

رفتار دوشاخگی نانولوله های کربنی احاطه شده توسط بستر الاستیک در اثر بار هارمونیک متحرک

رضا خسروانیان

کارشناسی ارشد

رضا ابراهیمی*

استادیار،

گروه مهندسی مکانیک،

دانشکده فنی و مهندسی،

دانشگاه یاسوج، یاسوج

چکیده: یکی از مهم ترین کاربردهای نانولوله های کربنی (CNTs)، انتقال نانوذرات در سیستم های دارورسان است. در این کاربردها، نانولوله ها در معرض بار متحرک قرار می گیرند که منجر به ارتعاشات غیرخطی نانولوله می شود. بنابراین هدف اصلی این مطالعه، تحلیل رفتار دوشاخگی CNTs در اثر بار هارمونیک متحرک است. مدل سازی سیستم با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی غیرمحل و فنر وینکلر انجام شده است. روش های گلرکین و رانج-کوتا به ترتیب برای گسسته سازی و حل معادله حرکت به کار رفته اند. اثرات دامنه، فرکانس و سرعت نیروی هارمونیک متحرک روی پاسخ دینامیک غیرخطی سیستم، توسط نمودارهای دوشاخگی، صفحه فاز، طیف توان، مقاطع پوانکاره و ماکزیمم نمای لیاپانوف بررسی شده است. نتایج حاکی از رفتارهای غیرخطی متنوعی از جمله حرکات پریودیک، زیرهارمونیک، شبه پریودیک و آشوبناک در پاسخ سیستم است. نتایج نشان داد که در فرکانس های تحریک بالا، پاسخ سیستم با افزایش دامنه نیروی تحریک در وضعیت زیرهارمونیک باقی می ماند. ضمن اینکه با افزایش فرکانس تحریک می توان وقوع اولین رفتار نامنظم سیستم را به تأخیر انداخت.

واژه های راهنما: دوشاخگی، نانولوله های کربنی، بستر الاستیک وینکلر، تئوری الاستیسیته غیرمحل، بار متحرک هارمونیک

مقاله علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۰۳

بازنگری: ۱۴۰۳/۰۷/۰۲

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۲۴

Reza
Khosravanian
M.Sc.

Reza Ebrahimi*
Assistant professor,
Faculty of
Engineering,
Yasouj University,
Yasouj

Bifurcations behavior of elastically embedded carbon nanotubes due to moving harmonic load

Abstract: One of the most significant applications of carbon nanotubes (CNTs) is transportation of nanoparticles in drug delivery systems. In these applications, nanotubes are subjected to moving loads, and this leads to nonlinear vibration of nanotubes. So, the main purpose of this study is to analyze bifurcations behavior of elastically embedded CNTs due to moving harmonic load. The model of the system is formulated by nonlocal Euler-Bernoulli beam theory and Winkler spring. The Galerkin and Rung-Kutta methods are used to discretize and solve the equation of motion, respectively. The effects of some parameters on the nonlinear response of the system are investigated by the bifurcation diagrams, phase plane portrait, power spectra, Poincaré map and the maximum Lyapunov exponent. The results indicated that, at high excitation frequency, the system stays in sub-harmonic motions by increasing the amplitude of the harmonic load. Occurrence of the first irregular motion can be delayed by increasing the excitation frequency.

Keywords: Bifurcation, Carbon nanotubes, Winkler elastic foundation, Nonlocal elasticity theory, Moving harmonic load

۱- مقدمه

روی بستر الاستیک را که تحت عبور نانوذرات قرار دارد، مدل-سازی کردند. در این مدل، لوله‌ها به صورت پوسته^۲ و بستر الاستیک با فنر وینکلر^۳ مدل شده است. همچنین نیروهای برهمکنش و اندروالس نیز لحاظ گردیده است. نتایج تأیید می‌کند که افزایش ضریب الاستیک بستر، منجر به کاهش تغییر شکل دینامیکی سیستم می‌شود. همچنین با افزایش سرعت نانوذرات، تأثیر پارامتر غیرمحملی روی پاسخ دینامیکی سیستم، افزایش می‌یابد. تانچوما و همکاران [۱۱] تحلیل ارتعاشات نانولوله کربنی حامل نانوذرات را بر اساس مدل تیر تیموشنکو و الاستیسیته غیرمحملی با در نظر گرفتن شرط مرزی لغزش و عدد نادسن ارائه کردند. آژمن و ایسن [۱۲] پاسخ دینامیکی یک نانولوله کربنی که تحت میدان مغناطیسی، میدان حرارتی و بار متحرک قرار گرفته است، محاسبه کرده‌اند. نتایج نشان داد که افزایش پارامتر مقیاس طول دابلت^۴ منجر به کاهش سختی و نتیجتاً کاهش فرکانس بدون بعد سیستم می‌شود. ما و همکاران [۱۳] پس از استخراج معادلات حاکم بر حرکت یک نانولوله احاطه شده روی یک بستر الاستیک تحت عبور نانوذرات متحرک و تحریک پایه، نشان دادند که با افزایش جرم نانوذره و نتیجتاً افزایش اثرات اینرسی، اختلاف بین نتایج حاصل از نانو جرم عبوری با نانویروی عبوری بیشتر می‌شود. لنگ و چانگ [۱۴] با استفاده از کوپلینگ سیال - جامد و ایجاد جریان ناشی از تغییرات دما، مکانیزمی را برای انتقال نانوذرات در یک نانولوله کربنی طولانی، پیشنهاد نمودند. آنها بر اساس شبیه‌سازی‌های دینامیک ملکولی نشان دادند که یک میدان دمایی پررودیک، قادر به ایجاد یک جریان سیال پایدار و نتیجتاً انتقال نانوذرات در داخل نانولوله طویل است. کشتکار و همکاران [۱۵] پاسخ دینامیکی یک نانولوله کربنی حامل سیال و نانوذرات متحرک را با در نظر گرفتن شرایط مرزی لغزش مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان داد که با افزایش سرعت جریان سیال، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. هاشمیان و همکاران [۱۶] پایداری دینامیکی یک نانوتیر را در اثر عبور نانوذرات، بر اساس تئوری گرادیان کرنش مطالعه نمودند. نتایج نشان داد که ثابت برشی پاسترناک، ناحیه ناپایداری دینامیکی را به سمت سرعت‌های بالاتر تغییر می‌دهد. مطالعات بالا بر روی پاسخ ارتعاشات اجباری نانولوله‌ها در اثر بار متحرک انجام شده است. در حالیکه به دلیل وجود عوامل غیرخطی در معادلات حرکت، ممکن است پدیده‌های غیرخطی پیچیده‌ای مانند دوشاخگی^۵، حرکات شبه‌تناوبی کربنی^۶ و

نانولوله‌های کربنی^۱ (CNTs) به سبب داشتن خواص منحصر به فرد فیزیکی، مکانیکی و الکتریکی در کاربردهای مختلف نانوتکنولوژی نظیر دارورسانی [۱]، بایوسنسورها [۲]، ترانزیستورها [۳] و ... استفاده می‌شوند. به کارگیری CNTs در سیستم‌های دارورسان به عنوان کانال‌های ملکولی و با هدف انتقال نانوذرات انجام می‌شود. لذا نانولوله‌های حامل نانوذرات، در معرض بارهای عرضی متحرکی قرار دارند که منجر به ارتعاشات عرضی در آنها می‌شود [۴]، [۵]. بر این اساس مطالعات زیادی روی رفتار ارتعاشی CNTs تحت بار متحرک انجام شده است که در ادامه به برخی از آنها اشاره می‌شود.

سیمسک [۶] ارتعاشات اجباری یک نانولوله کربنی با تکیه-گاه ساده را در معرض بار هارمونیک متحرک، مورد مطالعه قرار داده است. پاسخ‌های حوزه زمانی با استفاده از روش آنالیز مودال و انتگرال‌گیری مستقیم به دست آمده‌اند. تأثیر نسبت اندازه، سرعت و فرکانس تحریک بار متحرک روی پاسخ‌های دینامیکی سیستم بحث شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که تغییر شکل‌های دینامیکی به دست آمده از حل‌های غیرمحملی، بزرگتر از حل‌های کلاسیک متناظرشان هستند. برای مقادیر زیاد سرعت بار متحرک، تغییر شکل‌های دینامیکی، صرف‌نظر از فرکانس‌های تحریک، به سمت صفر میل می‌کند. هونگ و همکاران [۷] ارتعاشات ناشی از عبور ذرات متحرک در یک نانولوله کربنی قرار گرفته روی بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. رفتار بستر الاستیک به صورت خطی در نظر گرفته شده است. پاسخ زمانی به ازای پارامترهای مختلف، محاسبه شده است. پیرمادیان و همکاران [۸] با در نظر گرفتن اثرات اینرسی نانوذرات، نیروهای و اندروالسی و تئوری الاستیسیته غیرمحملی، مدلی را برای بررسی پایداری یک نانولوله کربنی تحت عبور نانوذرات روی بستر الاستیک پیشنهاد نمودند. نتایج حاکی از آن بود که در نظر گرفتن اثرات و اندروالسی و افزایش سختی بستر الاستیک منجر به بهبود پایداری سیستم می‌شود. سرپرست و همکاران [۹] ارتعاشات آزاد و اجباری یک نانولوله حامل سیال را در معرض بار متحرک و در محیط ترمومغناطیس مورد مطالعه قرار دادند. نتایج آنها نشان داد که اثر سرعت بار متحرک روی رفتار دینامیکی سیستم، با افزایش تنش‌های پسماند سطحی افزایش می‌یابد. ناتساکا و همکاران [۱۰] رفتار دینامیکی یک نانولوله دوجداره

⁴ Doublet length scale parameter

⁵ Bifurcation

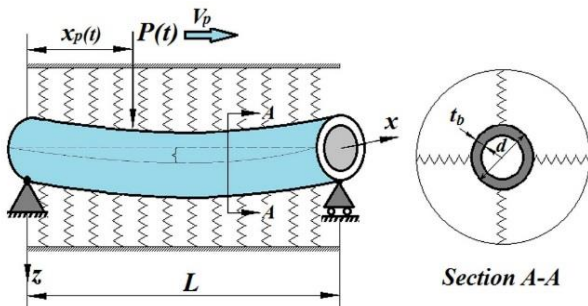
⁶ Quasi-periodic

¹ Carbon nanotubes

² Shell

³ Winkler

- شرایط مرزی در دو انتهای نانولوله به صورت ساده در نظر گرفته شده است.
- از اثرات اینرسی نیروی خارجی هارمونیک $P(t)$ صرف نظر شده است.
- شرایط اولیه برای ارتعاشات عرضی نانولوله، صفر در نظر گرفته شده است.



شکل ۱ مدل نانولوله کربنی احاطه شده توسط بستر الاستیک، تحت نیروی متحرک

مطابق با تئوری الاستیسیته غیرمحلّی ارینگن، تنش غیرمحلّی در یک نقطه خاص، تابعی از میدان کرنش در همه نقاط جسم است. معادله تئوری الاستیسیته غیرمحلّی، می‌تواند به صورت زیر بیان شود [۲۱]:

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \sigma = \tau \quad (1)$$

که e_0 ، $\nabla^2 a$ ، σ و τ به ترتیب ثابت ماده (که با روش‌های تجربی تعیین می‌شود)، طول مشخصه داخلی، عملگر لاپلاسین، تانسور تنش غیرمحلّی و ماتریس تنش محلّی می‌باشند. برای نانوتیر اوپلر - برنولی، از اثرات الاستیسیته غیرمحلّی در راستای شعاعی می‌توان صرف نظر نمود. بنابراین تنش غیرمحلّی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} \quad (2)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، اگر پارامتر غیرمحلّی $e_0 a$ معادل صفر در نظر گرفته شود، تئوری الاستیسیته کلاسیک (محلّی)، حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن تئوری تیر اوپلر - برنولی، معادله حرکت ارتعاشات عرضی (در امتداد محور z) نانولوله عبارت است از [۲۲]:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + p(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

آشوبناک^۱ در پاسخ دینامیکی سیستم ایجاد شود که در مطالعات بالا بررسی نگردیده است [۱۷]. در ادامه، به برخی تحقیقات انجام شده روی رفتار غیرخطی CNTs پرداخته می‌شود. ژو و همکاران [۱۸] از نمودارهای پاسخ زمانی، صفحه فاز و مقاطع پوانکاره برای تشخیص رفتار آشوبناک یک نانولوله کربنی قرار گرفته روی بستر وینکلر استفاده کرده‌اند. سپس مقادیر آستانه-ای^۲ را برای وقوع رفتار آشوبناک در سیستم معرفی کردند. معانی میان‌دوآب [۱۹] رفتار غیرخطی یک نانولوله کربنی تحت نیروی الکترواستاتیک را براساس تئوری گرادیان کرنشی بررسی نموده است. نتایج نشان داد که بسته به مقدار ولتاژ تحریک، اثر اندازه می‌تواند حرکت آشوبناک در پاسخ نانولوله را تغییر دهد. وانگ و ژانگ [۲۰] ارتعاشات آشوبناک یک نانولوله کربنی منحنی شکل را در میدان مغناطیسی و حرارتی مطالعه نمودند. نتایج نشان داد که پارامترهای شدت میدان مغناطیسی و طول نانولوله می‌توانند برای جلوگیری از وقوع حرکات آشوبناک به کار گرفته شوند.

مرور و جمع‌بندی مطالعات پیشین نشان می‌دهد که تحلیل دوشاخگی CNTs با در نظر گرفتن همزمان اثر بار متحرک هارمونیک، اثر سختی غیرخطی بستر الاستیک و اثر مقیاس اندازه تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. از این رو در مطالعه حاضر، پس از ارائه مدلی برای CNTs تحت بار متحرک هارمونیک بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلّی، به گسسته-سازی معادله با روش گلرکین پرداخته می‌شود. سپس اثرات دامنه، فرکانس و سرعت نیروی هارمونیک متحرک روی پاسخ دینامیک غیرخطی سیستم، توسط نمودارهای دوشاخگی، صفحه فاز، طیف توان، مقاطع پوانکاره و ماکزیمم نمای لیاپانوف بررسی می‌گردد.

۲- فرمول‌بندی و تعریف مسئله

در شکل (۱) مدل یک نانولوله کربنی احاطه شده توسط بستر الاستیک تحت نیروی متحرک، به طور شماتیک نشان داده شده است. نانولوله دارای ضخامت t_b ، طول L و مدول الاستیسیته E می‌باشد. برای مدل‌سازی و تحلیل سیستم، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

- نیروی خارجی هارمونیک $P(t)$ با سرعت ثابت v_p در امتداد محور خنثی نانولوله (محور x) حرکت می‌کند.
- جهت نیروی خارجی $P(t)$ عمود بر محور محور x است.
- ساختار نانولوله ایزوتروپیک و همگن است.

² Threshold

¹ Chaotic

که $x_p = v_p t$ موقعیت بار هارمونیک متحرک، P_0 دامنه بار هارمونیک متحرک، Ω فرکانس بار هارمونیک متحرک، k_1 ضریب خطی پاسترناک، k_2 ضریب غیرخطی پاسترناک و $\delta(\cdot)$ تابع دلتای دیراک با ویژگی زیر است:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = \begin{cases} (-1)^n g^{(n)}(x_0) & x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

که $\delta^{(n)}(\cdot)$ مشتق مرتبه n تابع دلتای دیراک و $g(\cdot)$ یک تابع دلخواه است.

۳- گسسته‌سازی با روش گلرکین

برای تبدیل معادله دیفرانسیل پاره‌ای (۷) به معادله دیفرانسیل معمولی، از روش گلرکین استفاده شده است. بر این اساس، پاسخ ارتعاشی سیستم می‌تواند به صورت زیر تخمین زده شود:

$$w(x,t) = \varphi(x)q(t) \quad (13)$$

در رابطه بالا، $q(t)$ مختصات تعمیم یافته است. اولین تابع ویژه $\varphi(x)$ نیز برای شرایط مرزی دوسر مفصل، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (14)$$

با جایگذاری معادله (۱۳) در (۷)، ضرب طرفین معادله (۷) در $\varphi(x)$ و نهایتاً انتگرال گیری در بازه $(0, L)$ ، معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم ارائه می‌شود:

$$M_0 \ddot{q}(t) + Kq(t) + \Lambda q^3(t) = F(t) \quad (15)$$

که:

$$M_0 = m \int_0^L \varphi^2(x) dx - m(e_0 a)^2 \int_0^L \varphi''(x) \varphi(x) dx \quad (16)$$

$$K = EI \int_0^L \varphi''''(x) \varphi(x) dx + k_1 \int_0^L \varphi^2(x) dx - k_1(e_0 a)^2 \int_0^L \varphi''(x) \varphi(x) dx \quad (17)$$

که $p(x,t)$ نیروی عرضی توزیع شده روی نانولوله، ρ چگالی نانولوله، A سطح مقطع، $w(x,t)$ جابجایی عرضی، t زمان و M ممان خمشی ایجاد شده در نانولوله است. ممان خمشی M به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M = - \int z \sigma_{xx} dA \quad (4)$$

که z مختصات عرضی اندازه‌گیری شده نسبت به محور x و در راستای مثبت ارتعاشات عرضی است. همچنین کرنش عرضی ϵ_{xx} برای تغییر شکل‌های کوچک، برابر است با:

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5)$$

با ترکیب معادلات (۲)، (۴) و (۵) داریم:

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6)$$

که $I = \int z^2 dA$ ممان اینرسی دوم سطح است. با در نظر گرفتن معادلات (۳) و (۶)، معادله دیفرانسیل حاکم برای ارتعاشات عرضی نانولوله، با در نظر گرفتن مدل تیر اویلر-برنولی و تئوری الاستیسیته غیرمحملی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[w(x,t) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = p(x,t) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \quad (7)$$

که m جرم بر واحد طول نانولوله است. نیروی عرضی توزیع شده $p(x,t)$ ، به صورت مجموع نیروی خارجی $F_e(x,t)$ و نیروی ناشی از بستر الاستیک $F_m(x,t)$ تعریف می‌شود. لذا:

$$p(x,y) = F_e(x,y) + F_m(x,y) \quad (8)$$

نیروی خارجی $F_e(x,t)$ ناشی از بار متحرک است. نیروی بستر الاستیک $F_m(x,t)$ نیز با مدل غیرخطی وینکلر و پاسترناک توصیف می‌شود [۲۳]. به طوریکه:

$$F_e(x,y) = P(t) \delta(x - x_p) \quad (9)$$

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t \quad (10)$$

$$F_m(x,y) = -k_1 w(x,t) - k_2 w^3(x,t) \quad (11)$$

هستند که سیگنال مورد نظر را می‌توان به صورت مجموعه‌ای گسسته از توابع هارمونیک نشان داد. هرگاه طیف توان دارای یک خط طیف باشد، نشان دهنده حرکت تناوبی است. طیف توان رفتار شبه‌تناوبی نیز از خطوط طیف در برخی فرکانس‌های نامتناسب با یکدیگر تشکیل شده است. مقطع پوانکاره یک صفحه‌ای در فضای فاز می‌باشد که نمودار فازی ایجاد شده از حل معادلات حاکم بر حرکت سیستم را قطع می‌کند. برای حرکت های تناوبی، مقطع پوانکاره تنها یک نقطه است. چنانچه حرکت شبه‌تناوبی باشد، مقطع پوانکاره یک منحنی بسته از نقاط منفصل را ایجاد می‌کند یا از تعدادی نقاط به صورت توده‌ای و با نظم خاصی تشکیل می‌شود. از نمودارهای دوشاخگی برای شناسایی مسیر ورود به حرکت نامنظم استفاده می‌شود. در نمودار دوشاخگی، دامنه دائمی یک سیستم غیرخطی به صورت تابعی از پارامتر غیرخطی سیستم ترسیم می‌شود. هنگام تغییر پارامتر کنترلی، اگر حرکت به صورت زیرهارمونیک با دوره تناوب n ام باشد، در هر گام مشخص، n نقطه مجزأ روی منحنی دیده خواهد شد. در نهایت اگر حرکت شبه‌تناوبی یا آشوبناک باشد، ستونی از نقاط روی منحنی مشاهده می‌شود. در این حالت با مراجعه به مقاطع پوانکاره می‌توان حرکت شبه‌تناوبی را از حرکت آشوبناک تشخیص داد. ماکزیمم نمای لیاپانوف می‌تواند به عنوان ابزاری برای تشخیص آشوب در یک سیستم مکانیکی استفاده گردد. چنانچه ماکزیمم نمای لیاپانوف مثبت باشد حرکت آشوبناک است و در غیر این صورت حرکت منظم خواهد بود. بنابراین ماکزیمم نمای لیاپانوف صفر، مرز میان رفتار آشوبناک و منظم می‌باشد [۲۴]، [۲۵].

۵- نتایج و بحث

در این قسمت فرکانس تحریک بدون بعد، به عنوان اولین پارامتر کنترلی در بررسی رفتار دینامیکی سیستم، در نظر گرفته شده است. در این مطالعه، پارامترهای بدون بعد سرعت عبور بار متحرک α و فرکانس تحریک β به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha = \frac{v_p}{v_{cr}} = \frac{\pi v_p}{\omega L} \quad (20)$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} \quad (21)$$

که ω فرکانس طبیعی سیستم خطی است. نمودار دوشاخگی شدن به عنوان اولین ابزار شناسایی رفتار سیستم به کار گرفته شده است. محور افقی این نمودار بیانگر پارامتر کنترلی دامنه

$$\begin{aligned} \Lambda &= k_2 \left(\int_0^L \varphi^4(x) dx \right. \\ &\quad \left. - 3(e_0 a)^2 \left(2 \int_0^L (\varphi'(x))^2 \varphi^2(x) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^L \varphi''(x) \varphi^3(x) dx \right) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} F(t) &= P(t) \cdot \int_0^L \left(\delta(x - x_p) \right. \\ &\quad \left. - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \delta(x - x_p)}{\partial x^2} \right) \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (19)$$

۴- الگوریتم حل عددی و ابزارهای تحلیل رفتار غیر خطی

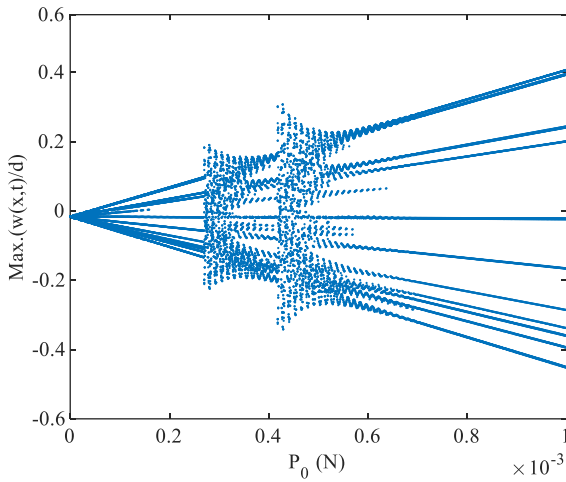
تعداد اندکی از معادلات دیفرانسیل حل تحلیلی و دقیق دارند که اغلب پیچیده و زمان‌بر می‌باشد. به همین دلیل روش‌های حل عددی، به روشی کارآمد در حل معادلات دیفرانسیل تبدیل شده‌اند. در این تحقیق، حل عددی معادلات حرکت با استفاده از روش رانج - کوتا در نرم‌افزار متلب انجام گرفته است. مقادیر عددی پارامترهای فیزیکی به کار رفته برای مدل‌سازی سیستم، در جدول (۱) ارائه گردیده است. تحلیل رفتار غیرخطی سیستم نیز با استفاده از ابزارهایی مانند صفحه فاز، طیف توان، مقاطع پوانکاره و نمودارهای دوشاخگی انجام شده است.

جدول ۱ مقادیر پارامترهای فیزیکی نانولوله کربنی [۶]

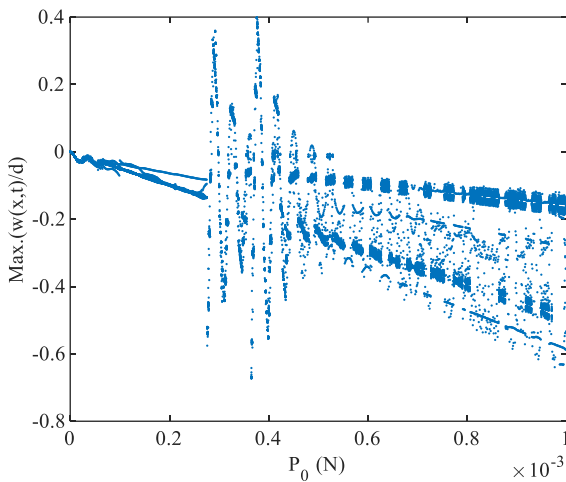
ردیف	پارامتر	نماد	مقدار
۱	مدول یانگ	E	1 T Pa
۲	قطر نانولوله	d	1 nm
۳	ضخامت نانولوله	t_b	0.35 nm
۴	طول نانولوله	L	40 nm
۵	چگالی جرمی نانولوله	ρ	2300 Kg/m ³

مسیرهای مداری فقط مشخص می‌کند که حرکت سیستم تناوبی یا غیرتناوبی است و نمی‌تواند اطلاعات کافی را برای شروع حرکت نامنظم فراهم کند. نمودار طیف توان که از تبدیل فوری گسسته متغییر خروجی به دست می‌آید، در اکثر فرایندهای پردازش سیگنال نیز به کار می‌رود. این نمودار از یک سری خطوط قائم تشکیل می‌شود و این خطوط مبین این موضوع

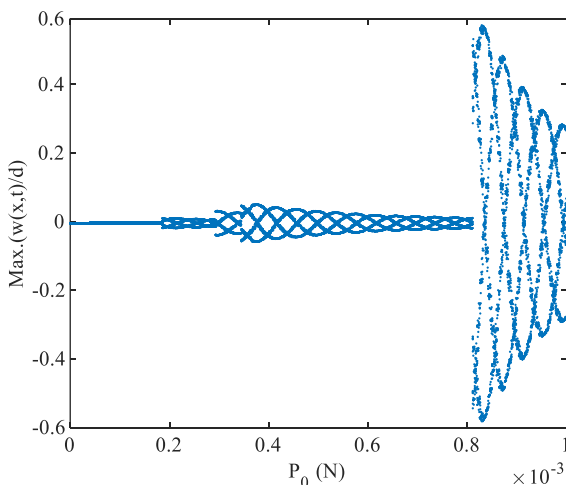
$P_0=0.00040\text{ N}$, و $P_0=0.00060\text{ N}$, $\beta=1.0$ $\beta=0.8$
 $\beta=1.2$ نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲ رفتار دوشاخگی جابجایی بدون بعد نانولوله با تغییر دامنه نیروی تحریک به ازای $\alpha=0.2$, $e_0a=0.1\text{ nm}$, $k_1=1 \times 10^5\text{ N/m}^2$ و $k_2=4 \times 10^{14}\text{ N/m}^4$ (الف $\beta=0.8$ (ب) $\beta=1.0$ (ج) $\beta=1.2$)

نیروی تحریک و محور عمودی بیانگر جابجایی عرضی وسط نانولوله است. شکل (۲) اثر فرکانس تحریک را بر رفتار دوشاخگی پاسخ نانولوله کربنی احاطه شده توسط بستر الاستیک تحت نیروی متحرک هارمونیک، نشان می‌دهد.

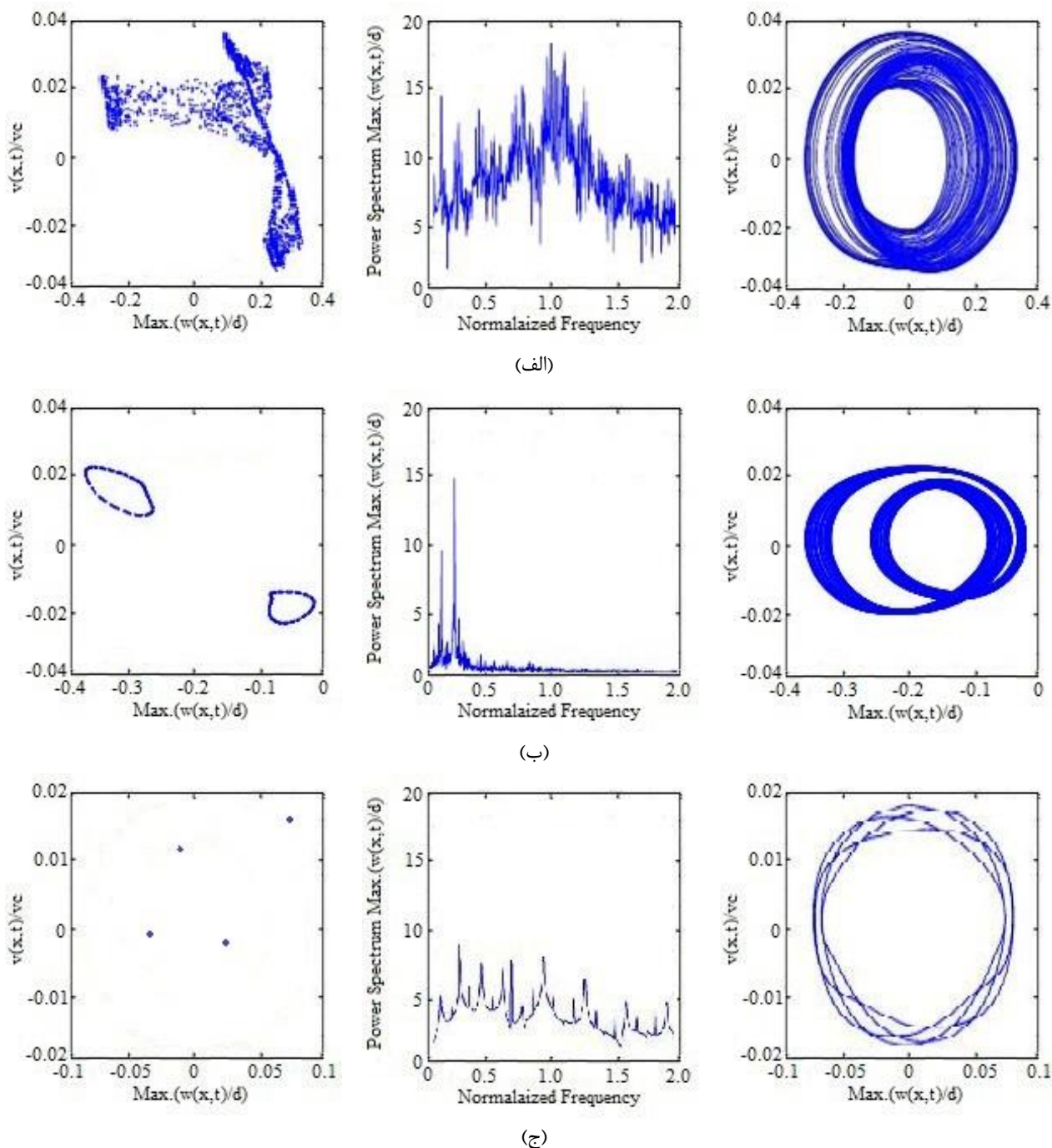
به ازای پارامتر فرکانس تحریک بدون بعد $\beta=0.8$ ، با افزایش دامنه نیروی تحریک، رفتار دینامیکی سیستم وارد حرکت زیر هارمونیک با پریود $11T$ می‌شود. این حالت تا $P_0=0.00026\text{ N}$ ادامه داشته و در $P_0=0.00027\text{ N}$ وارد یک رفتار نامنظم (شبه-پریودیک یا آشوبناک) می‌شود. تشخیص این دو نوع رفتار از هم نیاز به دیگر ابزارهای شناسایی دارد که در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرند. با افزایش مجدد دامنه نیروی تحریک، رفتار زیرهارمونیک دیگری را در محدوده $P_0=[0.00028-0.001]\text{ N}$ می‌توان مشاهده نمود.

به ازای پارامتر فرکانس تحریک $\beta=1.0$ حرکت زیرهارمونیک در محدوده $P_0=[0.0-0.00028]\text{ N}$ قابل دستیابی است. پس از آن نمودار دوشاخگی شدن در محدوده نسبتاً وسیعی رفتار نامنظمی را نشان می‌دهد.

به ازای پارامتر فرکانس تحریک بدون بعد $\beta=1.2$ ، رفتار نانولوله کربنی مورد نظر، تا رسیدن به مقدار نیروی تحریک دامنه نیروی تحریک $P_0=0.00019\text{ N}$ به صورت پریودیک است. سپس در محدوده رفتار زیرهارمونیک با دوره تناوب $4T$ می‌شود. مجدداً در $P_0=[0.00082-0.001]\text{ N}$ به یک رفتار زیرهارمونیک دیگری با دوره تناوب $4T$ وارد می‌شود.

با مقایسه نمودارهای دوشاخگی می‌توان نتیجه گرفت که در فرکانس‌های بالا، پاسخ سیستم با افزایش دامنه تحریک در وضعیت زیرهارمونیک باقی می‌ماند. همچنین افزایش فرکانس، وقوع اولین رفتار نامنظم سیستم را به تأخیر می‌اندازد. نکته دیگر اینکه هنگامی که فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم خطی برابر است ($\beta=1.0$)، با افزایش دامنه تحریک، رفتار سیستم به صورت نامنظم باقی می‌ماند در حالی که در دو حالت $\beta=0.8$ و $\beta=1.2$ ، سیستم دارای یک قابلیت خودکنترلی برای گذر از رفتار نامنظم و برگشتن به رفتار زیرهارمونیک می‌باشد.

با پیگیری چگونگی رفتار سیستم از نمودارهای دوشاخگی، می‌توان یک شناخت کلی نسبت به رفتار سیستم در محدوده مشخصی از پارامتر کنترلی پیدا کرد. برای بررسی دقیق‌تر رفتار سیستم، از دیگر ابزارهای شناسایی نیز استفاده می‌شود به‌ویژه تشخیص رفتار نامنظم شبه‌پریودیک از رفتار آشوبناک، با نمودار دوشاخگی شدن عملاً ناممکن است. شکل (۳) صفحه فاز، طیف توان و مقطع پوانکاره پاسخ نانولوله را در $P_0=0.00045\text{ N}$



شکل ۳ صفحه فاز، طیف توان و مقطع پوانکاره جابجایی بدون بعد نانولوله به ازای $\alpha=0.2$ ، $e_0a=0.1$ nm، $k_1=1 \times 10^5$ N/m² و $k_2=4 \times 10^{14}$ N/m⁴ (الف) $P_0=0.00045$ N، $\beta=0.8$ (ب) $P_0=0.00060$ N، $\beta=1.0$ (ج) $P_0=0.00040$ N، $\beta=1.2$

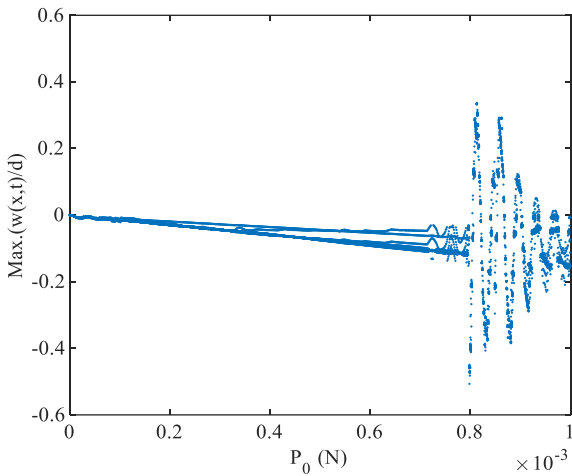
طیف توان و مقطع پوانکاره در این مرحله برای تشخیص این دو پاسخ، بسیار کارسازند.

شکل (۳-ب) مسیره‌های صفحه فاز، طیف توان و مقطع پوانکاره را در $P_0=0.00060$ N، $\beta=1.0$ نشان می‌دهد. طیف فرکانسی گسترده در نمودار طیف توان، همراه با منحنی‌های بسته موجود در مقطع پوانکاره حاکی از رفتار شبه‌پریودیک سیستم مورد نظر است.

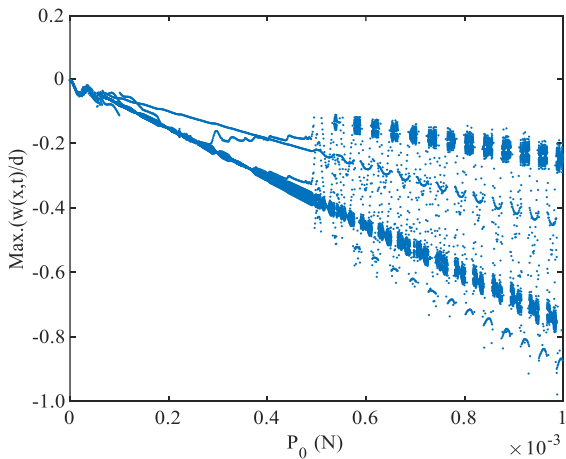
شکل (۳-ج) مسیره‌های صفحه فاز، طیف توان و مقطع پوانکاره را در $P_0=0.00040$ N، $\beta=1.2$ نشان می‌دهد. رفتار

شکل (۳-الف) صفحه فاز، طیف توان و مقطع پوانکاره را در $P_0=0.00045$ N، $\beta=0.8$ نشان می‌دهد. نشانه‌های پاسخ آشوبناک سیستم در این شکل‌ها از روی گستره وسیع فرکانس‌ها در نمودار طیف توان، مسیره‌های متعدد منحنی صفحه فاز و ساختار فراکتالی نقش بسته در نگاشت پوانکاره، به خوبی قابل تشخیص است. همانگونه که قبلاً اشاره شد، شناسایی نوع رفتار نامنظم (شبه‌تناوبی از آشوبناک) به تنهایی از روی نمودار دوشاخگی شدن مشکل بود. زیرا در این حالت نمودار یاد شده فقط به صورت یک سری خطوط پیوسته است. لذا نمودارهای

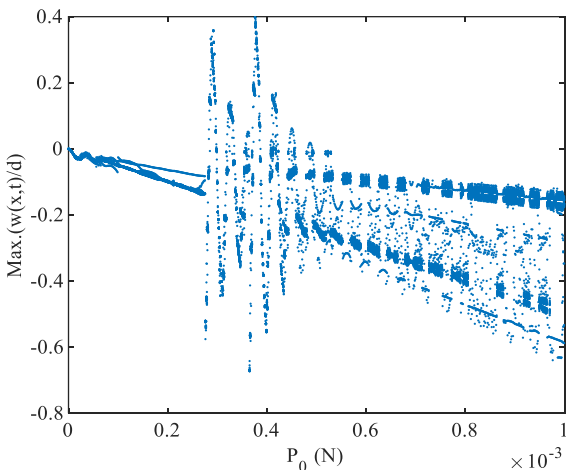
نشان داده شده است. همان طور که ملاحظه می شود، مثبت شدن ماکزیمم نمای لیاپانوف، وقوع حتمی آشوب را به ازای این پارامترها نشان می دهد.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۴ رفتار دوشاخگی جابجایی بدون بعد نانولوله با تغییر دامنه نیروی تحریک به ازای $\beta=1.0$, $\epsilon\omega a=0.1$ nm, $k_I=1 \times 10^5$ N/m² و $k_2=4 \times 10^{14}$ N/m⁴ (الف) $\alpha=0.05$ (ب) $\alpha=0.1$ (ج) $\alpha=0.2$

زیرهارمونیک با پریود $4T$ را می توان به راحتی با یک قله مشخص در فرکانس $1/4$ در نمودار طیف توان و چهار نقطه مجزا در نمودار مقطع پوانکاره مشاهده کرد.

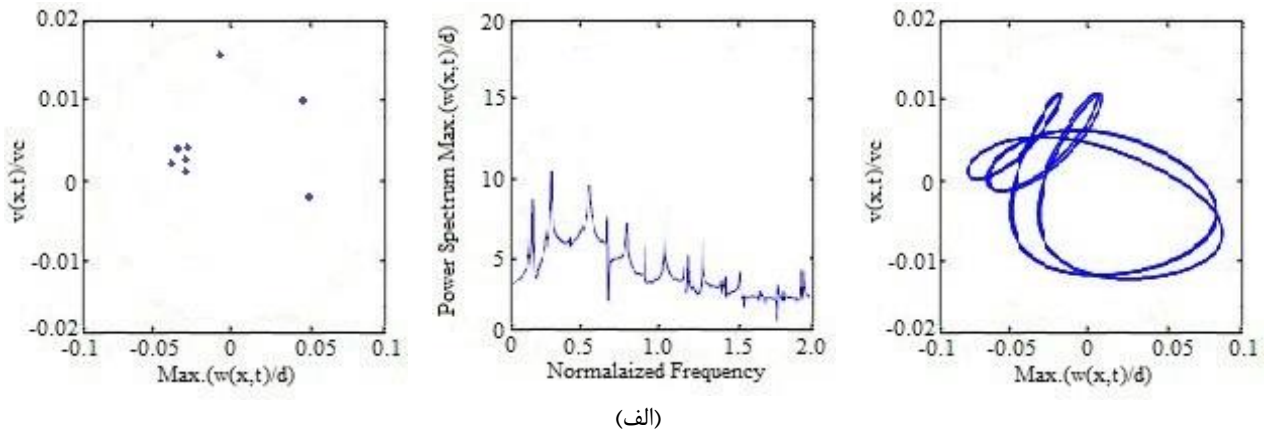
یکی دیگر از پارامترهای اثرگذار بر رفتار ارتعاشی نانولوله کربنی احاطه شده توسط بستر الاستیک تحت نیروی متحرک هارمونیک، سرعت عبور بار متحرک است که در این مطالعه با پارامتر بدون بعد α نشان داده شده است. شکل (۴) اثر سرعت عبور بار متحرک را بر رفتار دوشاخگی پاسخ نانولوله کربنی احاطه شده توسط بستر الاستیک تحت نیروی متحرک هارمونیک، نشان می دهد.

به ازای پارامتر سرعت عبور بار متحرک بدون بعد $\alpha=0.05$ ، حرکت زیرهارمونیک در محدوده $P_0=[0.0-0.00079]$ N قابل دستیابی است. با افزایش دامنه نیروی تحریک، سیستم وارد یک رفتار نامنظم (شبه پریودیک یا آشوبناک) شده که تا دامنه $P_0=0.001$ N ادامه می یابد.

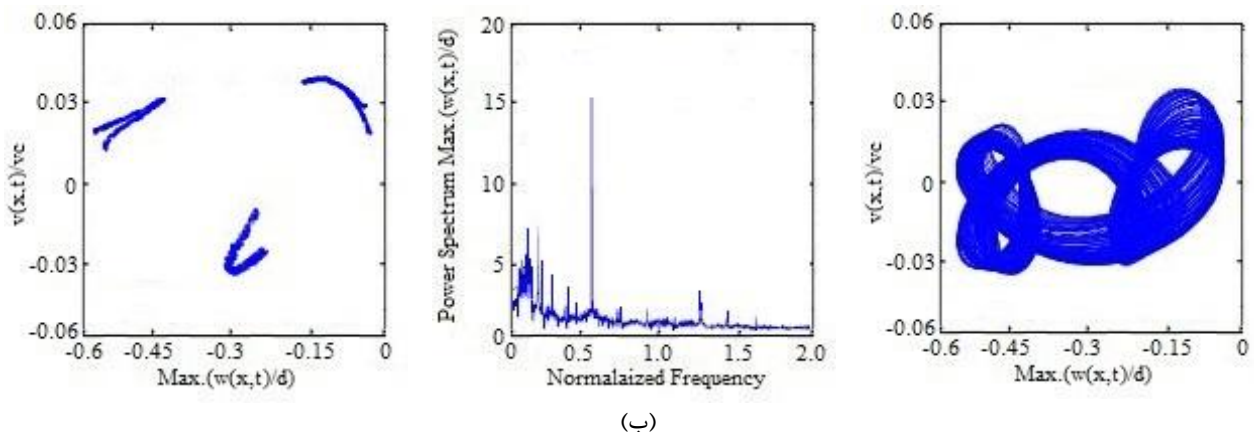
به ازای پارامتر سرعت عبور بار متحرک بدون بعد $\alpha=0.1$ ، رفتار سیستم تا دامنه نیروی تحریک $P_0=0.00048$ N به صورت زیرهارمونیک باقی می ماند. در دامنه نیروی تحریک $P_0=0.00049$ N رفتار سیستم ناگهان وارد حالت نامنظم شده و تا $P_0=0.001$ N ادامه می یابد.

با مقایسه نمودارهای دوشاخگی به دست آمده از حل عددی، می توان نتیجه گرفت که افزایش سرعت عبور بار متحرک هارمونیک باعث می شود که وقوع اولین رفتار نامنظم سیستم، در دامنه های نیروی تحریک پایین تری اتفاق بیفتد. به عبارت دیگر، در سرعت های کمتر بار متحرک، گستره وسیع تری از حرکت پریودیک برای نانولوله تحت بار متحرک هارمونیک، قابل دستیابی است.

شکل (۵) مسیره های صفحه فاز، خطوط طیف توان و مقطع پوانکاره پاسخ نانولوله کربنی احاطه شده با بستر الاستیک تحت بار متحرک را در پارامترهای سرعت عبور بار و نیروی تحریک $P_0=0.00060$ N, $\alpha=0.1$ و $P_0=0.00060$ N, $\alpha=0.05$ نشان می دهد. نتایج ارائه شده در شکل (۵-الف) بیانگر ارتعاشات زیرهارمونیک با دوره تناوب $8T$ هستند. البته تشخیص حرکت زیرهارمونیک هشتم از حرکت زیرهارمونیک چهارم، در نمودار فاز و طیف توان تقریباً مشکل است. اما هشت نقطه نگاشت شده در مقطع پوانکاره، نمایانگر این رفتار به ازای این پارامتر سرعت می باشند. شکل (۵-ب) مسیره های صفحه فاز، نمودار طیف توان و مقطع پوانکاره را به ازای پارامترهای $P_0=0.00060$ N, $\alpha=0.1$ نشان می دهد. وجود نقاط پراکنده و نامنظم در مقطع پوانکاره دلیلی بر آشوبناک بودن رفتار سیستم در این مقدار از پارامتر سرعت عبور بار دارند. برای تأیید آشوبناک بودن رفتار نانولوله کربنی احاطه شده توسط بستر الاستیک تحت نیروی متحرک هارمونیک، ماکزیمم نمای لیاپانوف نیز به ازای پارامترهای عددی نمودارهای (۳-الف) و (۵-ب) ترسیم گردیده و در شکل (۶)

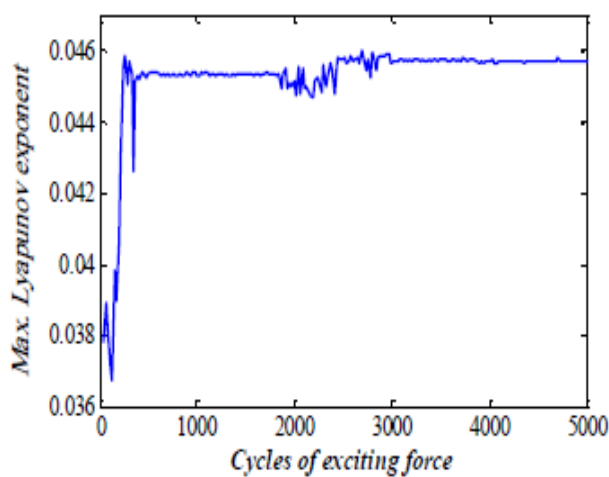


(الف)

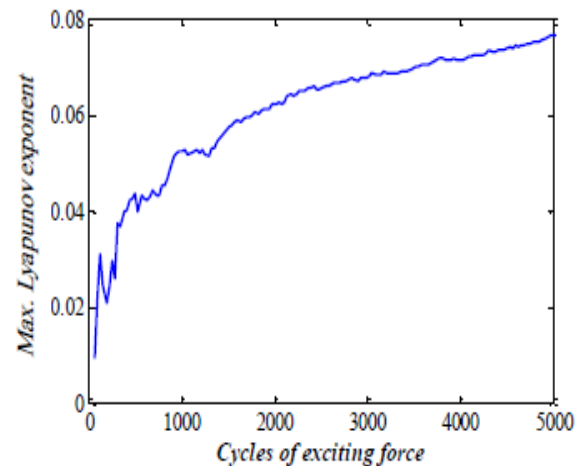


(ب)

شکل ۵ صفحه فاز، طیف توان و مقطع پوانکاره جابجایی بدون بعد نانولوله به ازای $\beta=1.0$ ، $e_0a=0.1$ nm، $k_1=1 \times 10^5$ N/m² و $k_2=4 \times 10^{14}$ N/m⁴ (الف) $P_0=0.00060$ N، $\alpha=0.05$ (ب) $P_0=0.00060$ N، $\alpha=0.1$



(ب)



(الف)

شکل ۶ ماکزیمم نمای لیاپانوف به ازای $e_0a=0.1$ nm و $k_1=1 \times 10^5$ N/m² و $k_2=4 \times 10^{14}$ N/m⁴ (الف) $\beta=0.8$ ، $\alpha=0.2$ (ب) $P_0=0.00045$ N، $\beta=1.0$ ، $\alpha=0.1$

۶- اعتبارسنجی

لذا برای اعتبارسنجی مدل پیش رو و مقایسه با تحقیقات انجام شده، لازم است ساده‌سازی‌هایی روی مدل صورت گیرد. برای این منظور با صفر در نظر گرفتن پارامتر الاستیسیته غیرمحل $e_0a=0.0$ nm و همچنین ضریب غیرخطی پاسترناک $k_2=0$ N/m⁴ می‌توان به مدل ارائه شده در مرجع [۷] رسید و نتایج را

همان‌طور که گفته شد، ارتعاشات آشوبناک نانولوله کربنی احاطه شده توسط بستر الاستیک تحت نیروی متحرک هارمونیک، با مدل الاستیسیته غیرمحل، در تحقیقات پیشین ارائه نشده است.

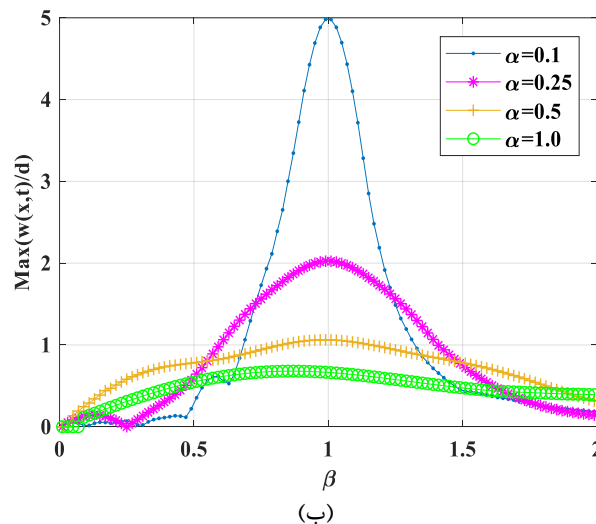
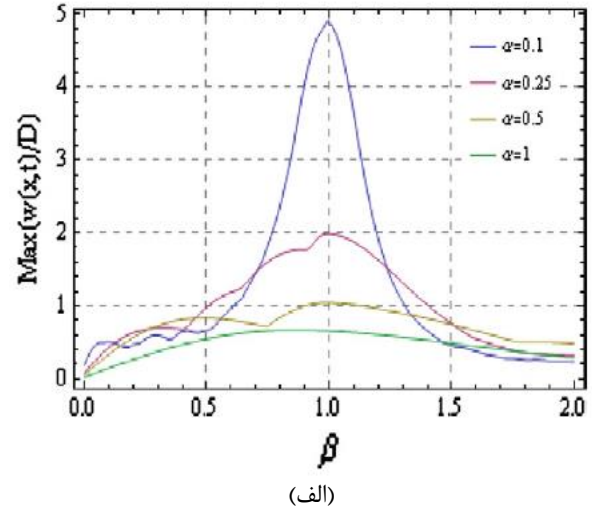
تئوری تیر اویلر-برنولی، الاستیسیته غیرمحملی و فنر وینکلر استفاده شده است. مسیرهای صفحه فاز، طیف توان، مقاطع پوانکاره، نمودارهای دوشاخگی و ماکزیمم نمای لیاپانوف برای تحلیل رفتار غیرخطی به کار گرفته شدند. نتایج نشان داد که دامنه، فرکانس و سرعت نیروی هارمونیک متحرک اثرات قابل ملاحظه‌ای روی نوع پاسخ دینامیکی سیستم دارند. به طوری که در فرکانس‌های تحریک بالا، پاسخ سیستم با افزایش دامنه تحریک در وضعیت زیرهارمونیک باقی می‌ماند. ضمن اینکه با افزایش فرکانس تحریک می‌توان وقوع اولین رفتار نامنظم سیستم (شبه‌پریودیک یا آشوبناک) را به تأخیر انداخت. نتیجه دیگر اینکه هنگامی که فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم خطی برابر است (تشدید)، با افزایش دامنه تحریک، رفتار سیستم به صورت نامنظم باقی می‌ماند در حالی که در حالت کمتر یا بیشتر از فرکانس تشدید، یک قابلیت خودکنترلی برای گذر از رفتار نامنظم و برگشتن به رفتار زیرهارمونیک برای سیستم مشاهده شد. همچنین نتایج حاکی از آن است که افزایش سرعت عبور بار باعث می‌شود که وقوع اولین رفتار نامنظم سیستم، در دامنه‌های تحریک پایین‌تری اتفاق بیفتد. به عبارت دیگر، در سرعت‌های کمتر بار متحرک، گستره وسیع‌تری از حرکت پریودیک قابل دستیابی است. بنابراین با بهره‌گیری از نتایج این تحقیق و انتخاب مناسب پارامترها می‌توان از وقوع رفتار نامنظم در سیستم جلوگیری نمود.

۸- فهرست علائم و اختصارات

علائم انگلیسی

a	طول مشخصه داخلی
A	سطح مقطع
e_0	ثابت ماده
E	مدول الاستیسیته
F	نیروی معادل
I	ممان اینرسی دوم سطح
K	ضریب سختی خطی معادل
K_1	ضریب سختی خطی بستر الاستیک
K_2	ضریب سختی غیرخطی بستر الاستیک
L	طول نانولوله
m	جرم بر واحد طول نانولوله
M	ممان خمشی
M_0	جرم معادل
$p(x,t)$	نیروی عرضی توزیع شده روی نانولوله
P	نیروی متحرک
P_0	دامنه نیروی متحرک
t	زمان
v_p	سرعت بار متحرک
$W(x,t)$	جابجایی عرضی نانولوله

با هم مقایسه نمود. شکل (۷) اثر پارامتر فرکانس تحریک بدون بعد β را بر پاسخ دینامیکی نانولوله کربنی احاطه شده توسط بستر الاستیک خطی تحت نیروی متحرک هارمونیک، نشان می‌دهد (مرجع و مطالعه حاضر).



شکل ۷ اثر فرکانس تحریک روی پاسخ دینامیکی نانولوله کربنی احاطه شده توسط بستر الاستیک خطی تحت نیروی متحرک هارمونیک؛ (الف) مرجع [۷] (ب) مطالعه حاضر

با مقایسه نمودارهای پاسخ فرکانسی ارائه شده در این شکل، همخوانی مناسبی بین نتایج به دست آمده و نتایج مرجع مشاهده می‌گردد. همچنین ملاحظه می‌گردد که تغییر شکل دینامیکی ماکزیمم، با افزایش پارامتر سرعت عبور بار متحرک، کاهش می‌یابد.

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش تحلیل دینامیک غیرخطی نانولوله‌های کربنی احاطه شده با بستر الاستیک غیرخطی تحت نیروی متحرک هارمونیک مورد بررسی قرار گرفت. برای مدل‌سازی سیستم از

nanoparticle," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 10, pp. 6940-6951, 2013/02/27/ 2013, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.02.020>.

[8] M. Pirmoradian, E. Torkan, and D. Toghraie, "Study on size-dependent vibration and stability of DWCNTs subjected to moving nanoparticles and embedded on two-parameter foundations," *Mechanics of materials*, vol. 142, pp. 103279, 2019/12/11/ 2020, <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.103279>.

[9] H. Sarparast, A. Alibeigloo, V. Borjalilou, and O. Koochakianfard, "Forced and free vibrational analysis of viscoelastic nanotubes conveying fluid subjected to moving load in hygro-thermo-magnetic environments with surface effects," *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, vol. 22, no. 172, pp. 1-28, 2022/07/28/ 2022, <https://doi.org/10.1007/s43452-022-00489-3>.

[10] J. Natsuki, P. Wu, H. Jiang, and T. Natsuki, "Dynamic analysis of double-walled carbon nanotubes embedded in elastic medium under a nanoparticle delivery," *Diamond and Related Materials*, vol. 128, pp. 109194, 2022/07/02/ 2022, <https://doi.org/10.1016/j.diamond.2022.109194>.

[11] C. Thongchom, P. Roodgar Saffari, P. Roodgar Saffari, N. Refahati, S. Sirimontree, S. Keawsawasvong, and S. Titotto, "Dynamic response of fluid-conveying hybrid smart carbon nanotubes considering slip boundary conditions under a moving nanoparticle," *Mechanics of advanced materials and structures*, vol. 30, no. 11, pp. 1447-1452, 2022/03/17/ 2023, <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2051101>.

[12] R. Özmen, and I. Esen, "Dynamic response of embedded Timoshenko CNTs exposed to magnetic and thermal fields subjected to moving load based on doublet mechanics," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 45, pp. 590, 2023/10/18/ 2023, <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04506-1>.

[13] X. Ma, M. Roshan, K. Kiani, and A. Nikkhoo, "Dynamic response of an elastic tube-like nanostructure embedded in a vibrating medium and under the action of moving nano-objects," *Symmetry*, vol. 15, no. 10, pp. 1827, 2023/09/26/ 2023, <https://doi.org/10.3390/sym15101827>.

[14] J. Leng, and T. Chang, "Fluid-solid coupling for microscale transport of nanoparticles in ultralong carbon nanotubes," *Thin-Walled Structures*, vol. 195, pp. 111431, 2023/12/07/ 2024, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111431>.

[15] Z. Keshtkar Mizuji, M. Ghadiri, A. Rajabpour, M. Farajzadeh Ahari, A. Zajkani, and S. Yazdinia,

x	مختصات طولی
x_p	موقعیت بار متحرک
z	مختصات عرضی
α	پارامتر سرعت بار بدون بعد
β	پارامتر فرکانس تحریک بدون بعد
δ	دلتای دیراک
ϵ_{xx}	کرنش عرضی
Λ	ضریب سختی غیرخطی معادل
σ	تانسور تنش
τ	تنش محلی
φ	تابع ویژه
ω	فرکانس طبیعی سیستم خطی
Ω	فرکانس نیروی متحرک

۹- مراجع

[1] A. Bianco, K. Kostarelos, and M. Prato, "Applications of carbon nanotubes in drug delivery," *Current Opinion in Chemical Biology*, vol. 9, no. 6, pp. 674-679, 2005/10/17/ 2005, <https://doi.org/10.1016/j.cbpa.2005.10.005>.

[2] R. Chowdhury, S. Adhikari, and J. Mitchell, "Vibrating carbon nanotube based bio-sensors," *Physica E*, vol. 42, pp. 104-109, 2447-2449, 2009/09/23/ 2009, <https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.09.007>.

[3] R. Martel, T. Schmidt, H. R. Shea, T. Hertel, and P. Avouris, "Single- and multi-wall carbon nanotube field-effect transistors," *Applied Physics Letters*, vol. 73, no. 17, pp. 2447-2449, 1998/08/24/ 1998, <https://doi.org/10.1063/1.122477>.

[4] T. P. Chang, "Stochastic FEM on nonlinear vibration of fluid-loaded double-walled carbon nanotubes subjected to a moving load based on nonlocal elasticity theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 54, pp. 391-399, 2013/06/20/ 2013, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.012>.

[5] R. Ebrahimi, "Chaotic vibrations of carbon nanotubes subjected to a traversing force considering nonlocal elasticity theory," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part N: Journal of Nanomaterials, Nanoengineering and Nanosystems*, vol. 236, no. 1, pp. 31-40, 2021/11/08/ 2022, <https://doi.org/10.1177/23977914211063309>.

[6] M. Simsek, "Vibration analysis of a single-walled carbon nanotube under action of a moving harmonic load based on nonlocal elasticity theory," *Physica E*, vol. 43, no. 1, pp. 182-191, 2010/07/11/ 2010, <https://doi.org/10.1016/j.physe.2010.07.003>.

[7] Z. Hong, D. Qing-tian, and L. Shao-hua, "Vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium under a moving internal

- [20] Q. Wang, and Z. Zhang, "Chaotic vibration of a curved CNT conveying magnetic fluid in the thermo-magnetic field considering the surface effects," *Thin-Walled Structures*, vol. 202, pp. 112047, 2024/06/10/ 2024, <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112047>.
- [21] A. C. Eringen, and D. G. Edelen, "On nonlocal elasticity," *International journal of engineering science*, vol. 10, no. 3, pp. 233-248, 2003/02/26/ 1972, [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90039-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90039-0).
- [22] W. Weaver, S. P. Timoshenko, and D. H. Young, "Vibration problems in engineering," New York: Wiley, 1990.
- [23] H. Askari, and E. Esmailzadeh, "Forced vibration of fluid conveying carbon nanotubes considering thermal effect and nonlinear foundations," *Composites Part B*, vol. 113, pp. 31-43, 2016/12/28/ 2017, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.12.046>.
- [24] R. Ebrahimi, "Chaos in coupled lateral-longitudinal vibration of electrostatically actuated microresonators," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 156, pp. 111828, 2022/01/23/ 2022, <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.111828>.
- [25] M. Molavian Jazi, S. Ziaei-Rad, and R. Ebrahimi, "Chaotic vibration of atomic force microscopes based on the modified couple stress theory," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 92, pp. 3683-3694, 2022/09/17/ 2022, <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02256-5>.
- "Numerical modeling of a body vessel for dynamic study of a nano cylindrical shell carrying fluid and a moving nanoparticle," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 152, pp. 362-382, 2023/04/25/ 2023, <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.04.005>.
- [16] M. Hashemian, D. J. Jasim, S. M. Sajadi, R. Khanahmadi, M. Pirmoradian, and S. Salahshour, "Dynamic stability of the euler nanobeam subjected to inertial moving nanoparticles based on the nonlocal strain gradient theory," *Heliyon*, vol. 10, no. 9, pp. e30231, 2024/04/26/ 2024, <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e30231>.
- [17] H. Ramezannejad Azarboni, and S. A. Edalatpanah, "Chaotic vibrations of a harmonically excited carbon nanotube with consideration of thermomagnetic field and surface effects," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 233, no. 10, pp. 3649-3658, 2019/01/10/ 2019, <https://doi.org/10.1177/0954406218823810>.
- [18] L. Zhou, F. Chen, and Z. Zhao, "Subharmonic bifurcation and chaos of a carbon nanotube supported by a Winkler and Pasternak foundation," *International Journal of Modern Physics B*, vol. 33, no. 19, pp. 1950207, 2019/08/06/ 2019, <https://doi.org/10.1142/S0217979219502072>.
- [19] E. Maani Miandoab, "Onset of chaos in nano-resonators based on strain gradient theory: Numerical analysis," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 101, pp. 105864, 2021/05/06/ 2021, <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105864>.