

اهمیت انتشار عدم قطعیت در مطالعات و بررسی روش های تخمین آن

چکیده: عدم قطعیت در اندازه گیری ها، محاسبات و شبیه سازی ها یکی از موضوعات مهم و چالش برانگیز است که در مطالعات، کمتر مورد توجه قرار می گیرد. گزارش نتایج بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت های محتمل، می تواند موجب نتیجه گیری های نادرست گردد. جهت محاسبه انتشار عدم قطعیت از ورودی های یک مسئله به خروجی های آن، روش های تحلیلی و احتمالات متعددی گسترش یافته اند. در این تحقیق به معرفی و بررسی مهم ترین روش های محاسبه انتشار عدم قطعیت پرداخته شده است. روش های مورد بررسی شامل روش های تحلیلی انتشار بیشترین عدم قطعیت - بروت فورس، ترکیب بدترین حالت و انتشار واریانس و همچنین روش احتمالاتی مونت کارلو می باشد. در ادامه برای تابع دبی جرمی که حاصل ضرب سه پارامتر چگالی، سطح مقطع و سرعت است، بازه عدم قطعیت به روش های مختلف محاسبه و مقایسه شده است. مهمترین هدف از تحقیق حاضر تاکید بر اهمیت توجه به پارامتر عدم قطعیت به عنوان عاملی تأثیرگذار در تحلیل نتایج مطالعات مختلف به ویژه در حوزه مسائل مهندسی است.

واژه های راهنما: عدم قطعیت، خطا، انتشار عدم قطعیت، انتشار واریانس، بازه اطمینان

زهرا ایمانی نژاد

مدرس حق التدریس،
گروه مهندسی مکانیک،
مجتمع آموزش عالی گناباد،
گناباد

حمید بهلولی*

استادیار،
گروه مهندسی مکانیک،
واحد بیرجند،
دانشگاه آزاد اسلامی،
بیرجند

مقاله مروری

دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۲۶

بازنگری: ۱۴۰۳/۰۱/۲۳

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۳۱

Zohreh Imani Nejad
Adjunct Professor,
Department of
Mechanical Engineering,
University of Gonabad,
Gonabad

Hamid Bohluli*
Assistant Professor,
Department of
Mechanical Engineering,
Islamic Azad University,
Birjand Branch,
Birjand

The importance of uncertainty propagation in studies and investigation of the methods to estimate it

Abstract: The consideration of uncertainty in measurements, computations, and simulations is one of the most challenging issues, often overlooked. Reporting results without taking possible uncertainties into account can lead to incorrect decisions. This study delves into various analytical and probabilistic methods for computing uncertainty propagation. It explores key analytical methods, such as the propagation of maximum uncertainty-Brute Force, the worst combination method, and variance propagation. Additionally, the study examines the Monte Carlo probabilistic approach. Subsequently, the study applies these methods to calculate the uncertainty in flow mass, which is determined by multiplying density, area, and velocity, using different approaches. This study emphasizes the importance of uncertainty as an effective parameter in different studies especially in engineering.

Keywords: Uncertainty, Error, Uncertainty propagation, Variance propagation, Confidence intervals

۱- مقدمه

اخیر گزارش نتایج همراه با بازه‌ی عدم قطعیت محتمل، در مطالعات حوزه‌ی مهندسی مکانیک نیز مانند سایر علوم رشد چشمگیری داشته است [۶-۸]، اما هنوز هم نیاز به توجه بیش‌تر به این موضوع وجود دارد.

۲- انتشار عدم قطعیت

بسیاری از کمیت‌های فیزیکی به صورت مستقیم قابل اندازه‌گیری نیستند و با کمک توابع ریاضی که دارای ورودی متغیرهای مستقل هستند، محاسبه می‌شوند. مثلاً کمیت F در رابطه‌ی (۱) وابسته به متغیرهای x_i است. از جمله کمیت‌های وابسته می‌توان به چگالی، سرعت، شتاب، توان، گرما و دبی اشاره نمود.

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (1)$$

اندازه‌گیری هر یک از متغیرهای مستقل x_i با درجه‌ای از عدم قطعیت همراه است. چنانچه هر یک از این متغیرها دارای میانگین \bar{x}_i و عدم قطعیت δx_i باشند، عدم قطعیت برای هر یک از آن‌ها به صورت رابطه‌ی (۲) گزارش می‌شود.

$$x_i = \bar{x}_i + \delta x_i \quad (2)$$

عدم قطعیت در پارامترها و متغیرهای ورودی یک تابع می‌تواند از طریق محاسبات ریاضی منتشر شده و باعث بروز عدم قطعیت در خروجی تابع گردد که به آن انتشار عدم قطعیت^۵ گفته می‌شود. به عنوان مثال دبی جرمی \dot{m} را در نظر بگیرید که طبق رابطه‌ی (۳) تابعی از چگالی ρ ، سطح مقطع A و سرعت v است. مقادیر گزارش شده برای هر یک از این کمیت‌ها به همراه بازه‌ی عدم قطعیت مربوط به آن در روابط (۴) تا (۶) بیان شده است که از طریق محاسبات منتشر شده و موجب بروز عدم قطعیت در \dot{m} می‌گردد. در ادامه عدم قطعیت برای \dot{m} محاسبه شده است.

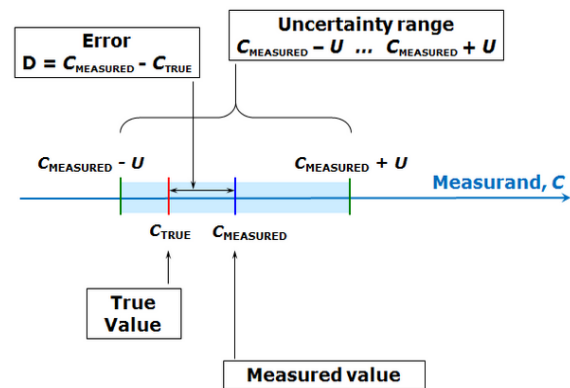
$$\dot{m} = \rho Av \quad (3)$$

$$\rho = 2.0 \pm 0.25 \frac{gr}{cm^3} \quad (4)$$

$$A = 3.4 \pm 0.075 cm^2 \quad (5)$$

$$v = 2.0 \pm 0.125 \frac{cm}{s} \quad (6)$$

عدم قطعیت^۱ در لغت به معنای شک و تردید است و اصطلاح رایج عدم قطعیت در اندازه‌گیری^۲ به معنی تردید درباره‌ی اعتبار نتایج یک اندازه‌گیری است [۱، ۲]. عدم قطعیت مفهومی پیچیده است که در منابع مختلف، تفاسیر گوناگونی نظیر ناکامل بودن^۳، ناسازگاری^۴، غیرقابل اعتماد بودن^۵، احتمال خطا و محدوده‌ی خطا برای آن بیان شده است [۳]. باید توجه داشت که عدم قطعیت و خطا^۶ دو مفهوم کاملاً متفاوت هستند. خطا به معنی تفاوت بین مقدار اندازه‌گیری شده و مقدار دقیق یا مرجع^۷ است. از آن‌جا که مقدار واقعی یک کمیت دقیقاً مشخص نیست، لذا خطا یک مفهوم ایده‌آل است و امکان تعیین مقدار دقیق آن وجود ندارد. عدم قطعیت اطلاعاتی در مورد کیفیت اندازه‌گیری بیان می‌کند و به صورت یک گستره یا بازه که نشان‌گر مقدار احتمالی خطا در اندازه‌گیری‌های متعدد است، گزارش می‌شود. گاهی ممکن است نتیجه یک اندازه‌گیری به صورت اتفاقی و ندانسته دارای خطای بسیار ناچیز و یا حتی صفر باشد، یعنی ممکن است مقدار اندازه گرفته شده بر مقدار مرجع منطبق باشد در حالی که اندازه‌گیری با عدم قطعیت بالایی همراه است. در شکل (۱) تفاوت مفهوم خطا و عدم قطعیت نشان داده شده است. حتی دقیق‌ترین وسایل اندازه‌گیری نیز با درجه‌ای از عدم قطعیت همراه هستند، لذا احتساب عدم قطعیت در تصمیم‌گیری‌ها اهمیت زیادی دارد [۴].



شکل ۱ تفاوت مفهوم خطا و عدم قطعیت [۵]

بیان نتایج بدون توجه عدم قطعیت مربوط به آن‌ها می‌تواند سبب تصمیم‌گیری‌های نادرست گردد [۳]. گرچه در سال‌های

⁵ Unreliability

⁶ Error

⁷ True value or Reference value

⁸ Uncertainty propagation

¹ Uncertainty

² Uncertainty of Measurement

³ Incompleteness

⁴ Inconsistency

$$\delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial x_2} \delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i \right| \quad (12)$$

برای دبی جرمی با استفاده از روابط (۳) و (۱۲) داریم:

$$\delta \dot{m} = \left| \frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} \delta \rho \right| + \left| \frac{\partial \dot{m}}{\partial A} \delta A \right| + \left| \frac{\partial \dot{m}}{\partial v} \delta v \right| \quad (13)$$

$$\delta \dot{m} = A v \delta \rho + \rho v \delta A + \rho A \delta v \quad (14)$$

مقدار عددی دبی جرمی در این روش مقدار زیر بدست می‌آید.

$$\dot{m} = 13.6 \pm 2.85 \frac{gr}{s} \quad (15)$$

۳-۳- روش انتشار واریانس-تحلیلی

در این روش برای محاسبه‌ی عدم قطعیت از رابطه‌ی (۱۶) استفاده می‌شود.

$$\delta F(x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \delta x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \delta x_{(i,j)} \quad (16)$$

عبارت $2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \delta x_{(i,j)}$ کواریانس نامیده می‌شود و در صورتی که x_i ها دارای وابستگی به هم باشند، دارای مقدار است ولی اگر متغیرهای x_i مستقل از یکدیگر باشند، عبارت کواریانس صفر است. عبارت‌های δx_i^2 و $\delta F(x_i)^2$ نیز واریانس هستند که در واقع توان دوم عدم قطعیت‌ها می‌باشند.

$$\delta F(x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \delta x_i^2 \quad (17)$$

رابطه‌ی (۱۷) به عنوان قانون عمومی انتشار عدم قطعیت^۴ شناخته می‌شود. با استفاده از رابطه‌ی دبی جرمی (رابطه‌ی (۳))، قانون عمومی انتشار عدم قطعیت به فرم زیر حاصل می‌شود.

۳- روش‌های متداول جهت محاسبه‌ی انتشار عدم قطعیت

جهت محاسبه انتشار عدم قطعیت روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی وجود دارند که در ادامه به معرفی مهم‌ترین آن‌ها پرداخته شده است. سپس به کمک هر روش، عدم قطعیت دبی جرمی محاسبه و در انتها روش‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

۳-۱- روش انتشار بیش‌ترین عدم قطعیت-بروت فورس

روش انتشار بیش‌ترین عدم قطعیت-بروت فورس^۱ از کران‌های بالا و پایین بازه عدم قطعیت هر یک از متغیرهای دخیل در مسئله استفاده می‌کند. در واقع با دانستن رابطه‌ی ریاضی و مقادیر حداقل و حداکثر بازه عدم قطعیت هر یک از متغیرها، کمترین و بیش‌ترین عدم قطعیت ممکن برای مسئله محاسبه می‌شود. به این روش، روش حد بالا و پایین^۲ نیز گفته می‌شود. این روش بیشترین عدم قطعیت ممکن در خروجی را محاسبه می‌کند. برای مثال دبی جرمی، می‌توان با توجه به مقادیر عدم قطعیت داده شده برای هر کمیت، حد بالا و پایین آن‌ها را از روابط (۴) تا (۶) به صورت زیر محاسبه نمود.

$$1.75 < \rho < 2.25 \quad (7)$$

$$3.325 < A < 3.475 \quad (8)$$

$$1.875 < v < 2.125 \quad (9)$$

بنابراین طبق رابطه‌ی (۳)، با ضرب کران‌های بالا در هم و همچنین کران‌های پایین در هم، کران بالا و پایین دبی جرمی تا یک رقم اعشار به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\dot{m} = \bar{\dot{m}} \pm \delta \dot{m} \quad (10)$$

$$10.91 < \dot{m} < 16.61 \quad (11)$$

۳-۲- روش انتشار بیش‌ترین خطا-تحلیلی

به این روش، روش ترکیب بدترین حالت^۳ هم گفته می‌شود و از رابطه‌ی (۱۲) محاسبه می‌شود.

³ Worst-case combination method

⁴ General law of uncertainty propagation

¹ Propagation of max uncertainty-Brute Force

² Upper lower bound method

$$\delta m^2 = (Av)^2(\delta\rho)^2 + (\rho v)^2(\delta A)^2 + (\rho A)^2(\delta v)^2 \quad (18)$$

با جایگزینی مقادیر عددی از روابط (۴) تا (۶)، بازه‌ی عدم قطعیت برای دبی جرمی بدست می‌آید.

$$m = 13.6 \pm 1.92 \frac{gr}{s} \quad (19)$$

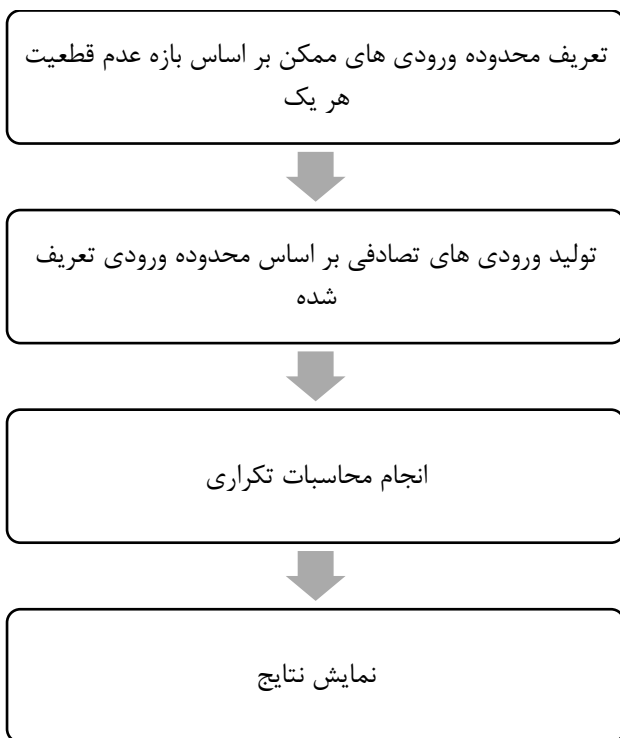
۳-۴- روش احتمالاتی مونت کارلو

در مسائل پیچیده که رابطه‌ی تحلیلی مشخصی بین پارامترهای دخیل در مسئله وجود ندارد، از روش‌های احتمالاتی جهت محاسبه‌ی انتشار عدم قطعیت استفاده می‌گردد. یکی از مشهورترین روش‌های تخمین عدم قطعیت مبتنی بر احتمالات، روش احتمالاتی مونت کارلو^۱ است که در دهه‌ی ۱۹۴۰ میلادی توسط جان ون نومن و استینسلاو اولام معرفی شد. روش مونت کارلو به هر تکنیکی گفته می‌شود که با نمونه‌سازی آماری، پاسخ‌های تقریبی برای مسائل کمی فراهم نماید. به طور کلی روش‌های مونت کارلو بر این اصل استوار است که اگر ورودی‌های توصیف کننده‌ی یک سیستم غیر قطعی باشند آن‌گاه پیش‌بینی عملکرد پیش‌رو نیز الزاما غیرقطعی است. ورودی روش فوق به جای یک مقدار منحصر به فرد، یک توزیع احتمال است و تحلیل مبتنی بر ورودی‌هایی با توزیع احتمال، خود یک توزیع احتمال خواهد بود. روش مونت کارلو بر مبنای اتکا بر محاسبات تکراری و اعداد تصادفی، به گونه‌ای تنظیم می‌شود که توسط رایانه اجرا شود. از روش مونت کارلو به عنوان رایج‌ترین روش برای پیش‌بینی عدم قطعیت در سیستم‌های پیچیده و با ورودی‌های فراوان یاد می‌شود.

در شبیه‌سازی مونت کارلو کل سیستم به تعداد دفعات بسیار زیادی مثلا هزاران بار اجرا می‌شود که هر بار شبیه‌سازی، یک تحقق^۲ سیستم نامیده می‌شود. در هر مرحله از شبیه‌سازی، از همه‌ی پارامترهای غیرقطعی نمونه برداری می‌شود، یعنی یک مقدار تصادفی از توزیع اختصاصی مربوط به هر پارامتر انتخاب می‌شود. اجرای شبیه‌سازی‌های مکرر منتج به ایجاد تعداد زیادی نتیجه مستقل و جداگانه می‌گردد که هر کدام نشان‌دهنده‌ی یک آینده محتمل برای سیستم است. به عبارتی هر یک از نتایج بیان‌گر یک مسیر ممکن است که سیستم احتمالا با گذشت زمان دنبال خواهد کرد. نتیجه تحقق‌های مستقل سیستم به شکل

توزیع‌های احتمال خروجی‌های ممکن درخواهند آمد، لذا خروجی‌ها به صورت مقادیری که نبوده و توزیع احتمال هستند. دقت شبیه‌سازی مونت کارلو تابعی از تعداد تحقق سیستم یا همان تعداد اجراهاست. فلوچارت نشان داده شده در شکل (۲) مراحل انجام یک شبیه‌سازی مونت کارلو را نشان می‌دهد. شکل (۳) نیز شماتیکی از نحوه‌ی انتشار عدم قطعیت از طریق شبیه‌سازی مونت کارلو را نشان می‌دهد.

به دلیل ماهیت تصادفی بودن روش مونت کارلو، هر بار نمونه‌برداری مستقل و بدون آگاهی از نمونه‌های قبلی صورت می‌گیرد، بنابراین نیاز به افزایش تعداد نمونه‌ها برای دستیابی به نتیجه‌ی جامع می‌باشد. مهم‌ترین نقطه ضعف روش مونت کارلو پیچیدگی محاسباتی و زمان بالای محاسبات آن است، لذا برای یک بررسی دقیق نیاز به چند هزار بار تکرار شبیه‌سازی است و این امر مستلزم استفاده از پردازش‌گرهای قدرتمند است. لازم به ذکر است که استفاده از این روش جهت بررسی انتشار عدم قطعیت در مدل‌های پیچیده که رابطه‌ی مشخصی بین متغیرها وجود ندارد و یا تعداد متغیرهای دخیل در مسئله بسیار زیاد است، توصیه می‌گردد. به عنوان مثال بررسی اثر عدم قطعیت در خواص مکانیکی مواد بر نتایج شبیه‌سازی فرآیندهای مختلف توسط روش مونت کارلو قابل ارزیابی است.

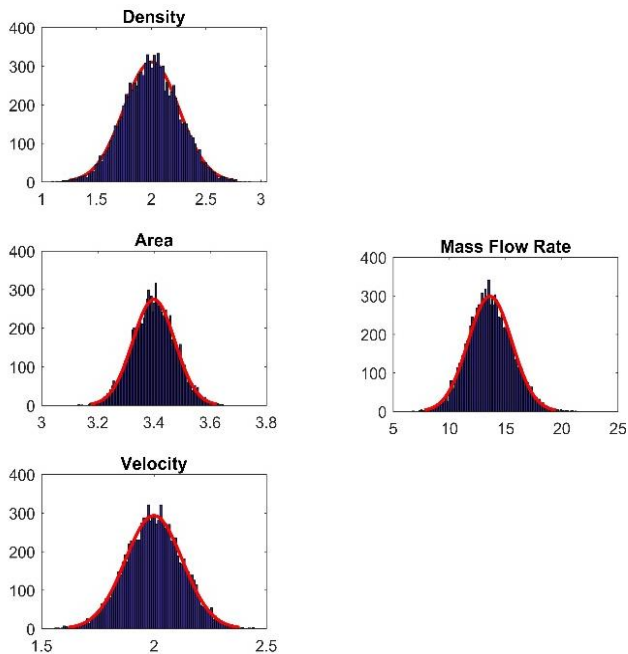


شکل ۲ مراحل شبیه‌سازی مونت کارلو [۹]

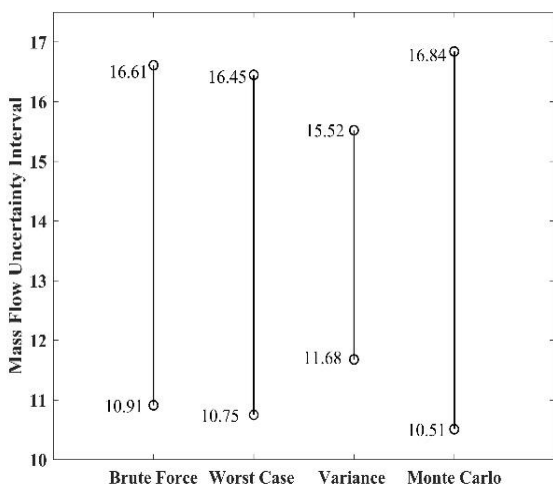
² Realization

¹ Monte Carlo Method (MCM)

بزرگ‌تر و نزدیک به هم هستند. روش احتمالاتی مونت کارلو نیز دارای بزرگ‌ترین بازه‌ی عدم قطعیت می‌باشد که بازه‌ی اطمینان ۵-۹۵٪ برای آن در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل ۴ توابع توزیع احتمال ورودی‌ها و خروجی‌های تابع محاسبه‌ی دبی جرمی

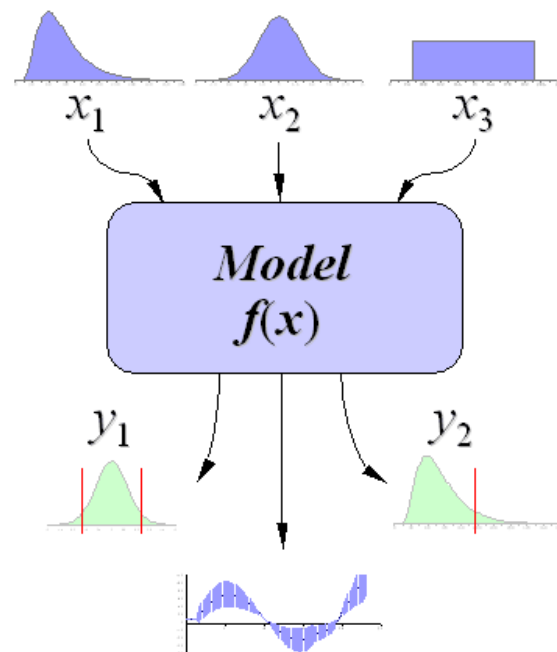


شکل ۵ مقایسه عدم قطعیت دبی جرمی از روش‌های مختلف

۴- نتیجه‌گیری

مهم‌ترین هدف تحقیق حاضر، تاکید بر اهمیت عدم قطعیت به عنوان پارامتری مهم و تأثیرگذار در رابطه با گزارش نتایج به ویژه

Uncertainty Propagation



شکل ۳ انتشار عدم قطعیت در شبیه سازی مونت کارلو [۱۰]

یکی از خروجی‌های نتایج حاصل از روش مونت کارلو که معمولاً گزارش می‌شود، بازه‌ی اطمینان^۱ است. بازه‌ی اطمینان محدوده‌ی دامنه‌ی احتمالی هر یک از خروجی‌ها را نشان می‌دهد. جهت گزارش بازه‌ی اطمینان استاندارد خاصی وجود ندارد ولی معمولاً از معیارهای ۱-۹۹٪ یا ۵-۹۵٪ استفاده می‌شود. چنانچه نتایج در بازه‌ی اطمینان ۵-۹۵٪ بیان شود، به این معنی است که با احتمال ۹۰٪ مقدار واقعی بین حد بالا و پایین گزارش شده قرار دارند. استفاده از بازه‌ی اطمینان ۵-۹۵٪ در تحقیقات متداول تر است. گرچه برای مثال دبی جرمی، به دلیل ساده بودن رابطه‌ی ریاضی بین متغیرها، استفاده از روش‌های تحلیلی توصیه می‌گردد اما در ادامه روش مونت کارلو نیز جهت محاسبه‌ی انتشار عدم قطعیت بکار گرفته شده است. همان‌طور که شکل (۴) نشان می‌دهد، با در نظر گرفتن توابع توزیع نرمال برای چگالی، سرعت و سطح مقطع، ورودی‌های غیر قطعی ایجاد شده و سپس با تکرار محاسبات دبی جرمی تعیین و توزیع آن رسم شده است. بازه‌ی اطمینان ۵-۹۵٪ برای دبی جرمی $\frac{gr}{s}$ [۱۶/۸۴ ، ۱۰/۵۱] بدست می‌آید.

در شکل (۵) بازه‌ی عدم قطعیت محاسبه شده برای دبی جرمی توسط روش‌های مختلف ترسیم شده است. در بین روش‌های تحلیلی، روش انتشار واریانس دارای کوچک‌ترین بازه است و دو روش بروفورس و ترکیب بدترین حالت دارای بازه‌های

^۱ Confidence Bound (CB)

- [4] D. Jailton Carreteiro and R. G. C. Paulo, "Methods for Evaluation of Measurement Uncertainty," in *Metrology*, Anil Ed. Rijeka: IntechOpen, 2018, p. Ch. 2., <https://doi.org/10.5772/intechopen.74873>.
- [5] L. T. Stant, P. H. Aaen, and N. M. Ridler, "Comparing methods for evaluating measurement uncertainty given in the JCGM 'Evaluation of Measurement Data' documents," *Measurement*, vol. 94, pp. 847-851, 2016, <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2016.08.015>.
- [6] P. F. Pelz, P. Groche, M. E. Pfetsch, and M. Schaeffner, *Mastering uncertainty in mechanical engineering*. Springer Nature, 2021, <https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/50950>.
- [7] J. Yuan, E. Denimal, S. Bi, J. Feng, Q. Hu, and A. Cicirello, "Special Section on Uncertainty Quantification and Management in Nonlinear Dynamical Systems in Aerospace and Mechanical Engineering," *ASCE-ASME J Risk and Uncert in Engrg Sys Part B Mech Engrg*, vol. 9, no. 4, 2023, <https://doi.org/10.1115/1.4063301>.
- [8] Z. Imani Nejad, W. Taylor, C. Smith, and K. Khalili, "Investigation of the Effect of Uncertainty in Muscle Pathways on the Knee Joint Contact Force in an Improved Musculoskeletal Model During Squat Motion," (in persian), *Journal of Mechanical Engineering*, vol. 52, no. 2, pp. 345-352, 2022, <https://doi.org/10.22034/jmeut.2022.48939/3010>.
- [9] Z. Imani Nejad, "Investigation on the effect of uncertainty propagation on internal forces of knee joint prosthesis in probabilistic modeling of musculoskeletal system," (in persian), PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Birjand, 2021 .
- [10] U. Burghaus, J. Stephan, L. Vattuone, and J. M. Rogowska, *A practical guide to kinetic Monte Carlo simulations and classical molecular dynamics simulations: an example book* ((No Title)). Nova Science Publishers, 2006.

نتایج حاصل از ابزارهای شبیه‌سازی پیچیده و با ورودی‌های متعدد است.

در این تحقیق به معرفی مهم‌ترین روش‌های تحلیلی و احتمالاتی جهت محاسبه‌ی انتشار عدم قطعیت پرداخته شده است. جهت تبیین دقیق روش‌های موجود، انتشار عدم قطعیت در تابع محاسبه‌ی دبی جرمی به عنوان یک مثال ساده محاسبه شده است. در مسائل ساده و با ورودی‌های محدود که رابطه‌ی مشخصی بین متغیرهای ورودی و خروجی وجود دارد، استفاده از روش‌های تحلیلی جهت محاسبه‌ی انتشار عدم قطعیت توصیه می‌گردد. اما در مسائل پیچیده و با ورودی‌های متعدد که غالباً در مطالعات چنین مسائلی مورد توجه هستند، استفاده از روش- احتمالاتی مونت کارلو کارگشا خواهد بود.

۵- فهرست علائم و اختصارات

علائم انگلیسی

m	دبی جرمی (kg/s)
A	سطح مقطع (cm^2)
v	سرعت (cm/s)
ρ	چگالی (gr/cm^3)

۶- مراجع

- [1] J. Kristiansen, "The guide to expression of uncertainty in measurement approach for estimating uncertainty: an appraisal," *Clinical Chemistry*, vol. 49, no. 11, pp. 1822-1829, 2003, <https://doi.org/10.1373/clinchem.2003.021469>.
- [2] I. Iso and B. OIML, "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement," vol. 122, ed. Geneva, Switzerland, 1995, pp. 16-17.
- [3] A. Kamal *et al.*, "Recent advances and challenges in uncertainty visualization: a survey," *Journal of Visualization*, vol. 24, no. 5, pp. 861-890, 01.10.2021, <https://doi.org/10.1007/s12650-021-00755-1>.