y_{yz}}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{X}_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{X}_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\hat{X}_y - \hat{X}_x)}{\partial y \partial x} \right) \\ &+ \frac{2h}{3} \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} \right) \\ &= I_0 \ddot{w} - c_1^2 I_6 \nabla^2 \ddot{w} + c_1 I_3 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) \\ &+ c_1 J_4 \left(\frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\phi}_y}{\partial y} \right) \\ \delta \phi_x: \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - \bar{Q}_x &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{X}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{X}_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{Y}_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{Y}_{yz}}{\partial y^2} \right) \\ &+ 3c_1 Y_{yz} + \frac{c_y h}{3} = J_1 \ddot{u} + K_2 \ddot{\phi}_x - c_1 J_4 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \end{aligned}$$

مقادیر مشابهی اختصاص داده شده است. همچنین هر دو ورق مورد بررسی، دارای تکیه‌گاه‌های یکسان (تکیه‌گاه از نوع ساده) می‌باشند و هر دو دارای ساختار همگن می‌باشند. در جدولی به شرح زیر، فرکانس‌های بی‌بعد میکروورق‌های همگن به ازای مقادیر مختلفی از $\frac{L}{h}$ و $\frac{a}{h}$ نشان داده شده است. جهت تطابق نتایج به‌دست آمده، از نتایج منبع [۲۱] استفاده می‌شود. در جدول (۲) به بررسی فرکانس‌های بی‌بعد میکروورق همگن به ازای مقادیر مختلفی از $\frac{L}{h}$ و $\frac{a}{h}$ پرداخته شده است.

جدول ۲ فرکانس‌های بی‌بعد میکروورق همگن

$\frac{L}{h}$	$\frac{a}{h} = 5$		$\frac{a}{h} = 20$		$\frac{a}{h} = 100$	
	Present	CPT[22]	Present	CPT[22]	Present	CPT[22]
0	5.2813	5.9734	5.9198	5.9734	5.9711	5.9734
0.2	5.7698	6.4556	6.4027	6.4556	6.4534	6.4556
0.4	7.0330	7.7239	7.6707	7.7239	7.7217	7.7239
0.6	8.7389	9.4673	9.4116	9.4673	9.4650	9.4673
0.8	10.6766	11.4713	11.4107	11.4713	11.4688	11.4713
1	12.7407	13.6213	13.5544	13.6213	13.6186	13.6213

با توجه به داده‌های جدول (۲) مشاهده می‌شود که نتایج به‌دست آمده در این پژوهش، تطابق خوبی با نتایج منبع [۲۱] دارد. با توجه به جدول (۲) مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت $\frac{L}{h}$ فرکانس‌های میکروورق افزایش می‌یابد، زیرا با افزایش نسبت $\frac{L}{h}$ در ورق، سفتی ورق افزایش می‌یابد و در نتیجه، این افزایش سفتی منجر به افزایش فرکانس‌های ارتعاشی سیستم می‌گردد. همچنین با توجه به داده‌های جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش نسبت طول به ضخامت میکروورق به ازای یک

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} W_{rs} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\
 \phi_1(x, y, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \phi_{rs}^1 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\
 \phi_2(x, y, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \phi_{rs}^2 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t}
 \end{aligned} \quad (15)$$

در رابطه فوق، $\alpha = \frac{r\pi}{a}$ و $\beta = \frac{r\pi}{b}$ می‌باشد. با جای‌گذاری معادله (۱۵) در معادله (۱۳)، معادلات ارتعاشی میکروورق به فرم معادله (۱۶) تبدیل می‌شوند.

جدول ۱ خصوصیات مواد [۱]

$E_T(GPa)$	$E_B(GPa)$	ν	$h(\mu m)$	$\rho_T \left(\frac{kg}{m^3}\right)$	$\rho_B \left(\frac{kg}{m^3}\right)$
380	70	0.3	88	3800	2702

$$[M_{ij}] \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{rs} \\ \ddot{V}_{rs} \\ \ddot{W}_{rs} \\ \ddot{\phi}_{rs}^1 \\ \ddot{\phi}_{rs}^2 \end{Bmatrix} + [K_{ij}] \begin{Bmatrix} U_{rs} \\ V_{rs} \\ W_{rs} \\ \phi_{rs}^1 \\ \phi_{rs}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

۳- نتایج

به منظور انجام محاسبات مربوط به تحلیل دینامیکی میکروورق، خواص هندسی و مکانیکی مواد استفاده شده در قالب جدولی به شرح زیر ارائه می‌شود.

در این مقاله، خواص میکروورق در راستای طولی و ضخامت طبق توزیع‌های توانی مختلف (ثابت، خطی و غیرخطی) تغییر می‌کند. در این مقاله همانند اکثر تحقیقات انجام شده به دلیل تغییرات اندک ضریب پواسون، مقدار ثابتی برای آن در نظر گرفته می‌شود.

در این پژوهش به منظور تحلیل بهتر نتایج از پارامتر فرکانس طبیعی بی‌بعد $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ استفاده می‌کنیم.

در این بخش به منظور صحت‌سنجی نتایج به‌دست آمده به مقایسه داده‌های حاصل از پژوهش حاضر با سایر کارهای مشابه پرداخته می‌شود. سیستم مورد مقایسه، ورق مستطیلی می‌باشد که به منظور صحت‌سنجی نتایج، به تمامی پارامترهای مکانیکی،

جدول ۴ فرکانس ارتعاشی بی‌بعد میکروورق مدرج تابعی دو جهته

$\frac{L}{h}$	$\alpha = 1$		$\alpha = 2$		$\alpha = 3$	
	$p=0$	$p=1$	$p=0$	$p=1$	$p=0$	$p=1$
0	13.15241	10.97631	14.90368	12.43781	16.88803	14.09393
0.2	14.36919	12.09376	16.28244	13.70405	18.45041	15.52872
0.4	17.51494	14.95127	19.84697	16.94198	22.48953	19.19775
0.6	21.76318	18.76699	24.66091	21.26583	27.94456	24.0973
0.8	26.58877	23.06809	30.12912	26.13966	34.14067	29.62012
1	31.7293	27.62622	35.95403	31.30458	40.74127	35.47272

با توجه به داده‌های جدول (۳) می‌توان دریافت که با افزایش پارامتر مربوط به شاخص توانی (p) به ازای مقادیر طولی ثابت، فرکانس طبیعی میکروورق کاهش می‌یابد. همچنین با بررسی جدول مذکور می‌توان دریافت که با افزایش مقادیر $\frac{a}{h}$ فرکانس ارتعاشی میکروورق افزایش می‌یابد و به ازای مقادیر بزرگتر $\frac{a}{h}$ فرکانس ارتعاشی میکروورق به مقادیر مشخصی همگرا می‌شوند. همچنین با بررسی جدول (۳) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش مقدار اثر اندازه، فرکانس‌های ارتعاشی میکروورق افزایش می‌یابند.

شکل (۲) تأثیر پارامترهای اثر اندازه و شاخص توانی را بر فرکانس‌های ارتعاشی بی‌بعد میکروورق مدرج تابعی یک جهته با فرض $a = 10h$ نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۲) مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر مربوط به شاخص توانی به ازای هر مقداری از پارامتر اثر اندازه، فرکانس بی‌بعد میکروورق کاهش می‌یابد. همچنین با بررسی شکل (۲) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش نسبت $\frac{h}{L}$ ، به ازای هر مقداری از شاخص توانی، فرکانس

نسبت $\frac{L}{h}$ مشخص فرکانس‌های بی‌بعد میکروورق تقریباً ثابت می‌ماند. اختلاف مقادیر موجود به ازای $\frac{a}{h} = 5$ به دلیل در نظر نگرفتن اثرات برشی می‌باشد؛ زیرا به ازای $\frac{a}{h} = 5$ ضخامت میکروورق افزایش چشمگیری پیدا می‌کند و میکروورق، ضخیم می‌شود. به همین دلیل جهت مدل‌سازی دقیق‌تر رفتار برشی حاکم بر میکروورق ضخیم باید از سایر تئوری‌های تغییرشکل برشی استفاده کرد؛ تئوری‌هایی که مربوط به سازه‌های ضخیم می‌باشند. به همین دلیل به ازای $\frac{a}{h} = 5$ نتایج به‌دست آمده کمی متفاوت با پژوهش انجام شده می‌باشد.

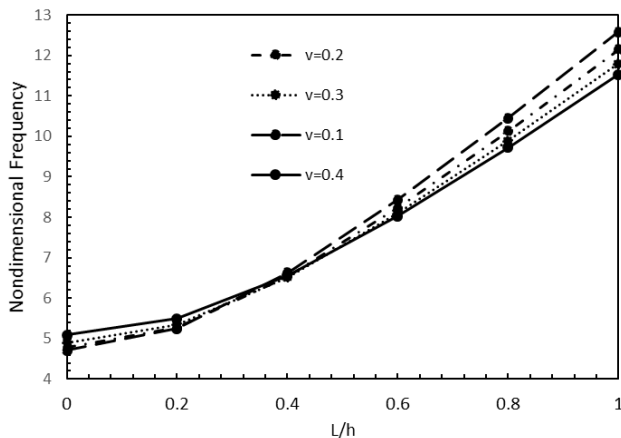
در این بخش به بررسی و تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های طبیعی میکروورق پرداخته می‌شود.

در جدول (۳) به بررسی اثرات شاخص توانی (مدرج تابعی یک جهته) بر فرکانس طبیعی میکروورق به ازای مقادیر مختلفی از $\frac{L}{h}$ و $\frac{a}{h}$ پرداخته شده است.

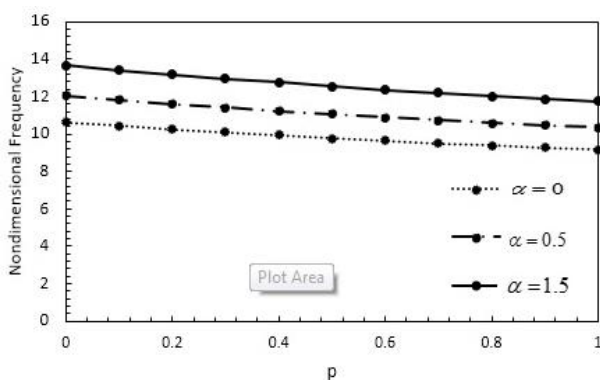
جدول ۳ فرکانس ارتعاشی بی‌بعد میکروورق مدرج تابعی یک جهته

$\frac{L}{h}$	$\frac{a}{h} = 5$			$\frac{a}{h} = 20$			$\frac{a}{h} = 100$		
	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=0$	$p=1$	$p=2$
0	5.803478	4.843283	4.353955	6.505108	5.385796	4.846799	6.561481	5.428872	4.886139
0.2	6.340277	5.336347	4.828558	7.035754	5.87963	5.319095	7.091467	5.922706	5.358105
0.4	7.728374	6.597194	6.030066	8.429125	7.159487	6.533899	8.485168	7.204102	6.573898
0.6	9.602941	8.280887	7.618596	10.34215	8.89219	8.166275	10.40083	8.940541	8.209351
0.8	11.73223	10.17875	9.397672	12.53891	10.86313	10.01392	12.60275	10.91697	10.06194
1	14.00041	12.19002	11.27466	14.89456	12.9634	11.97662	14.96511	13.02461	12.03167

فرض $a = 20h$ و $p = 1$ نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۴) مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر اثر اندازه به ازای هر مقداری از ضریب پواسون، فرکانس بی‌بعد میکروورق افزایش می‌یابد. همچنین با بررسی شکل (۴) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ضریب پواسون در مقادیر ابتدایی $\frac{L}{h}$ ، فرکانس ارتعاشی افزایش می‌یابد؛ در حالی که با افزایش ضریب پواسون و نسبت $\frac{L}{h}$ ، فرکانس ارتعاشی کاهش می‌یابد.



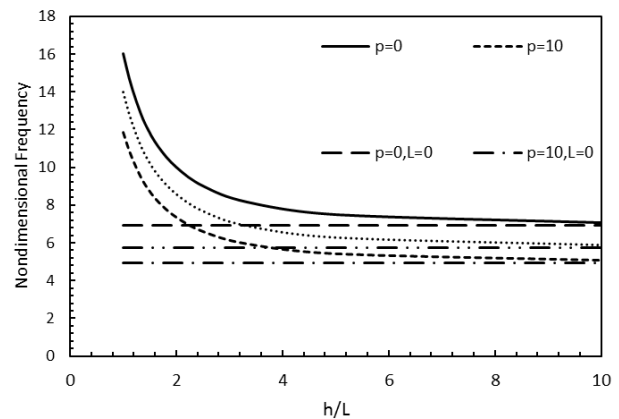
شکل ۴ تأثیر پارامتر اثر اندازه و ضریب پواسون بر فرکانس‌های بی‌بعد میکروورق مدرج تابعی با فرض $p = 1$



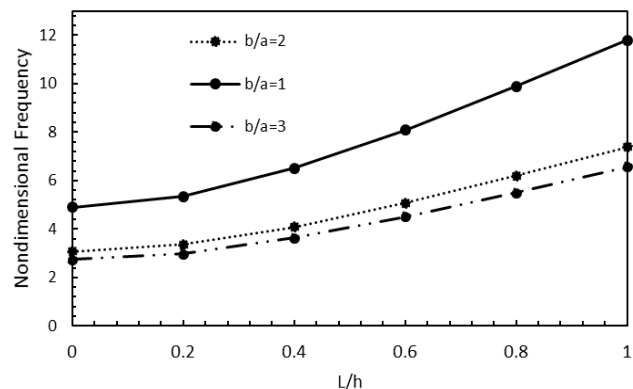
شکل ۵ تأثیر شاخص‌های طولی-ضخامتی و توانی مدرج تابعی بر فرکانس بدون بعد میکروورق

شکل (۵) تأثیر شاخص‌های طولی-ضخامتی و توانی مدرج تابعی را بر فرکانس بی‌بعد میکروورق مدرج تابعی دوجهته با فرض $L = 0.6h$ نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۵) مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر مربوط به شاخص توانی به ازای هر مقداری از شاخص‌های طولی-ضخامتی، فرکانس بی‌بعد میکروورق به صورت خطی کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به شکل (۵) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش پارامتر شاخص طولی-ضخامتی، فرکانس بی‌بعد میکروورق افزایش می‌یابد.

طبیعی میکروورق کاهش پیدا می‌کند به گونه‌ای که با افزایش نسبت $\frac{h}{L}$ ، مقادیر فرکانس به حالتی که $L = 0$ می‌باشد، میل می‌کند. همچنین با بررسی شکل (۲) می‌توان نتیجه گرفت که با در نظر گرفتن پارامتر اثر اندازه، فرکانس طبیعی میکروورق افزایش می‌یابد.



شکل ۲ تأثیر پارامتر اثر اندازه و شاخص توانی بر فرکانس‌های بی‌بعد میکروورق



شکل ۳ تأثیر پارامتر اثر اندازه و نسبت طولی $\frac{b}{a}$ بر فرکانس‌های بی‌بعد میکروورق مدرج تابعی با فرض $p = 1$

شکل (۳) تأثیر پارامترهای اثر اندازه و نسبت طولی $\frac{b}{a}$ را بر فرکانس‌های ارتعاشی بی‌بعد میکروورق مدرج تابعی یک جهته با فرض $a = 20h$ و $p = 1$ نشان می‌دهد.

با توجه به شکل (۳) مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر اثر اندازه به ازای هر مقداری از نسبت طولی $\frac{b}{a}$ ، فرکانس بی‌بعد میکروورق افزایش می‌یابد. همچنین با بررسی شکل (۳) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش نسبت طولی $\frac{b}{a}$ به ازای هر مقداری از پارامتر اثر اندازه، فرکانس طبیعی میکروورق کاهش پیدا می‌کند. شکل (۴) تأثیر پارامترهای اثر اندازه و ضریب پواسون را بر فرکانس‌های ارتعاشی بی‌بعد میکروورق مدرج تابعی یک جهته با

۴- جمع‌بندی

۵- فهرست علائم و اختصارات

علائم انگلیسی

A_{ij}	ماتریس مربوط به خواص مکانیکی میکروورق
a	عرض میکروورق
b	طول میکروورق
B_{ij}	ماتریس مربوط به خواص مکانیکی میکروورق
C_{ijkl}	تانسور تنش مرتبه چهارم
D_{ij}	ماتریس مربوط به خواص مکانیکی میکروورق
E_{ij}	ماتریس مربوط به خواص مکانیکی میکروورق
E	مدول الاستیسیته
e_0	ثابت الاستیک
F_{ij}	ماتریس مربوط به خواص مکانیکی میکروورق
H_{ij}	ماتریس مربوط به خواص مکانیکی میکروورق
h	ضخامت میکروورق
J_{ij}	ماتریس مربوط به خواص مکانیکی میکروورق
K	نیروی برشی
K_{ij}	ماتریس سفتی
l	پارامتر اثر اندازه
L_{ij}	ماتریس مربوط به خواص مکانیکی میکروورق
m_{ij}	مؤلفه‌های تانسور متقارن تنش کوپل
M	خمش
M_{ij}	ماتریس جرمی
N	منتجه تنش
P	منتجه تنش
Q_{ij}	ماتریس سفتی الاستیک
R	شعاع انحنای نانوپوسته
u	جابه‌جایی در جهت x_1
U_{rs}	ضریب حل نویر
v	جابه‌جایی در جهت x_2
V_{rs}	ضریب حل نویر
w	جابه‌جایی در جهت x_3
W_{rs}	ضریب حل نویر

علائم یونانی

α	پارامتر طولی مدرج تابعی
ε_{ij}	تانسور کرنش
σ_{ij}	تانسور تنش
μ	پارامتر غیرموضعی
ν	ضریب پواسون
φ	تابع کرنش برش
χ_{ij}	مؤلفه‌های تانسور متقارن انحنای میکروورق
θ	بردار چرخش

۶- مراجع

در این پژوهش به تحلیل دینامیکی میکروورق‌های مدرج تابعی دو جهته با استفاده از تئوری‌های ورق ردی و تنش کوپل اصلاح شده پرداخته شده است. در این مقاله، ابتدا بر اساس تئوری ورق ردی، میدان جابه‌جایی میکروورق در نظر گرفته شده است. سپس با استفاده از قانون هوک، روابط تنش-کرنش مربوط به میکروورق تعیین شده است. پس از آن، بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده، ترم‌های مربوط به اثر اندازه لحاظ شده است. با محاسبه انرژی‌های پتانسیل کرنشی و انرژی جنبشی و جایگذاری در اصل همپلتون، معادلات و دینامیکی میکروورق مدرج تابعی دو جهته به دست آمده است. در پایان، معادلات به دست آمده با استفاده از روش‌های عددی حل شده است.

نتایج به دست آمده در این پژوهش عبارتند از:

- با افزایش پارامتر مربوط به شاخص توانی (p) به ازای مقادیر طولی ثابت، سفتی سیستم کاهش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی میکروورق کاهش می‌یابد.
- با افزایش مقادیر $\frac{a}{h}$ ، سفتی سیستم افزایش یافته و فرکانس ارتعاشی میکروورق افزایش می‌یابد و به ازای مقادیر بزرگتر $\frac{a}{h}$ ، فرکانس ارتعاشی میکروورق به مقادیر مشخصی همگرا می‌شوند و ثابت می‌مانند.
- با افزایش پارامتر اثر اندازه، فرکانس‌های ارتعاشی میکروورق افزایش می‌یابند.
- با افزایش مقادیر مربوط به شاخص توانی، سفتی ورق کاهش یافته و در نتیجه فرکانس بی‌بعد میکروورق کاهش می‌یابد.
- با افزایش نسبت $\frac{h}{L}$ ، به ازای هر مقداری از شاخص توانی، فرکانس طبیعی میکروورق کاهش پیدا می‌کند به گونه‌ای که با افزایش نسبت $\frac{h}{L}$ ، مقادیر فرکانس به حالتی که $L = 0$ می‌باشد، میل می‌کند.
- با افزایش نسبت طولی $\frac{b}{a}$ ، فرکانس طبیعی میکروورق کاهش پیدا می‌کند.
- با افزایش ضریب پواسون در مقادیر ابتدایی پارامتر اثر اندازه، فرکانس ارتعاشی افزایش می‌یابد؛ همچنین با افزایش پارامتر اثر اندازه، سفتی سازه کاهش یافته و فرکانس ارتعاشی کاهش می‌یابد.
- با افزایش پارامتر شاخص طولی-ضخامتی، فرکانس بی‌بعد میکروورق افزایش می‌یابد.
- با افزایش پارامتر شاخص طولی-ضخامتی، جابه‌جایی بی‌بعد میکروورق کاهش می‌یابد.

کلید نتایج به دست آمده با داده‌های موجود در مقاله [۲۱] همخوانی دارد.

- [1] Y. Cao, M. Khorami, S. Baharom, H. Assilzadeh, and M. H. Dindarloo, "The effects of multi-directional functionally graded materials on the natural

- [10] A. Kaveh, H. Babaei, S. Zavari, E. Arshid, and Ö. Civalek, "Vibrational response of a sandwich microplate considering the impact of flexoelectricity and based on a novel porous-FGM formulation," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 52, no. 11, pp. 9122-9143, Nov. 2024, doi: 10.1080/15397734.2024.2346789.
- [11] J. Zamani, B. Soltani, and M. Aghaei, "Analytical Investigation of Elastic Thin-Walled Cylinder and Truncated Cone Shell Intersection Under Internal Pressure," *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 136, no. 5, p. 051201, Oct. 2014, doi: 10.1115/1.4027690.
- [12] J. N. Reddy, S. El-Borgi, and J. Romanoff, "Non-linear analysis of functionally graded micro beams using Eringen 's non-local differential model," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 67, pp. 308-318, Dec. 2014, doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.09.003.
- [13] H.-T. Thai and S.-E. Kim, "A size-dependent functionally graded Reddy plate model based on a modified couple stress theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 45, no. 1, pp. 1636-1645, Feb. 2013, doi: 10.1016/j.compositesb.2012.05.035.
- [14] J. L. Mantari, A. S. Oktem, and C. Guedes Soares, "Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higher-order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 43, no. 8, pp. 3348-3360, Dec. 2012, doi: 10.1016/j.compositesb.2012.01.062.
- [15] J. Lei, Y. He, B. Zhang, Z. Gan, and P. Zeng, "A size-dependent FG micro-plate model incorporating higher-order shear and normal deformation effects based on a modified couple stress theory," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 104, pp. 8-23, Dec. 2015, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.09.016.
- [16] A. Farzam and B. Hassani, "A new efficient shear deformation theory for FG plates with in-plane and through-thickness stiffness variations using isogeometric approach," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 26, no. 1, pp. 14-14, Jan. 2019, doi: 10.1080/15376494.2018.1472345.
- [17] P. A. Demirhan and V. Taskin, "Levy solution for bending analysis of functionally graded sandwich plates based on four variable plate theory," *Composite Structures*, vol. 177, pp. 80-95, Oct. 2017, doi: 10.1016/j.compstruct.2017.06.048.
- [18] P. Van Vinh and A. M. Zenkour, "Vibration analysis of functionally graded sandwich porous plates with arbitrary boundary conditions: a new general viscoelastic Winkler–Pasternak foundation frequency of the doubly-curved nanoshells," *Composite Structures*, vol. 258, p. 113403, Feb. 2021, doi: 10.1016/j.compstruct.2020.113403.
- [2] E. Amir, S. Arshid, S. A. Rasti-Alhosseini, and A. Loghman, "Quasi-3D tangential shear deformation theory for size-dependent free vibration analysis of three-layered FG porous micro rectangular plate integrated by nano-composite faces in hygrothermal environment," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 43, no. 2, pp. 133-156, 2020, doi: 10.1080/01495739.2019.1660601.
- [3] C. T. Loy, K. Y. Lam, and J. N. Reddy, "Vibration of functionally graded cylindrical shells," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, no. 3, pp. 309-324, Mar. 1999, doi: 10.1016/S0020-7403(98)00054-X.
- [4] Y. Wang, R. Zeng, and M. Safarpour, "Vibration analysis of FG-GPLRC annular plate in a thermal environment," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 50, no. 1, pp. 352-370, 2022, doi: 10.1080/15397734.2020.1717963.
- [5] Z. Lakhdar et al., "Free vibration and bending analysis of porous bi-directional FGM sandwich shell using a TSDT p-version finite element method," *Acta Mechanica*, vol. 235, no. 6, pp. 3657-3686, Jun. 2024, doi: 10.1007/s00707-024-03925-w.
- [6] M. Nebab et al., "Fundamental frequencies of cracked FGM beams with influence of porosity and Winkler/Pasternak/Kerr foundation support using a new quasi-3D HSDT," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 31, no. 28, pp. 10639-10651, Dec. 2024, doi: 10.1080/15376494.2023.2262951.
- [7] V. N. V. Hoang and P. T. Thanh, "A new trigonometric shear deformation plate theory for free vibration analysis of FGM plates with two-directional variable thickness," *Thin-Walled Structures*, vol. 194, p. 111310, Jan. 2024, doi: 10.1016/j.tws.2023.111310.
- [8] M. Javani, M. R. Eslami, and Y. Kiani, "Active control of thermally induced vibrations of temperature-dependent FGM circular plate with piezoelectric sensor/actuator layers," *Aerospace Science and Technology*, vol. 146, p. 108997, Mar. 2024, doi: 10.1016/j.ast.2024.108997.
- [9] N. Van Thinh and H. Van Tung, "Free vibration and dynamical analyses of FGM plates with porosity and tangential edge constraints," *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, vol. 12, no. 3, pp. 5291-5305, Apr. 2024, doi: 10.1007/s42417-023-01147-1.

- [20] J. N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, no. 4, pp. 745-752, Dec. 1984, doi: 10.1115/1.3167719.
- [21] L. Yin, Q. Qian, L. Wang, and W. Xia, "Vibration analysis of microscale plates based on modified couple stress theory," *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 23, no. 5, pp. 386-393, Oct. 2010, doi: 10.1016/S0894-9166(10)60040-8.
- approach," *Engineering with Computers*, pp. 1-29, Jan. 2025, doi: 10.1007/s00366-024-02110-y.
- [19] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, and P. Tong, "Experiments and theory in strain gradient elasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 51, no. 8, pp. 1477-1508, Aug. 2003, doi: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X.