

## تحلیل رفتار ارتعاشات آزاد نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی عرضی با تئوری الاستیسیته غیرموضعی

**چکیده:** در این مقاله یک فرمول بندی بر مبنای روش بدون المان برای بررسی ارتعاشات آزاد نانوتیرهای با خاصیت مگنتوالکتروالاستیک ارائه شده است. فرض شده است که نانوتیر از دو ماده باریم تیتانیت ( $BaTiO_3$ ) و کبالت آیرون اکسید ( $CoFe_2O_4$ ) تشکیل شده است که توزیع این دو ماده در ضخامت نانوتیر بصورت مدرج تابعی تغییر می کند و باعث می شود که خواص فیزیکی نانوتیر در راستای ضخامت تیر تغییر کند. از تئوری الاستیسیته غیرموضعی و تئوری مرتبه اول برشی تیر (تیر تیموشنکو) برای مدل سازی رفتار مکانیکی نانوتیر استفاده شده است. معادلات حاکم برای نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک با روش همپلتون استخراج شده و سپس یک فرمول بندی بر مبنای روش بدون المان برای گسسته سازی معادلات حاکم بر نانوتیر ارائه شده است. در نهایت فرکانس های طبیعی ارتعاشات نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک با روش بدون المان استخراج شده و نتایج عددی مختلف ارائه شده است و اثر پارامترهای مختلف و شرایط مرزی بر فرکانس های طبیعی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک بررسی شده است.

**واژه های راهنما:** ارتعاشات آزاد، روش بدون المان، تئوری الاستیسیته غیرموضعی، نانوتیر مدرج تابعی عرضی، ماده مگنتوالکتروالاستیک

**عیسی احمدی\***  
دانشیار،  
گروه مهندسی مکانیک،  
دانشگاه زنجان، زنجان

مقاله علمی پژوهشی  
دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۱۹  
بازنگری: ۱۴۰۳/۰۱/۲۳  
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۳۰

**Isa Ahmadi\***  
Associate Professor,  
Department of  
Mechanical  
Engineering,  
University of Zanjan,  
Zanjan

## Free vibration of transversely functionally graded magneto-electro-elastic nanobeam with meshless method

**Abstract:** In this study, the free vibration of functionally graded magneto-electro-elastic (MEE) nanobeam is investigated by a meshless formulation. The nanobeam is considered to be made of Barium Titanate ( $BaTiO_3$ ) and Cobalt Iron Oxide ( $CoFe_2O_4$ ) in which the material properties of the magneto-electro-elastic nanobeam are functionally graded through the thickness of the MEE nanobeam. The Timoshenko beam theory and the nonlocal elasticity theory is used to model the behavior of the MEE nanobeam. The governing equations of the MEE nanobeam are obtained using the Hamilton's principle. A meshless formulation is developed to discretize the governing equations of the MEE nanobeam to a system of ordinary differential equation in the time domain. Then the natural frequencies of the MEE nanobeam are obtained and the effect of various parameters is investigated.

**Keywords:** Free vibration, Meshless method, Nonlocal elasticity theory, Transversely FG nanobeam, Magneto-electro-elastic material

## ۱- مقدمه

ویژگی‌های کمانش و رفتار استاتیکی صفحه چند لایه‌ای مگنتوالکتروالاستیک را با تئوری مرتبه اول برشی ورق‌ها و با روش المان محدود مورد مطالعه قرار دادند. اثر لایه‌گذاری، ابعاد هندسی و سایر پارامترها بر بار کمانش ورق مورد بررسی قرار گرفت.

در سال ۲۰۱۸ لیو و همکاران [۷]، ارتعاشات وابسته به اندازه یک نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک متخلخل مدرج تابعی عرضی بر بستر ویسکوالاستیک را با تئوری الاستیسیته غیرموضعی و مدل تیر تیموشنکو مورد بررسی قرار دادند و نتایج خود را با نتایج تئوری‌های مختلف مقایسه کردند.

در سال ۲۰۱۹ ابراهیمی و دباغ [۸]، ویژگی پراکندگی موج نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی دوار را با تئوری گرادیان کرنش غیرموضعی مورد مطالعه قرار دادند. از تابع توانی برای مدل‌سازی توزیع خواص ماده تابعی استفاده کرده و یک حل تحلیلی برای مساله ارائه کردند.

در سال ۲۰۲۲، ونگ و همکاران [۹] ارتعاشات اجباری تیر مگنتوالکتروالاستیک که تحت بار محوری قرار دارد را با استفاده از روش جداسازی متغیرها و تبدیل لاپلاس برای شرایط مرزی مختلف بررسی کردند.

در سال ۲۰۲۳ ژنگ و همکاران [۱۰] ارتعاشات آزاد میکروتیر مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی متخلخل را در محیط حرارتی با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده بررسی کردند. آن‌ها چهار نوع توزیع تخلخل را در نظر گرفتند و اثر پارامترهای مختلف را بر فرکانس‌های طبیعی تیر مورد بررسی قرار دادند.

در سال ۲۰۲۳ ژنگ و همکاران [۱۱] با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی ردی و تئوری الاستیسیته غیرموضعی یک مدل غیرخطی برای بررسی خمش نانوتیر لایه‌ای مگنتوالکتروالاستیک ارائه کردند که اثر غیر خطی هندسی فون کارمن را در نظر گرفته است.

در این بخش مروری اجمالی بر مقالات مربوط به ارتعاشات نانوتیرها با تئوری‌های مختلف تیر غیرموضعی ارائه شده است. ارینگن [۱۲، ۱۳]، یک تئوری غیرموضعی ارائه کرد و اثر مقیاس کوچک را با معرفی یک پارامتر جدید که آن را پارامتر مقیاس نام‌گذاری کرد، مورد بررسی قرار داد. در تئوری غیرموضعی که او ارائه کرد تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در آن نقطه و نقاط همسایگی آن نقطه می‌باشد.

در سال ۲۰۰۷ ردی [۱۴]، تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات نانو تیرها با شرایط مرزی ساده را بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی انجام داد. وی تئوری تیرهای اوپلر

با گسترش روز افزون علم نانو و کاربردهای آن در صنایع مختلف، استفاده از سازه‌های در ابعاد نانو و میکرو در حال افزایش است. انواع نانسازه‌ها شامل نانوتیرها و نانوصفحه‌ها در تکنولوژی‌های نانو مانند نانو لوله‌ها، نانو تیرهای ساندویچی، نانو کامپوزیت‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. مواد پیزوالکتریک و پیزومگنتیک که به عنوان یکی از انواع مواد هوشمند شناخته می‌شوند، دارای یک ارتباط متقابل مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی هستند که در اثر اعمال بار مکانیکی از خود خواص الکتریکی و مغناطیسی بروز داده و در مقابل بارگذاری‌های الکتریکی و مغناطیسی نیز اثرات مکانیکی را به نمایش می‌گذارند. از آن‌جا که مواد پیزوالکتریک و پیزومگنتیک قادر به کوپل انرژی‌های مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی به یکدیگر هستند از آن‌ها به عنوان یک انتخاب مناسب در عملگرها و حسگرها یاد می‌شود.

در ارتباط با این موضوع مطالعات گسترده‌ای صورت گرفته است. در سال ۲۰۱۴ لی و همکاران [۱]، به بررسی کمانش و ارتعاشات آزاد نانو ورق‌ها مگنتوالکتروالاستیک بر روی بستر پاسترناک با تئوری میندلین غیرموضعی پرداخته‌اند و اثر میدان الکتریکی و مغناطیسی و ضرایب بستر الاستیک بر رفتار کمانش و ارتعاشات آزاد را مورد بررسی قرار دادند. همچنین در سال ۲۰۱۴ ابراهیمی و براتی [۲]، به بررسی آنالیز ارتعاشات یک نانوتیر پیزومگنتیک مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک با دو پارامتر پرداختند. فرمول‌بندی با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن و تئوری مرتبه سوم برشی تیرها و با استفاده از روش همیلتون استخراج شد و نتایج عددی برای تیر دوسر مفصل ارائه گردید.

در سال ۲۰۱۵ انصاری و همکاران [۳]، پاسخ ارتعاشات اجباری غیرخطی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک برای ساختار همگن با نظریه مرتبه سوم برشی تیر غیرموضعی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها از روش مربع‌سازی تفاضلی تعمیم‌یافته برای حل معادلات استفاده کردند و اثر پارامترهای مختلف را بر روی ارتعاشات اجباری نانوتیر بررسی کردند. در سال ۲۰۱۷ وینیاس و کتیمانی [۴]، تحلیل رفتار استاتیکی تیر چند لایه‌ای مگنتوالکتروالاستیک یک‌سرگیردار را در اثر بار گذاری حرارتی با استفاده از روش المان محدود مورد مطالعه قرار دادند.

در سال ۲۰۱۷ ابراهیمی و براتی [۵]، ارتعاشات نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی عرضی روی بستر الاستیک را با تئوری مرتبه سوم برشی تیر و تئوری غیرموضعی مورد مطالعه قرار دادند. همچنین در سال ۲۰۱۷ کیران و کتیمانی [۶]،

رفتار نانوتیرهای مدرج تابعی عرضی با خاصیت مگنتوالکتروالاستیک ارائه شده است. معادلات حاکم بر تیر با روش همیلتون استخراج شده است و فرکانس‌های طبیعی نانوتیر با روش ارائه شده استخراج شده است و نتایج مختلف عددی برای فرکانس‌های طبیعی نانوتیر مدرج تابعی عرضی ارائه شده و اثر پارامترهای مختلف بر آن بررسی شده است.

## ۲- تعریف مساله و مدل سازی

یک نانوتیر مدرج تابعی به طول  $L$  و ضخامت  $h$  و پهنای  $b$  مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود که خواص نانوتیر به صورت مگنتوالکتروالاستیک می‌باشد. محورهای مختصات  $x$  و  $z$  برای تیر طوری در نظر گرفته شده است که  $x=0$  و  $x=L$  لبه‌های سمت چپ و راست و  $z=-h/2$  و  $z=+h/2$  سطوح پایین و بالای نانوتیر را نشان می‌دهد.



شکل ۱ نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک تابعی و محورهای مختصات تحت بار میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی خارجی

فرض شده است که خواص تیر به صورت مدرج تابعی توزیع شده است و از قانون توانی برای نمایش توزیع خواص مادی در نانوتیر استفاده شده است. طبق قانون توانی توزیع خواص مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی نسبت به ضخامت نانوتیر با قانون توانی توزیع می‌شود به طور مثال خاصیتی مانند  $E(z)$  نسبت به ضخامت نانوتیر به صورت زیر فرض می‌شود.

$$E(z) = (E_2 - E_1) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_1 \quad (1)$$

که در روابط بالا، زیرنویس‌های (۱) و (۲) به ترتیب بیانگر خواص سطح پایین ( $z=-h/2$ ) و بالای ( $z=h/2$ ) نانوتیر است. همچنین،  $n_z$  شاخص‌های توانی مدرج تابعی است که توزیع مواد را در راستای ضخامت نانوتیر کنترل می‌کند. شکل (۱) نحوه اعمال بارگذاری بر روی نانو تیر را نمایش می‌دهد که تحت تاثیر میدان الکتریکی و مغناطیسی قرار گرفته است.

برنولی، تیموشنکو، ردی و لوینسون را با استفاده از معادلات دیفرانسیل غیرمحلّی بازنویسی کرد و معادلات هر یک از آن‌ها را با استفاده از اصل همیلتون به دست آورد. او به این نتیجه رسید که افزایش پارامتر غیرمحلّی باعث افزایش خیز و کاهش بار کمانش و فرکانس طبیعی می‌شود. همچنین دریافت که تأثیر پارامتر غیر محلّی روی کمانش بیشتر از فرکانس طبیعی است.

در سال ۲۰۱۹ بخشی و خانیکی [۱۵]، ارتعاشات آزاد نانوتیر مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها معادلات با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر موضعی ارینگن و همچنین اصل همیلتون استخراج کردند و با استفاده از روش مربع‌سازی تفاضلی تعمیم‌یافته فرکانس‌های نانوتیر برای شرایط مرزی مختلف را محاسبه کردند.

در سال ۲۰۱۹ لیو و همکاران [۱۶]، ارتعاشات آزاد غیرخطی یک نانوتیر مدرج تابعی ساندویچی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها معادلات را با استفاده از روش همیلتون و تئوری گرایان کرنش غیرموضعی استخراج کردند و فرکانس‌های طبیعی را به ازای پارامترهای مختلف، اثر اندازه و برای شرایط مرزی مختلف محاسبه کردند.

مطالعه منابع نشان داده است که از روش‌های مختلف تحلیلی و همچنین روش‌های عددی مانند مربع‌سازی تفاضلی تعمیم‌یافته و روش المان محدود برای حل مساله ارتعاشات نانوتیر استفاده شده است. روش‌های بدون المان که مانند روش المان محدود بر مبنای شکل تضعیف شده معادلات حاکم می‌باشد مزایایی دارند که از جمله آن، عدم نیاز به شبکه‌بندی المانی و همچنین امکان تولید توابع شکل با پیوستگی بالا در این روش‌ها است که باعث مزیت منحصر به فرد این روش‌ها نسبت به روش‌های عددی از جمله روش المان محدود می‌شود. گسسته‌سازی معادلات تیر تیموشنکو با روش المان محدود منجر به ایجاد پدیده‌ای به نام قفل برشی می‌شود که برای از بین بردن آن نیاز به توابع شکل با درجه بالاتر است که اعمال آن در روش المان محدود دشوار است ولی در روش‌های بدون المان راحت‌تر انجام می‌شود. با توجه به مطالعه انجام شده، تحلیل تیر مگنتوالکتروالاستیک با روش‌های بدون المان در منابع مشاهده نشده است لذا در این مقاله یک فرمول‌بندی بر مبنای روش بدون المان برای گسسته‌سازی معادلات نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک تابعی عرضی ارائه شده است در این مقاله از روش بدون المان برای بررسی رفتار ارتعاشات آزاد نانوتیرهای مگنتوالکتروالاستیک استفاده شده است. یک فرمول‌بندی بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی تیرها (مدل تیر تیموشنکو) و تئوری الاستیسیته غیرموضعی و روش بدون المان برای مطالعه

۲-۱- مدل سازی تیر

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} &= c_{11} \varepsilon_{xx} - e_{31} E_z - q_{31} H_z \\ \sigma_{xz} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} &= c_{55} \gamma_{xz} - e_{15} E_x - q_{15} H_x \\ D_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} &= e_{15} \gamma_{xz} + s_{11} E_x + d_{11} H_x \\ D_z - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} &= e_{31} \varepsilon_{xx} + s_{33} E_z + d_{33} H_z \\ B_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} &= q_{15} \gamma_{xz} + d_{11} E_x + \chi_{11} H_x \\ B_z - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} &= q_{31} \varepsilon_{xx} + d_{33} E_z + \chi_{33} H_z \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) &= -\cos(\xi z) \phi(x, t) + \frac{2z}{h} V \\ \Upsilon(x, z, t) &= -\cos(\xi z) \gamma(x, t) + \frac{2z}{h} \Omega \end{aligned} \quad (6)$$

در معادله (۶)  $\xi = \pi/h$  مشاهده می‌شود که  $\phi(x, t)$  و  $\gamma(x, t)$  به ترتیب توزیع پتانسیل الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی در سطح میانی ( $z=0$ ) است. در رابطه (۶)،  $\pm V$  پتانسیل الکتریکی خارجی اعمالی در سطح بالایی ( $z=h/2$ ) و پایینی ( $z=-h/2$ ) نانوتیر و  $\pm \Omega$  پتانسیل مغناطیسی خارجی اعمالی در سطوح بالایی و پایینی نانوتیر است.

با توجه به معادلات فوق مولفه‌های غیر صفر میدان الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان به صورت زیر بدست آورد.

$$\begin{aligned} E_x &= -\Phi_{,x} = \cos(\xi z) \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ E_z &= -\Phi_{,z} = -\xi \sin(\xi z) \phi - \frac{2V}{h}, \\ H_x &= -\Upsilon_{,x} = \cos(\xi z) \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ H_z &= -\Upsilon_{,z} = -\xi \sin(\xi z) \gamma - \frac{2\Omega}{h} \end{aligned} \quad (7)$$

معادلات حرکت نانوتیر با استفاده از اصل همیلتون بدست می‌آید که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_0^l \delta(\Pi_s - \Pi_k + \Pi_w) dt = 0 \quad (8)$$

که در رابطه بالا،  $\delta$  عملگر وریشن،  $\Pi_k$  نشان‌دهنده انرژی جنبشی،  $\Pi_s$  بیانگر انرژی کرنشی تیر،  $\Pi_w$  کار نیروهای خارجی وارد شده می‌باشد. تغییرات انرژی کرنشی به صورت رابطه (۹) بیان می‌شود [۳].

میدان جابجایی نانوتیر براساس تئوری تیر تیموشنکو به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) &= u(x, t) + z \psi(x, t) \\ u_z(x, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

که  $u_x(x, z, t)$  و  $u_z(x, z, t)$  میدان جابجایی محوری و جانبی نانوتیر و  $w$  و  $u$  به ترتیب جابجایی محوری و جانبی صفحه میانی و  $\psi$  چرخش سطح مقطع تیر می‌باشد. با توجه به میدان جابجایی، مولفه‌های غیرصفر میدان کرنش تیر به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \varepsilon_{xx}^{(1)}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \end{aligned} \quad (3)$$

که در روابط فوق،  $\varepsilon_{xx}$  و  $\gamma_{xz}$  به ترتیب کرنش عمودی و کرنش برشی نانوتیر می‌باشد. حال با توجه به وجود خاصیت مگنتوالکترولاستیک در نانوتیر، شکل دیفرانسیلی روابط ساختاری برای ماده مگنتوالکترولاستیک طبق تئوری غیرموضعی ارینگن به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} - (e_0 \alpha)^2 \nabla^2 \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{mij} E_m - q_{nij} H_n \\ D_i - (e_0 \alpha)^2 \nabla^2 D_i &= e_{ikl} \varepsilon_{kl} + s_{im} E_m + d_{in} H_n \\ B_i - (e_0 \alpha)^2 \nabla^2 B_i &= q_{ikl} \varepsilon_{kl} + d_{im} E_m + \chi_{in} H_n \end{aligned} \quad (4)$$

در این روابط  $C_{ijkl}, d_{in}, q_{ikl}, s_{im}, e_{mij}$  پیرامترهای الاستیک، پیزوالکتریک، دی‌الکتریک، پیزومگنتیک، مگنتوالکتریک و گذردهی مغناطیسی برای مواد مگنتوالکترولاستیک می‌باشد.

همچنین  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش و  $D_i$  و  $B_i$  به ترتیب جابجایی‌های الکتریکی و جابجایی مغناطیسی می‌باشد و  $E_i$  و  $H_i$  به ترتیب شدت میدان الکتریکی و شدت میدان مغناطیسی می‌باشند. برای یک نانوتیر مدرج تابعی با خواص مغناطیسی و کترولاستیک در حالت یک بعدی، روابط ساختاری غیرموضعی به صورت رابطه (۵) بازنویسی می‌شود.

روابط توزیع پتانسیل الکتریکی  $\Phi(x, z, t)$  و پتانسیل مغناطیسی  $\Upsilon(x, z, t)$  که در امتداد ضخامت و طول نانوتیر تغییر می‌کند به صورت رابطه (۶) می‌باشد [۱۷].

$$N_E = -\int_A e_{31} \frac{2V}{h} dA, \quad (16)$$

$$N_H = -\int_A q_{31} \frac{2\Omega}{h} dA,$$

با جایگذاری روابط (۱۰)، (۱۳) و (۱۵) در اصل همیلتون که در رابطه (۸) آمده است، معادلات حاکم برای یک نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q - I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - (N_H + N_E) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

$$\int_A (\cos(\xi z) \frac{\partial D_x}{\partial x} + \xi \sin(\xi z) D_z) dA = 0$$

$$\int_A (\cos(\xi z) \frac{\partial B_x}{\partial x} + \xi \sin(\xi z) B_z) dA = 0$$

و شرایط مرزی نانوتیر در لبه‌های  $x=0$  و  $x=L$  به صورت زیر است.

$$N = 0, \quad \text{or} \quad \delta u = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad x = L$$

$$N \frac{\partial w}{\partial x} + Q = 0, \quad \text{or} \quad \delta w = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad x = L$$

$$M = 0, \quad \text{or} \quad \delta \psi = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad x = L \quad (18)$$

$$\int_A D_x \cos(\xi z) dA = 0, \quad \text{or} \quad \delta \phi = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad x = L$$

$$\int_A B_x \cos(\xi z) dA = 0, \quad \text{or} \quad \delta \gamma = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \text{and} \quad x = L$$

معادلات حاکم بر نانوتیر (۱۷) بر حسب مولفه‌های جابجایی  $u, w, \psi$ ، پتانسیل الکتریکی  $\phi(x, t)$  و پتانسیل مغناطیسی  $\gamma(x, t)$  به صورت زیر قابل نوشتن است.

$$A_{xx} u_{,xx} + B_{xx} \psi_{,xx} + A_{31}^e \phi_{,x} + A_{31}^m \gamma_{,x} - I_0 \ddot{u}$$

$$- I_1 \ddot{\psi} + \mu I_0 \ddot{u}_{,xx} + \mu I_1 \ddot{\psi}_{,xx} = 0 \quad (1-19)$$

$$B_{xx} u_{,xx} + D_{xx} \psi_{,xx} - A_{xz} \psi - A_{xz} w_{,x} + E_{31}^e \phi_{,x} + E_{31}^m \gamma_{,x}$$

$$+ E_{15}^e \phi_{,x} + E_{15}^m \gamma_{,x} - I_2 \ddot{w} - I_1 \ddot{u} + \mu I_1 \ddot{u}_{,xx} + \mu I_2 \ddot{\psi}_{,xx} = 0 \quad (2-19)$$

$$A_{xz} \psi_{,x} + A_{xz} w_{,xx} - (N_E + N_H) w_{,xx}$$

$$+ \mu (N_E + N_H) w_{,xxx} - E_{15}^e \phi_{,xx} - E_{15}^m \gamma_{,x}$$

$$- I_0 \ddot{w} + \mu I_0 \ddot{w}_{,xx} = 0 \quad (3-19)$$

$$E_{15}^e w_{,x} + E_{15}^e \psi_{,x} + F_{11}^e \phi_{,x} + F_{11}^m \gamma_{,x} + A_{31}^e u_{,x}$$

$$+ E_{31}^e \psi_{,x} - F_{33}^e \phi - F_{33}^m \gamma = 0 \quad (4-19)$$

$$E_{15}^m w_{,x} + E_{15}^m \psi_{,x} + F_{11}^m \phi_{,x} + X_{11}^m \gamma_{,x} + A_{31}^m u_{,x}$$

$$+ E_{31}^m \psi_{,x} - F_{33}^m \phi - X_{33}^m \gamma = 0 \quad (5-19)$$

$$\delta \Pi_s = \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA$$

$$+ \int_A (-D_x \delta E_x - D_z \delta E_z - B_x \delta H_x - B_z \delta H_z) dA \quad (9)$$

که  $A=bh$  بیانگر سطح مقطع تیر و  $\sigma_{xx}$  و  $\sigma_{xz}$  به ترتیب تنش نرمال و برشی می‌باشد. با جایگذاری روابط (۶) و (۳) در معادله فوق، انرژی کرنشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta \Pi_s = \int_0^L (N \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + Q \delta \gamma_{xz}) dx$$

$$+ \int_0^L \int_A [-D_x \cos(\xi z) \delta (\frac{\partial \phi}{\partial x}) + D_z \xi \sin(\xi z) \delta \phi] dA dx \quad (10)$$

$$+ \int_0^L \int_A [-B_x \cos(\xi z) \delta (\frac{\partial \gamma}{\partial x}) + B_z \xi \sin(\xi z) \delta \gamma] dA dx$$

که در آن، برایندهای تنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA, \quad M = \int_A \sigma_{xx} z dA, \quad Q = \int_A \sigma_{xz} dA, \quad (11)$$

که  $N$  نیروی محوری،  $M$  گشتاور خمشی و  $Q$  بیانگر نیروی برشی می‌باشد. همچنین، انرژی جنبشی به شکل زیر قابل بیان است:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_A \rho ((\frac{\partial u_x}{\partial t})^2 + (\frac{\partial u_z}{\partial t})^2) dA \quad (12)$$

با جایگذاری روابط (۱) در معادله فوق، تغییرات انرژی جنبشی برای نانوتیر به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\delta \Pi_k = \int_0^L I_0 (\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t}) dx$$

$$+ \int_0^L I_1 (\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t})$$

$$+ \int_0^L I_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} dx \quad (13)$$

که در آن لختی‌های جرمی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_A (1, z, z^2) \rho dA \quad (14)$$

با توجه به اعمال پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی بر نانوتیر در شکل (۱) تغییرات کار ناشی از پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی برای نانوتیر را می‌توان به صورت زیر برآورد کرد:

$$\delta \Pi_w = \int_0^L (N_H + N_E) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \quad (15)$$

که  $N_E$  و  $N_H$  به ترتیب نیروهای محوری ناشی از تغییرات پتانسیل مغناطیسی و ولتاژ الکتریکی خارجی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

برای حل معادلات حاکم (۱۹) یک فرمول‌بندی بدون المان بر مبنای شکل تضعیف شده موضعی معادلات ارائه شده است. معادلات گسسته شده به صورت استاندارد نوشته شده و تبدیل به مساله مقدار ویژه برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی تبدیل شده است و سپس فرکانس‌های طبیعی نانوتیر استخراج شده است. نرخ همگرایی و دقت نتیجه عددی بررسی شده است.

### ۳- فرمول‌بندی بدون المان

برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک که در رابطه (۱۹) آمده است یک فرمول-بندی بر اساس روش بدون المان ارائه شده است. برای گسسته-سازی معادلات به روش بدون المان، به تعداد  $N$  زیرناحیه و  $N$  گره در طول نانوتیر که در ناحیه 0 تا  $L$  قرار دارد در نظر گرفته می‌شود که زیرناحیه  $l$ ام به صورت  $\Omega_s^l$  نام‌گذاری می‌شود و هر زیرناحیه متناظر با یک گره است که گره  $\bar{l}$ م در نقطه  $x_i$  قرار دارد. برای گسسته‌سازی، ابتدا معادلات حاکم به شکل تضعیف شده موضعی نوشته می‌شود. برای تبدیل معادلات (۱۹) به شکل تضعیف شده موضعی، طرفین معادلات در تابع آزمون  $v(x)$  ضرب شده و از طرفین این معادلات روی زیر ناحیه موضعی  $\Omega_s^l$  انتگرال‌گیری انجام می‌شود. با انجام این کار معادلات حرکت نانوتیر که در رابطه (۱۹) آمده است به صورت تضعیف شده موضعی زیر نوشته می‌شود.

$$\int_{\Omega_s^l} A_{xx} u_{,xx} v dx + \int_{\Omega_s^l} B_{xx} \psi_{,xx} v dx + \int_{\Omega_s^l} A_{31}^e \phi_{,x} v dx + \int_{\Omega_s^l} A_{31}^m \gamma_{,x} v dx - \int_{\Omega_s^l} I_0 \ddot{u} v dx - \int_{\Omega_s^l} I_1 \ddot{\psi} v dx + \int_{\Omega_s^l} \mu I_0 \ddot{u}_{,xx} v dx + \int_{\Omega_s^l} \mu I_1 \ddot{\psi}_{,xx} v dx = 0 \quad (1-21)$$

$$\int_{\Omega_s^l} B_{xx} u_{,xx} v dx + \int_{\Omega_s^l} D_{xx} \psi_{,xx} v dx - \int_{\Omega_s^l} A_{xz} \psi v dx - \int_{\Omega_s^l} A_{xz} w_{,x} v dx + \int_{\Omega_s^l} E_{31}^e \phi_{,x} v dx + \int_{\Omega_s^l} E_{31}^m \gamma_{,x} v dx + \int_{\Omega_s^l} E_{15}^e \phi_{,x} v dx + \int_{\Omega_s^l} E_{15}^m \gamma_{,x} v dx - \int_{\Omega_s^l} I_2 \ddot{\psi} v dx - \int_{\Omega_s^l} I_1 \ddot{u} v dx + \int_{\Omega_s^l} \mu I_1 \ddot{u}_{,xx} v dx + \int_{\Omega_s^l} \mu I_2 \ddot{\psi}_{,xx} v dx = 0 \quad (2-21)$$

$$\int_{\Omega_s^l} A_{xz} \psi_{,x} v dx + \int_{\Omega_s^l} A_{xz} w_{,xx} v dx + \int_{\Omega_s^l} \mu (N_E + N_H) w_{,xxx} v dx - \int_{\Omega_s^l} (N_E + N_H) w_{,xx} v dx - \int_{\Omega_s^l} E_{15}^e \phi_{,xx} v dx - \int_{\Omega_s^l} E_{15}^m \gamma_{,xx} v dx - \int_{\Omega_s^l} (I_0 \ddot{w} - \mu I_0 \ddot{w}_{,xx}) v dx = 0 \quad (3-21)$$

که ثابت‌های استفاده شده در روابط (۱۹) به صورت زیر تعریف شده است.

$$\begin{aligned} \{A_{xx}, B_{xx}, D_{xx}\} &= \int_A c_{11} \{1, z, z^2\} dA \\ A_{xz} &= \int_A c_{35} dA \\ \{A_{31}^e, E_{31}^e\} &= \int_A e_{31} \{\xi \sin(\xi z), z \xi \sin(\xi z)\} dA \\ E_{15}^e &= \int_A e_{15} \cos(\xi z) dA \\ \{F_{11}^e, F_{33}^e\} &= \int_A \{s_{11} \cos^2(\xi z), s_{33} \xi^2 \sin^2(\xi z)\} dA \quad (20) \\ \{A_{31}^m, E_{31}^m\} &= \int_A q_{31} \{\xi \sin(\xi z), z \xi \sin(\xi z)\} dA \\ E_{15}^m &= \int_A q_{15} \cos(\xi z) dA \\ \{F_{11}^m, F_{33}^m\} &= \int_A \{d_{11} \cos^2(\xi z), d_{33} \xi^2 \sin^2(\xi z)\} dA \\ \{X_{11}^m, X_{33}^m\} &= \int_A \{X_{11} \cos^2(\xi z), X_{33} \xi^2 \sin^2(\xi z)\} dA \end{aligned}$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود معادلات غیرموضعی حاکم بر نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک برحسب جابجایی‌ها و پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی و بر اساس تئوری تیر مرتبه اول برشی (مدل تیر تیموشنکو) به صورت پنج معادله مرتبه دوم در دسته معادلات (۱۹) بدست آمد. حل این معادلات برای تیر با شرایط مرزی دوطرف ساده به روش ناپیر امکان پذیر است. روش‌های عددی مانند روش مربع‌سازی تفاضلی تعمیم‌یافته (GDQ) نیز برای حل این معادلات قابل استفاده است. روش مربع‌سازی تفاضلی تعمیم‌یافته روشی است که شکل قوی معادلات را به طور مستقیم گسسته می‌کند و این روش معمولاً دقت بالایی دارد. از روش‌های عددی که به گسسته‌سازی شکل تضعیف شده وزنی معادلات می‌پردازند روش المان محدود و روش‌های بدون المان قابل ذکر هستند. این روش‌ها مزایای زیادی دارند که از جمله پایداری بالای این روش‌ها می‌باشد. گسسته‌سازی معادلات مرتبه دوم تیر تیموشنکو به روش المان محدود با توابع شکل خطی منجر به پدیده‌ای بنام قفل شدگی برشی می‌شود که مخصوصاً در تیرهای نازک باعث خطای زیادی در پاسخ روش المان محدود می‌شود. برای رفع این پدیده باید از توابع شکل درجه بالاتر استفاده کرد که این کار در روش المان محدود پیچیدگی‌های خاصی دارد ولی در روش المان محدود براحتی قابل انجام است. نتایج تحقیقات نشان داده است که روش بدون المان دارای نرخ همگرایی و دقت خوبی است. لذا در این مقاله

(RBF)، میدان جابجایی، الکتریکی و مغناطیسی نانوتیر به شکل گسسته زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x) &= \phi_u^j u_j = \Phi_u(x) \mathbf{u} \\ w(x) &= \phi_w^j w_j = \Phi_w(x) \mathbf{w} \\ \psi(x) &= \phi_\psi^j \psi_j = \Phi_\psi(x) \boldsymbol{\psi} \\ \varphi(x) &= \phi_\varphi^j \varphi_j = \Phi_\varphi(x) \boldsymbol{\varphi} \\ \gamma(x) &= \phi_\gamma^j \gamma_j = \Phi_\gamma(x) \boldsymbol{\gamma} \end{aligned} \quad (23)$$

که  $u_j, w_j, \psi_j, \varphi_j, \gamma_j$  به ترتیب جابجایی محوری، جانبی، چرخش سطح مقطع، جابجایی الکتریکی و جابجایی مغناطیسی گرهی  $j=1, 2, \dots, n$  می‌باشد. همچنین  $\Phi_u(x), \Phi_w(x), \Phi_\psi(x), \Phi_\varphi(x), \Phi_\gamma(x)$ ، ماتریس‌های درون‌یابی نامیده می‌شوند و  $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma}$  ماتریس مقادیر گره‌ای هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Phi_u(x) &= \{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x)\}^T \\ \mathbf{u} &= \{u_1, u_2, \dots, u_N\}^T, \quad \mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}^T \\ \boldsymbol{\psi} &= \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}^T, \quad \boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}^T \\ \boldsymbol{\gamma} &= \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}^T \end{aligned} \quad (24)$$

حال با جایگذاری روابط (23) در دسته معادلات (22)، می‌توان معادلات حاکم غیرموضعی نانوتیرهای مگنتوالکتروالاستیک را به صورت زیر گسسته کرد.

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega'_x} A_{xx} \Phi_{u,x} \mathbf{u} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} B_{xx} \Phi_{\psi,x} \boldsymbol{\psi} v_{,x} dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} A_{31}^e \Phi_\varphi \boldsymbol{\varphi} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} A_{31}^m \Phi_\gamma \boldsymbol{\gamma} v_{,x} dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} \mu I_0 \Phi_{u,x} \ddot{\mathbf{u}} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} \mu I_1 \Phi_{\psi,x} \ddot{\boldsymbol{\psi}} v_{,x} dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} I_0 \Phi_u \ddot{\mathbf{u}} v dx + \int_{\Omega'_x} I_1 \Phi_\psi \ddot{\boldsymbol{\psi}} v dx \end{aligned} \quad (1-25)$$

$$\begin{aligned} &-(A_{xx} \Phi_{u,x} + B_{xx} \Phi_{\psi,x} + A_{31}^e \Phi_\varphi + A_{31}^m \Phi_\gamma) v \Big|_{\partial\Omega'_x} \\ &-(\mu I_0 \Phi_{u,x} \ddot{\mathbf{u}} + \mu I_1 \Phi_{\psi,x} \ddot{\boldsymbol{\psi}}) v \Big|_{\partial\Omega'_x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega'_x} B_{xx} \Phi_{u,x} \mathbf{u} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} D_{xx} \Phi_{\psi,x} \boldsymbol{\psi} v_{,x} dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} A_{xz} \Phi_\psi \boldsymbol{\psi} v dx - \int_{\Omega'_x} A_{xz} \Phi_w \mathbf{w} v_{,x} dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} E_{31}^e \Phi_\varphi \boldsymbol{\varphi} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} E_{31}^m \Phi_\gamma \boldsymbol{\gamma} v_{,x} dx \end{aligned} \quad (2-25)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{\Omega'_x} I_2 \Phi_\psi \ddot{\boldsymbol{\psi}} v dx + \int_{\Omega'_x} I_1 \Phi_u \ddot{\mathbf{u}} v dx + \int_{\Omega'_x} E_{15}^e \Phi_\varphi \boldsymbol{\varphi} v_{,x} dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} E_{15}^m \Phi_\gamma \boldsymbol{\gamma} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} \mu I_1 \Phi_{u,x} \ddot{\mathbf{u}} v_{,x} dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} \mu I_2 \Phi_{\psi,x} \ddot{\boldsymbol{\psi}} v_{,x} dx \end{aligned}$$

$$-(B_{xx} \Phi_{u,x} \mathbf{u} + D_{xx} \Phi_{\psi,x} \boldsymbol{\psi} - A_{xz} \Phi_w \mathbf{w}) v \Big|_{\partial\Omega'_x}$$

$$+(E_{31}^e \Phi_\varphi \boldsymbol{\varphi} + E_{31}^m \Phi_\gamma \boldsymbol{\gamma}) v \Big|_{\partial\Omega'_x}$$

$$-(E_{15}^e \Phi_\varphi \boldsymbol{\varphi} + E_{15}^m \Phi_\gamma \boldsymbol{\gamma} + \mu I_1 \Phi_{u,x} \ddot{\mathbf{u}} + \mu I_2 \Phi_{\psi,x} \ddot{\boldsymbol{\psi}}) v \Big|_{\partial\Omega'_x} = 0$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega'_x} E_{15}^e w_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} E_{15}^e \psi_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} F_{11}^e \phi_{,x} v dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} F_{11}^m \gamma_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} A_{31}^e u_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} E_{31}^e \psi_{,x} v dx \quad (4-21) \\ &- \int_{\Omega'_x} F_{33}^e \phi v dx - \int_{\Omega'_x} F_{33}^m \gamma v dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega'_x} E_{15}^m w_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} E_{15}^m \psi_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} F_{11}^m \phi_{,x} v dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} X_{11}^m \gamma_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} A_{31}^m u_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} E_{31}^m \psi_{,x} v dx \quad (5-21) \\ &- \int_{\Omega'_x} F_{33}^m \phi v dx - \int_{\Omega'_x} X_{33}^m \gamma v dx = 0 \end{aligned}$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزیه‌جز، دسته معادلات تضعیف‌شده موضعی (21) به شکل تضعیف‌شده موضعی متقارن نوشته می‌شوند. به‌طور مثال معادله اول تا سوم از پنج معادله موجود در رابطه (21) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega'_x} A_{xx} u_{,x} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} B_{xx} \psi_{,x} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} A_{31}^e \phi_{,x} v dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} A_{31}^m \gamma_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} \mu I_0 \ddot{u}_{,x} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} \mu I_1 \ddot{\psi}_{,x} v_{,x} dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} I_0 \ddot{u} v dx + \int_{\Omega'_x} I_1 \ddot{\psi} v dx \quad (1-22) \\ &-(A_{xx} u_{,x} + B_{xx} \psi_{,x} + A_{31}^e \phi + A_{31}^m \gamma) v \Big|_{\partial\Omega'_x} \\ &-(\mu I_0 \ddot{u}_{,x} + \mu I_1 \ddot{\psi}_{,x}) v \Big|_{\partial\Omega'_x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega'_x} B_{xx} u_{,x} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} D_{xx} \psi_{,x} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} A_{xz} \psi v dx \\ &- \int_{\Omega'_x} A_{xz} w v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} E_{31}^e \phi_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} E_{31}^m \gamma_{,x} v dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} I_2 \ddot{\psi} v dx + \int_{\Omega'_x} I_1 \ddot{u} v dx + \int_{\Omega'_x} E_{15}^e \phi_{,x} v dx \quad (2-22) \\ &+ \int_{\Omega'_x} E_{15}^m \gamma_{,x} v dx + \int_{\Omega'_x} \mu I_1 \ddot{u}_{,x} v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} \mu I_2 \ddot{\psi}_{,x} v_{,x} dx \\ &-(B_{xx} u_{,x} + D_{xx} \psi_{,x} - A_{xz} w + \mu I_1 \ddot{u}_{,x} + \mu I_2 \ddot{\psi}_{,x}) v \Big|_{\partial\Omega'_x} \\ &-((E_{31}^e + E_{15}^e) \phi + (E_{31}^m + E_{15}^m) \gamma) v \Big|_{\partial\Omega'_x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega'_x} A_{xz} \psi v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} A_{xz} w_{,x} v_{,x} dx \\ &+ \int_{\Omega'_x} \mu (N_E + N_H) w_{,xxx} v_{,x} dx - \int_{\Omega'_x} (N_E + N_H) w_{,x} v_{,x} dx \\ &- \int_{\Omega'_x} E_{15}^e \phi_{,x} v_{,x} dx - \int_{\Omega'_x} E_{15}^m \gamma_{,x} v_{,x} dx \quad (3-22) \\ &+ \int_{\Omega'_x} I_0 \ddot{w} v dx + \int_{\Omega'_x} \mu I_0 \ddot{w}_{,x} v_{,x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(A_{xz} \psi + A_{xz} w_{,x} - (N_E + N_H) w_{,x} + E_{15}^e \phi_{,x} - E_{15}^m \gamma_{,x}) v \Big|_{\partial\Omega'_x} \\ &-\mu (N_E + N_H) w_{,xxx} v \Big|_{\partial\Omega'_x} - \mu I_0 \ddot{w}_{,x} v \Big|_{\partial\Omega'_x} = 0 \end{aligned}$$

این فرآیند برای تمام پنج معادله دیفرانسیل نانوتیر که در رابطه (19) آمده است نوشته می‌شود. سپس تعداد  $N$  گره با موقعیت تصادفی در طول نانوتیر در نظر گرفته شده است. با به-کارگیری روش درون‌یابی نقاط براساس توابع پایه‌ی شعاعی

#### ۴- نتایج عددی

فرکانس‌های طبیعی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک تابعی عرضی و اثر پارامترهای مختلف بر آن در این قسمت مورد بررسی قرار گرفته است. خواص فیزیکی اجزای تشکیل دهنده نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی شامل باریم تیتانیت ( $\text{BaTiO}_3$ ) و کبالت آبیرون اکسید ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ ) در جدول (۱) ارائه شده است. مشاهده می‌شود که  $\text{BaTiO}_3$  دارای خاصیت پیزوالکتریک و  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  دارای خاصیت پیزومگنتیک است و ترکیب این دو ماده به صورت مدرج تابعی در نانوتیر مدرج تابعی منجر به ایجاد خاصیت پیزوالکتریک و پیزومگنتیک خواهد شد که منجر به خاصیت مگنتوالکتروالاستیک برای نانوتیر خواهد شد. هدف این مقاله بررسی فرکانس‌های طبیعی این نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک در ارتعاشات آزاد و بررسی اثر پارامترهای مختلف و شرایط مرزی بر آن می‌باشد.

در ابتدا همگرایی نتایج عددی روش بدون المان ارائه شده در این مقاله با افزایش تعداد گره‌ها در ناحیه حل در جدول (۲) بررسی شده است. فرکانس طبیعی اصلی نانوتیر با مقادیر مختلف تعداد گره از ۲۰ تا ۱۰۰ گره در این جدول آمده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود با افزایش تعداد گره‌ها از ۲۰ گره به ۱۰۰ گره، فرکانس طبیعی نانوتیر ابتدا روند نزولی دارد و برای تعداد گره بالاتر از ۶۰ گره، همگرایی در فرکانس‌های طبیعی تا ۴ رقم اعشار مشاهده می‌شود. همچنین به منظور مقایسه، نتایج پیش‌بینی شده توسط تئوری‌های مختلف شامل تئوری تیر اویلر-برنولی (EBT)، تیر تیموشنکو (TBT)، تیر ردی (RBT) و تیر لوینسون (LBT) در جدول (۲) آمده است.

جدول ۱ خواص فیزیکی اجزای نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک

ثوابت ماده	باریم تیتانیت $\text{BaTiO}_3$	کبالت آبیرون اکسید $\text{CoFe}_2\text{O}_4$
الاستیک (GPa)	$C_{11}=166,$ $C_{55}=43$	$C_{11}=286,$ $C_{55}=45.3$
پیزوالکتریک ( $\text{C/m}^2$ )	$e_{31}=-4.4,$ $e_{15}=11.6$	$e_{31}=0,$ $e_{15}=0$
پیزومگنتیک (N/Am)	$q_{31}=0,$ $q_{15}=0$	$q_{31}=580.3,$ $q_{15}=550$
دی‌الکتریک ( $10^{-9} \text{ C/Vm}$ )	$S_{11}=11.2$ $S_{33}=12.6$	$S_{11}=0.08,$ $S_{33}=0.098$
الکترومگنتیک ( $10^{-12} \text{ N}_s/\text{VC}$ )	$d_{11}=d_{33}=0$	$d_{11}=d_{33}=0$
مگنتیک ( $10^{-6} \text{ N}_s^2/\text{C}^2$ )	$\chi_{11}=5,$ $\chi_{33}=11$	$\chi_{11}=-590,$ $\chi_{33}=157$
چگالی ( $\text{kg/m}^3$ )	$\rho=5800$	$\rho=5300$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega'_x} A_{xz} \Phi_{\psi} \Psi v_{,x} dx + \int_{\Omega'_x} A_{xz} \Phi_{w,x} \mathbf{w} v_{,x} dx \\
 & + \int_{\Omega'_x} \mu (N_E + N_H) \Phi_{w,xxx} \mathbf{w} v_{,x} dx \\
 & - \int_{\Omega'_x} (N_E + N_H) \Phi_{w,x} \mathbf{w} v_{,x} dx \\
 & - \int_{\Omega'_x} E_{15}^e \Phi_{\phi,x} \Phi v_{,x} dx - \int_{\Omega'_x} E_{15}^m \Phi_{\gamma,x} \gamma v_{,x} dx \\
 & + \int_{\Omega'_x} I_0 \Phi_w \ddot{\mathbf{w}} v dx + \int_{\Omega'_x} \mu I_0 \Phi_{w,x} \ddot{\mathbf{w}} v_{,x} dx \\
 & - (A_{xz} \Phi_{\psi} \Psi + A_{xz} \Phi_{w,x} \mathbf{w} + \mu (N_E + N_H) \Phi_{w,xxx} \mathbf{w}) v \Big|_{\partial \Omega'_x} \\
 & + ((N_E + N_H) \Phi_{w,x} \mathbf{w} + E_{15}^e \Phi_{\phi,x} \phi + E_{15}^m \Phi_{\gamma,x} \gamma) v \Big|_{\partial \Omega'_x} \\
 & - \mu I_0 \Phi_{w,x} \ddot{\mathbf{w}} v \Big|_{\partial \Omega'_x} = 0
 \end{aligned} \tag{۳-۲۵}$$

با انجام این کار برای تمام معادلات و بر روی تمام زیرناحیه‌های موضعی  $\Omega_s^I$  تعداد  $5N$  معادله دیفرانسیل برحسب زمان بدست می‌آید که به صورت استاندارد به شکل ماتریسی زیر قابل نوشتن است.

$$[\tilde{M}] \{\ddot{\tilde{d}}\} + [\tilde{K}] \{\tilde{d}\} = \{0\} \tag{۲۶}$$

که در آن ماتریس مقادیر گره‌ای به صورت زیر است.

$$\{\tilde{d}\}^T = \{\mathbf{u}^T, \mathbf{w}^T, \Psi^T, \phi^T, \gamma^T\} \tag{۲۷}$$

شرایط مرزی ضروری نانوتیر برای لبه‌های ساده (مفصل) به صورت زیر تعریف شده است.

$$u = 0, w = 0, \phi = 0, \gamma = 0 \tag{۲۸}$$

و شرایط مرزی گیردار به صورت زیر بر لبه‌ها اعمال می‌شود.

$$u = 0, w = 0, \psi = 0, \phi = 0, \gamma = 0 \tag{۲۹}$$

مشابه روش المان محدود، این شرایط مرزی ضروری به صورت حذف سطر و ستون‌ها از ماتریس جرم و سفتی به مساله اعمال شده است. شایان ذکر است که در حالت تیر دوسر ساده و دوسرگیردار جابجایی محوری ( $u$ ) در لبه سمت چپ ( $x=0$ ) مقید شده است ولی جابجایی محوری در لبه سمت راست ( $x=L$ ) مقید نشده است تا نانوتیر بتواند در اثر جابجایی جانبی تغییر طول داشته باشد و صلبیت اضافی در نانوتیر ایجاد نشود. حال فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد را می‌توان با حل مسأله مقدار ویژه زیر به دست آورد.

$$\det([\tilde{K}] - \omega^2 [\tilde{M}]) = 0 \tag{۳۰}$$

که  $\omega$  فرکانس‌های طبیعی نانوتیر است. با حل مساله مقدار ویژه فوق فرکانس‌های طبیعی نانوتیر قابل استخراج است.

برای صحنه‌گذاری بر نتایج عددی روش ارائه شده در این مقاله، سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد نانوتیر مدرج تابعی با شرایط مرزی ساده-ساده برای مقادیر مختلف نسبت لاغری  $L/h$ ، پارامتر غیرموضعی  $\mu$  و شاخص توانی مدرج تابعی  $n_z$  در جدول (۳) ارائه شده و با نتایج حل تحلیلی تئوری تیر تیموشنکو برای شرایط مرزی ساده-ساده مقایسه شده است. پارامتر غیرموضعی در این جدول برابر با  $\mu=3 \times 10^{-12} m^2$  در نظر گرفته شده است.

ملاحظه می‌شود که برای نانوتیر مدرج تابعی نتایج پیش‌بینی شده با تئوری حاضر با نتایج موجود در منابع همخوانی خوبی دارد که نشان دهنده صحت نتایج فرمول‌بندی بدون المان ارائه شده در این مقاله است. ضریب تصحیح برش در این مقاله  $k=5.6$  در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش توان توزیع تابعی  $n_z$  فرکانس طبیعی نانوتیر کاهش پیدا کرده است. همچنین فرکانس‌های طبیعی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی برای مقادیر مختلف  $n_z$  و پارامتر غیرموضعی در جدول (۴) با نتایج منابع موجود مقایسه شده است و انطباق خوبی بین پیش‌بینی روش بدون المان حاضر با پیش‌بینی منابع مشاهده می‌شود که نشان دهنده دقت روش بدون المان ارائه شده در این مقاله می‌باشد.

در ادامه فرکانس‌های طبیعی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی عرضی در این قسمت مورد بررسی قرار گرفته است. خواص نانوتیر مدرج تابعی در راستای ضخامت تغییر می‌کند. سطح پایینی نانوتیر در  $(z=-h/2)$  باریم تیتانیت ( $BaTiO_3$ ) و سطح بالای آن کبالت آبیرون اکسید ( $CoFe_2O_4$ ) است. بنابراین این  $n_z=0$  نشان دهنده نانوتیر خالص از  $CoFe_2O_4$  است که دارای خاصیت پیزوالکتریک نمی‌باشد. طول نانوتیر  $L=10000nm$  در نظر گرفته شده است. فرکانس طبیعی بی‌بعد برای نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک به صورت زیر تعریف شده است.

$$\omega^* = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (31)$$

که  $E$  و  $\rho$  مدول الاستیک و چگالی ماده‌ای است که سطح بالایی نانوتیر تابعی از آن تشکیل شده است که در اینجا  $CoFe_2O_4$  می‌باشد. سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک برای شرایط مرزی ساده-ساده در جدول (۵) مورد بررسی قرار گرفته است و اثر شاخص توانی و پارامتر غیرموضعی بر سه فرکانس طبیعی اول نانوتیر بررسی شده است. همچنین سه فرکانس طبیعی اول نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک برای شرایط مرزی گیردار-گیردار در جدول (۶) مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به اینکه با افزایش شاخص توانی درصد  $CoFe_2O_4$  در نانوتیر کاهش می‌یابد ملاحظه می‌شود که فرکانس طبیعی نانوتیر نیز کاهش می‌یابد.

جدول ۲ بررسی همگرایی نتایج عددی روش بدون المان برای تیر با شرط مرزی ساده-ساده و مقایسه نتایج با تئوری‌های مختلف ( $L=10nm, L/h=20$ )

$\mu = 3$ ( $nm^2$ )	$\mu = 2$ ( $nm^2$ )	$\mu = 1$ ( $nm^2$ )	$\mu = 0$ ( $nm^2$ )	Number of nodes
8.6339	8.9827	9.3775	9.8294	N=20
8.6329	8.9816	9.3764	9.8282	N=40
8.6328	8.9816	9.3763	9.8281	N=60
8.6328	8.9816	9.3763	9.8281	N=80
8.6328	8.9816	9.3763	9.8281	N=100
8.6693	9.0195	9.4159	9.8696	EBT,[18]
8.6416	8.9907	9.3858	9.8381	TBT,[18]
8.6416	8.9907	9.3858	9.8381	RBT,[18]
8.6462	8.9955	9.3908	9.8433	LBT,[18]

جدول ۳ مقایسه سه فرکانس طبیعی اول نانوتیر مدرج تابعی با نتایج منابع ( $L=10000nm, \mu=3 \times 10^{-12} m^2, L/h=50$ )

$n_z$		$\omega_1^*$	$\omega_2^*$	$\omega_3^*$
	present	8.6677	26.7303	46.3907
0	Ref. [19]	8.6636	26.6420	46.1298
	Ref. [20]	8.6700	26.7100	46.3688
	present	6.8032	20.9810	36.4137
0.2	Ref. [19]	6.7998	20.9108	36.2071
	Ref. [20]	6.8500	20.9637	36.4199
	present	6.1443	18.9481	32.8835
1	Ref. [19]	6.1414	18.8853	32.6980
	Ref. [20]	6.2222	18.9339	32.9155
	present	5.6411	17.3940	30.1821
5	Ref. [19]	5.6384	17.3370	30.0129
	Ref. [20]	5.7257	17.3837	30.2292

جدول ۴ فرکانس طبیعی اول بی‌بعد نانوتیر الکترومگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی یک‌بعدی با شرایط مرزی ساده-ساده، ( $b=1nm, L=10nm, L/h=20$ )

$\mu$ ( $nm^2$ )	$n_z=0.2$		$n_z=1$	
	present	Ref. [17]	present	Ref. [17]
$\mu = 0$	9.2988	9.3046	8.4383	8.4447
$\mu = 1$	8.8561	8.8769	8.0517	8.0565
$\mu = 2$	8.4855	8.5031	7.7121	7.7173
$\mu = 3$	8.1541	8.1730	7.4170	7.4177

جدول ۷ اثر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد نانوتیر مگنتوالکترولاستیک با شرایط مرزی ساده-ساده ( $\Omega=0.05$  و  $L/h=20, L=10000nm$ )

$\mu$ ( $m^2$ )	V	$n_z=0.2$	$n_z=0.5$	$n_z=1$	$n_z=2$
0	-5	10.2341	9.7601	9.3553	9.0321
	0	10.1168	9.5163	8.9765	8.5121
	5	9.9982	9.2659	8.5809	7.9582
$1 \times 10^{-12}$	-5	9.8467	9.3935	9.0060	8.6955
	0	9.7248	9.1399	8.6118	8.1540
	5	9.6013	8.8790	8.1986	7.5739
$1 \times 10^{-12}$	-5	9.5110	9.0761	8.7035	8.4040
	0	9.3847	8.8133	8.2949	7.8424
	5	9.2567	8.5425	7.8651	7.2375

جدول ۸ اثر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد نانوتیر مگنتوالکترولاستیک با شرایط مرزی ساده-ساده ( $\Omega=-0.05$  و  $L/h=20, L=10000nm$ )

$\mu$ ( $m^2$ )	V	$n_z=0.2$	$n_z=0.5$	$n_z=1$	$n_z=2$
0	-5	8.5589	8.3940	8.3188	8.3395
	0	8.4182	8.1091	7.8904	7.7732
	5	8.2753	7.8139	7.4373	7.1624
$1 \times 10^{-12}$	-5	8.0915	7.9648	7.9239	7.9736
	0	7.9427	7.6640	7.4728	7.3794
	5	7.7910	7.3509	6.9927	6.7329
$2 \times 10^{-12}$	-5	7.6795	7.5878	7.5783	7.6547
	0	7.5225	7.2714	7.1053	7.0336
	5	7.7186	6.9406	6.5985	6.3520

جدول ۹ اثر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد اصلی نانوتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار ( $\Omega=0.2$ )

$\mu$ ( $m^2$ )	V	$n_z=0.2$	$n_z=0.5$	$n_z=1$	$n_z=2$
0	-20	22.5433	21.5369	20.6480	19.9513
	0	22.2875	21.0047	19.8209	18.8151
	20	22.0283	20.4568	18.9526	17.5954
$1 \times 10^{-12}$	-20	21.9365	20.9802	20.1288	19.4556
	0	21.6230	20.3243	19.1050	18.0405
	20	21.3023	19.6378	18.0003	16.4540
$2 \times 10^{-12}$	-20	21.3934	20.4792	19.6605	19.0088
	0	21.0366	19.7323	18.4896	17.3804
	20	20.6710	18.9380	17.1903	15.4572

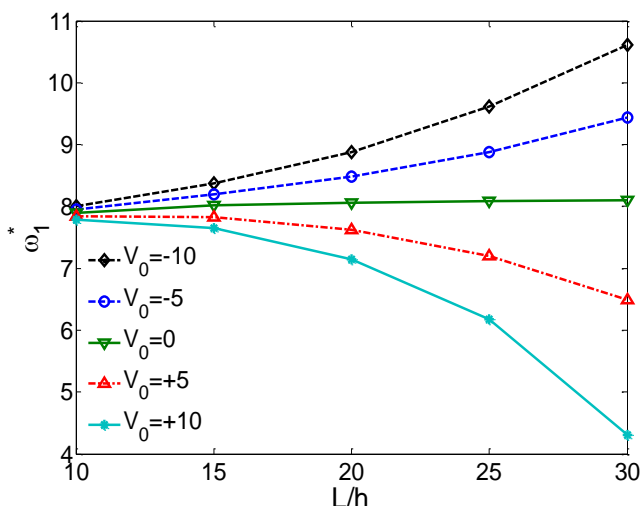
جدول ۵ سه فرکانس طبیعی بی‌بعد نانوتیر مگنتوالکترولاستیک برای شرایط مرزی ساده-ساده، ( $L/h=20, L=10000nm$ )

$\mu$ ( $m^2$ )	$\omega^*$	$n_z=0.2$	$n_z=0.5$	$n_z=1$	$n_z=2$
0	$\omega_1$	9.3094	8.8372	8.4510	8.1511
	$\omega_2$	36.3502	34.5956	33.1080	31.9289
	$\omega_3$	78.8511	75.1924	72.0944	69.6981
$1 \times 10^{-12}$	$\omega_1$	8.8781	8.4297	8.0563	7.7762
	$\omega_2$	30.7800	29.2912	28.0373	27.0659
	$\omega_3$	57.3803	54.7361	52.4904	50.7548
$2 \times 10^{-12}$	$\omega_1$	8.5014	8.0784	7.7146	7.4500
	$\omega_2$	27.1837	25.8574	24.7498	23.9013
	$\omega_3$	47.3181	45.1332	43.2918	41.8573

جدول ۶ سه فرکانس طبیعی بی‌بعد نانوتیر مگنتوالکترولاستیک برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، ( $L/h=20, L=10000nm$ )

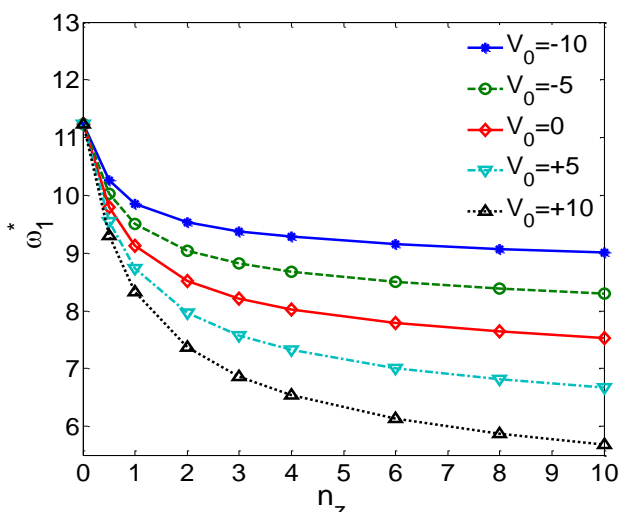
$\mu$ ( $m^2$ )	$\omega^*$	$n_z=0.2$	$n_z=0.5$	$n_z=1$	$n_z=2$
0	$\omega_1$	20.4595	19.5203	18.6617	18.0348
	$\omega_2$	54.3748	51.8842	49.6838	48.0474
	$\omega_3$	101.1087	96.8118	93.0475	89.7087
$1 \times 10^{-12}$	$\omega_1$	19.3688	18.4321	17.6276	17.0195
	$\omega_2$	45.1254	43.0537	41.2293	39.8654
	$\omega_3$	72.3188	69.2125	66.4985	64.4159
$2 \times 10^{-12}$	$\omega_1$	18.3947	17.5099	16.7387	16.1625
	$\omega_2$	39.3707	37.5479	35.9601	34.7727
	$\omega_3$	59.3111	56.7433	54.5133	52.8026

اثر پتانسیل مغناطیسی و پتانسیل الکتریکی خارجی بر فرکانس‌های طبیعی نانوتیر مگنتوالکترولاستیک برای شرط مرزی ساده-ساده برای پتانسیل مغناطیسی خارجی برابر با  $\Omega=+0.05$  و  $\Omega=-0.05$  در جدول (۷) و (۸) نشان داده شده است و اثر شاخص توانی و پارامتر غیرموضعی و ولتاژ خارجی اعمالی بر فرکانس طبیعی اصلی نانوتیر بررسی شده است. پتانسیل الکتریکی دو مقدار  $V=+5$  و  $V=-5$  ولت و پتانسیل مغناطیسی دو مقدار  $\Omega=+0.05$  و  $\Omega=-0.05$  را اختیار کرده است. همچنین اثر پتانسیل مغناطیسی و الکتریکی بر فرکانس‌های طبیعی نانوتیر مگنتوالکترولاستیک با شرایط مرزی گیردار-گیردار با طول  $L=10000nm$  و  $L/h=20$  و برای دو مقدار پتانسیل مغناطیسی  $\Omega=+0.2$  و  $\Omega=-0.2$  در جدول (۹) و (۱۰) آمده است و نتایج عددی مورد بررسی قرار گرفته است. پتانسیل الکتریکی مقادیر ۰، ۲۰ و ۲۰ را اختیار کرده است. با افزایش پتانسیل الکتریکی فرکانس طبیعی کاهش یافته است و با افزایش پتانسیل مغناطیسی فرکانس طبیعی افزایش یافته است.



شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی اول بی بعد نانوتیر ساده-ساده نسبت به تغییرات نسبت لاغری و مقادیر مختلف پتانسیل الکتریکی ( $\Omega=0, L=10000nm, \mu=1 \times 10^{-12}m^2, n_z=1$ )

ملاحظه می شود که پتانسیل مثبت الکتریکی باعث کاهش و پتانسیل منفی الکتریکی باعث افزایش فرکانس طبیعی نانوتیر شده است. تغییرات فرکانس طبیعی نانوتیر با شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار نسبت به تغییرات  $n_z$  و مقادیر مختلف پتانسیل الکتریکی در شکل (۴) و شکل (۵) ارائه شده است. ملاحظه می شود با افزایش  $n_z$  فرکانس طبیعی نانوتیر کاهش یافته است ولی اثر پتانسیل الکتریکی بر فرکانس طبیعی نانوتیر افزایش یافته است. علت این است که با افزایش  $n_z$  درصد ماده  $BaTiO_3$  در نانوتیر افزایش یافته است که مدول الاستیسیته آن کوچکتر ولی ضریب پیروالکتریک آن نسبت به جزء دیگر بزرگتر است و لذا با افزایش  $n_z$  ضریب پیروالکتریک نانوتیر مدرج تابعی افزایش یافته و اثر پتانسیل الکتریکی بر فرکانس طبیعی آن افزایش می یابد.

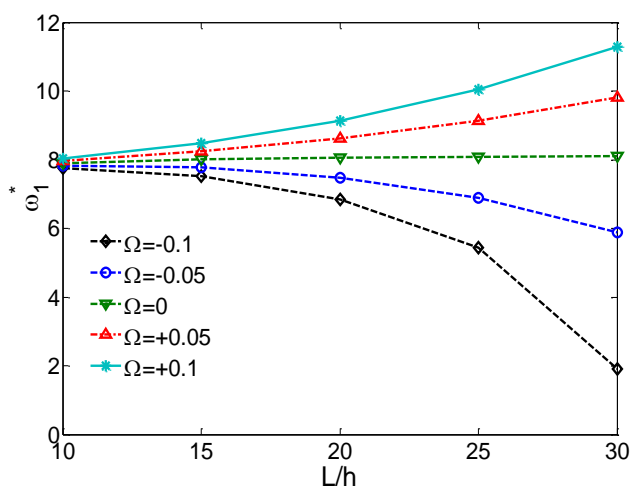


شکل ۴ فرکانس طبیعی اول بی بعد نانوتیر با لبه های ساده-ساده به ازای مقادیر مختلف شاخص توانی  $n_z$  ( $\Omega=+0.1, L=10000nm, L/h=20, \mu=1 \times 10^{-12}m^2$ )

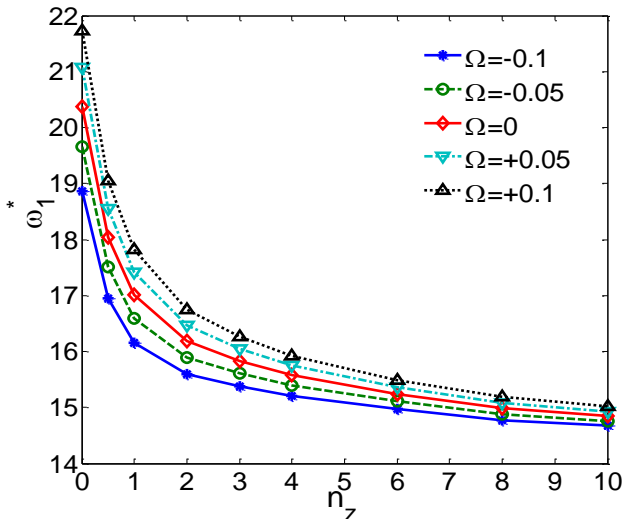
جدول ۱۰ اثر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی بر فرکانس طبیعی بی بعد اصلی نانوتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار ( $\Omega=-0.2$ )

$\mu$ ( $m^2$ )	V	$n_z=0.2$	$n_z=0.5$	$n_z=1$	$n_z=2$
0	-20	18.8488	18.5325	18.3746	18.4361
	0	18.5346	17.8984	17.4246	17.1860
	20	18.2143	17.2381	16.4128	15.8246
$1 \times 10^{-12}$	-20	17.2940	17.0553	17.2428	17.5564
	0	16.0014	16.2366	15.9297	15.8949
	20	16.2061	15.4973	14.4941	13.2311
$2 \times 10^{-12}$	-20	15.7121	15.9209	16.2651	16.8087
	0	15.1630	14.3152	14.6007	14.2239
	20	14.8264	12.4079	12.7894	12.5877

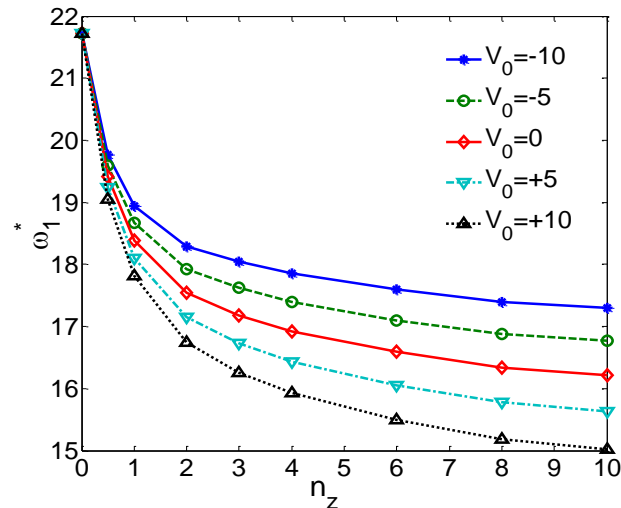
در شکل (۲) فرکانس طبیعی اول نانوتیر برای مقادیر مختلف نسبت لاغری نانوتیر و در حضور پتانسیل مغناطیسی نشان داده شده است. برای تغییر نسبت لاغری  $L/h$ ، طول نانوتیر ثابت نگه داشته شده و ضخامت نانوتیر تغییر کرده است. در شکل (۲) ملاحظه می شود که اثر پتانسیل مغناطیسی  $\Omega$  بر فرکانس طبیعی نانوتیر با طول ثابت، برای نانوتیر نازکتر ( $L/h$  بزرگتر) بیشتر است. پتانسیل مغناطیسی مثبت باعث افزایش فرکانس طبیعی و پتانسیل مغناطیسی منفی باعث کاهش فرکانس طبیعی نانوتیر شده است. علت این پدیده این است که پتانسیل مغناطیسی مثبت تمایل دارد باعث کاهش طول نانوتیر شود و لذا نیروی تکیه گاهی کششی در نانوتیر بوجود می آورد که منجر به افزایش فرکانس طبیعی نانوتیر می شود. همچنین اثر پتانسیل الکتریکی بر فرکانس طبیعی نانوتیر دوسر ساده در مقادیر مختلف نسبت لاغری در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی اول بی بعد نانوتیر ساده-ساده نسبت به تغییرات نسبت لاغری و مقادیر مختلف پتانسیل مغناطیسی ( $V=0, L=10000nm, \mu=1 \times 10^{-12}m^2, n_z=1$ )



شکل ۷ فرکانس طبیعی اول بی‌بعد نانوتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار به ازای مقادیر مختلف شاخص توانی ( $V=+10, L=10000nm, L/h=20, \mu=1 \times 10^{-12}m^2$ )

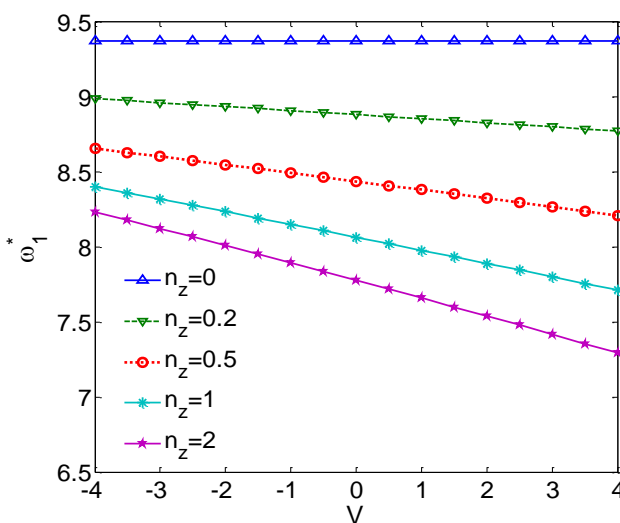


شکل ۵ فرکانس طبیعی اول بی‌بعد نانوتیر با لبه‌های گیردار-گیردار به ازای مقادیر مختلف شاخص توانی ( $\Omega=+0.1, L=10000nm, L/h=20, \mu=1 \times 10^{-12}m^2$ )

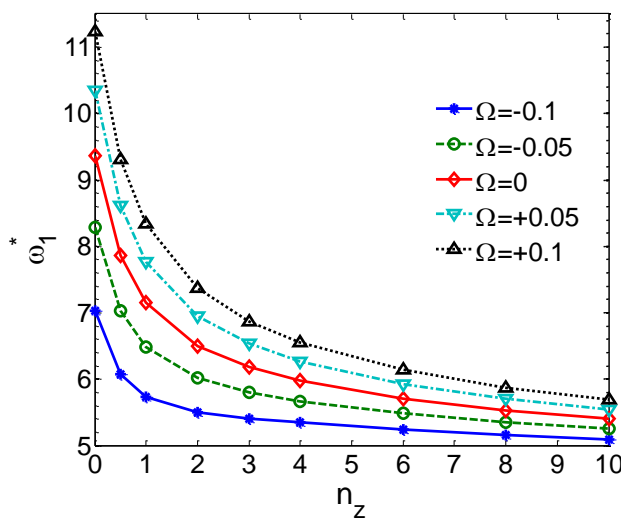
اثر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی بر فرکانس طبیعی اصلی نانوتیر برای مقادیر مختلف  $n_z$  در شکل (۸) و شکل (۹) نشان داده شده است. با توجه به اینکه در حالت  $n_z=0$  نانوتیر دارای جنس خالص  $CoFe_2O_4$  است که دارای خاصیت پیروالکتریک نمی‌باشد لذا فرکانس طبیعی نانوتیر در این حالت وابسته به ولتاژ خارجی نمی‌باشد. با افزایش ولتاژ خارجی مثبت فرکانس طبیعی تیر کاهش می‌یابد. همچنین در شکل (۹) مشاهده می‌شود که با اعمال پتانسیل مغناطیسی مثبت فرکانس طبیعی نانوتیر افزایش یافته است. در حالت  $n_z=0$  نانوتیر را مگنتوالکتروالاستیک بیشترین مقدار خاصیت پیرومغناطیس را دارد. ملاحظه می‌شود که در ناحیه بررسی شد در نمودارهای (۸) و (۹) تاثیر تغییرات پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی بر فرکانس طبیعی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک تقریباً اثر خطی دارد.

اعمال ولتاژ مثبت باعث کاهش و اعمال ولتاژ منفی باعث افزایش فرکانس طبیعی شده است. برای  $n_z=0$  پتانسیل الکتریکی تاثیری بر فرکانس‌های طبیعی نانوتیر مدرج تابعی ندارد.

در شکل (۶) و شکل (۷) تغییرات فرکانس طبیعی نانوتیر مدرج تابعی با شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار با تغییرات  $n_z$  و در حضور پتانسیل مغناطیسی  $\Omega$  نشان داده شده است. مشاهده می‌شود با افزایش شاخص توانی  $n_z$ ، فرکانس طبیعی نانوتیر کاهش یافته و همچنین تاثیر وجود پتانسیل مغناطیسی خارجی بر فرکانس اول نانوتیر نیز کاهش یافته است. علت آن است که با افزایش  $n_z$  درصد ماده  $BaTiO_3$  در نانوتیر افزایش یافته و درصد  $CoFe_2O_4$  کاهش می‌یابد که منجر به کاهش مدول الاستیسیته و کاهش ضریب پیزومگنتیک نانوتیر می‌شود.



شکل ۸ فرکانس طبیعی اول بی‌بعد نانوتیر با شرایط مرزی ساده-ساده بر حسب ولتاژ خارجی به ازای مقادیر مختلف شاخص توانی ( $\Omega=0, L=10000nm, L/h=20, \mu=1 \times 10^{-12}m^2$ )



شکل ۶ فرکانس طبیعی اول بی‌بعد نانوتیر با شرایط مرزی ساده-ساده به ازای مقادیر مختلف شاخص توانی ( $V=+10, L=10000nm, L/h=20, \mu=1 \times 10^{-12}m^2$ )

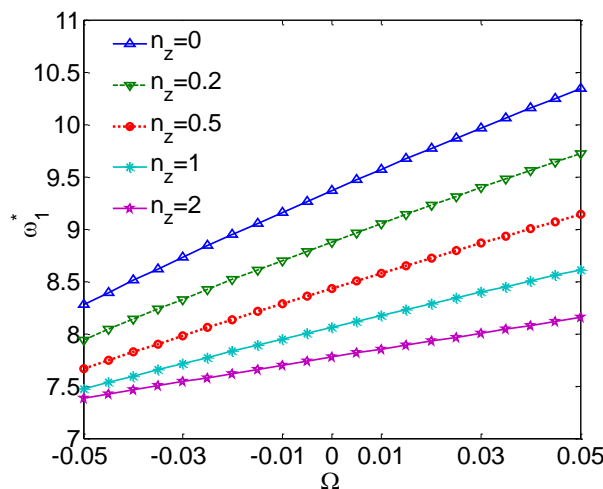
### ۵- نتیجه گیری و جمع بندی

در این مقاله یک فرمول بندی بدون المان برای بررسی فرکانس های طبیعی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی ارائه شده است. از تئوری تیر مرتبه اول برشی (تیر تیموشنکو) برای مدل سازی رفتار نانوتیر استفاده شده است. خواص مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی نانوتیر در راستای ضخامت نانوتیر به صورت تابعی است. تئوری ارائه شده در این پژوهش می تواند اثر ابعاد کوچک را در نظر بگیرد.

نتایج عددی نشان می دهد که روش بدون المان با فرمول بندی ارائه شده در این مقاله قادر است فرکانس های طبیعی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی را به خوبی پیش بینی نماید. افزایش پارامتر غیرموضعی باعث کاهش فرکانس های طبیعی در نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک مدرج تابعی می شود. اثر وجود پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی بر فرکانس های طبیعی نانوتیر مدرج تابعی باریم تیتانیت است و مشاهده شده است که پتانسیل مغناطیسی مثبت باعث افزایش فرکانس نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک و پتانسیل الکتریکی مثبت باعث کاهش فرکانس طبیعی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک مورد بررسی در این مقاله شده است. مشاهده شده است که فرمول بندی بدون المان ارائه شده در این مقاله به خوبی قادر به پیش بینی فرکانس های طبیعی و اثر پارامترهای مختلف بر آن می باشد.

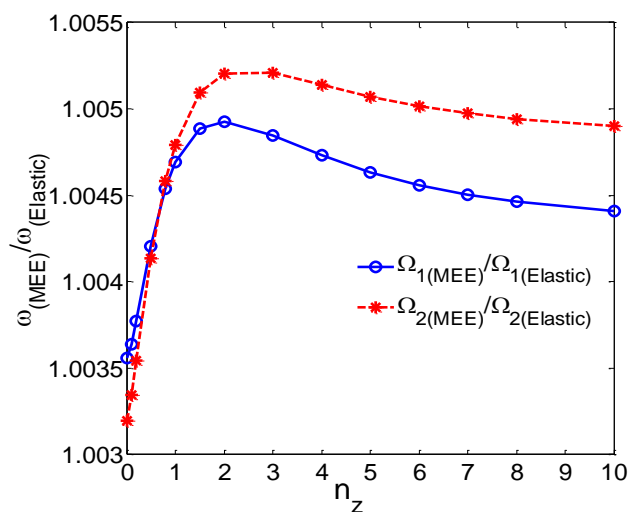
### ۶- فهرست علائم و اختصارات

$E$	مدول الاستیسیته
$G$	مدول برشی
$L$	طول نانوتیر
$b, h$	ضخامت و پهنای نانوتیر
$u(x, t)$	جابجایی محوری صفحه میانی
$w(x, t)$	جابجایی عرضی صفحه میانی
$\varphi(x, t)$	چرخش سطح مقطع
$[M]$	ماتریس جرم
$[K]$	ماتریس سفتی
$V$	پتانسیل الکتریکی
$n_z$	شاخص توانی
$\Phi(x)$	ماتریس توابع شکل
$\omega_i^*$	فرکانس طبیعی بی بعد $\lambda m$
$\mu$	پارامتر غیرموضعی
$\Omega$	پتانسیل مغناطیسی
$\rho$	چگالی، $\text{kg/m}^3$
$\nu$	ضریب پواسون



شکل ۹ فرکانس طبیعی اول بی بعد نانوتیر با شرایط مرزی ساده-ساده بر حسب ولتاژ خارجی به ازای مقادیر مختلف شاخص توانی ( $V=0, L=10000nm, L/h=20, \mu=1 \times 10^{-12}m^2$ )

برای بررسی این نکته که وجود خاصیت پیزوالکتریک و پیزومگنتیک چه اثری بر فرکانس های طبیعی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک دارد، فرکانس های طبیعی نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک با شرط مرزی ساده-ساده در عدم وجود پتانسیل الکتریکی مغناطیسی خارجی محاسبه شده و مقدار آن با فرکانس های طبیعی نانوتیر با خواص الاستیک مشابه ولی بدون در نظر گرفتن خاصیت پیزوالکتریک و پیزومگنتیک (مگنتوالکتریک) مقایسه شده است. در شکل (۱۰) نسبت فرکانس طبیعی تیر الکترومگنتوالکتروالاستیک به فرکانس طبیعی تیر الاستیک مشابه (با خواص الاستیک مشابه ولی بدون خاصیت مگنتوالکتریک) نشان داده شده است. مشاهده می شود وجود خاصیت مگنتوالکتریک در نانوتیر با شرایط مرزی ساده-ساده باعث افزایش اندک فرکانس طبیعی نانوتیر نسبت به نانوتیر الاستیک مشابه ولی بدون خاصیت مگنتوالکتریک می شود.



شکل ۱۰ نسبت فرکانس اول و دوم نانوتیر مگنتوالکتروالاستیک به نانوتیر الاستیک (بدون خاصیت مگنتوالکتریک) ( $\Omega=V=0, L=10000nm, L/h=20, \mu=1 \times 10^{-12}m^2$ )

## ۷- مراجع

- p. 1045389X2210774, 02/07 2022, doi: 10.1177/1045389X221077448.
- [10] Y. Zhang, Y. Li, and S. Li, "Free vibration of porous FG magneto-electro-elastic microbeams in the hygrothermal environment based on differential transformation method," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 35, 10/09 2023, doi: 10.1177/1045389X231197731.
- [11] Y.-f. Zheng, D.-y. Qu, L.-c. Liu, and C.-p. Chen, "Size-dependent nonlinear bending analysis of nonlocal magneto-electro-elastic laminated nanobeams resting on elastic foundation," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 148, p. 104255, 2023/01/01/ 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104255>.
- [12] A. C. Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves," *Journal of applied physics*, vol. 54, no. 9, pp. 4703-4710, 1983.
- [13] A. C. Eringen and J. Wegner, "Nonlocal continuum field theories," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 56, no. 2, pp. B20-B22, 2003.
- [14] J. Reddy, "Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams," *International Journal of Engineering Science*, vol. 45, pp. 288-307, 02/01 2007, doi: 10.1016/j.ijengsci.2007.04.004.
- [15] H. B. Khaniki, "On vibrations of FG nanobeams," *International Journal of Engineering Science*, vol. 135, pp. 23-36, 2019/02/01/ 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.11.002>.
- [16] H. Liu, Z. Lv, and H. Wu, "Nonlinear free vibration of geometrically imperfect functionally graded sandwich nanobeams based on nonlocal strain gradient theory," *Composite Structures*, vol. 214, pp. 47-61, 2019/04/15/ 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.01.090>.
- [17] L.-L. Ke and Y.-S. Wang, "Free vibration of size-dependent magneto-electro-elastic nanobeams based on the nonlocal theory," *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, vol. 63, pp. 52-61, 2014/09/01/ 2014, doi: <https://doi.org/10.1016/j.physe.2014.05.002>.
- [18] M. A. Eltahir, S. A. Emam, and F. F. Mahmoud, "Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no. 14, pp. 7406-7420, 2012/03/15/ 2012, doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.12.090>.
- [19] M. A. Al-Zahrani, S. A. Asiri, K. I. Ahmed, and M. A. Eltahir, "Free Vibration Analysis of 2D
- [1] Y. S. Li, Z. Y. Cai, and S. Y. Shi, "Buckling and free vibration of magneto-electroelastic nanoplate based on nonlocal theory," *Composite Structures*, vol. 111, pp. 522-529, 2014/05/01/ 2014, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.01.033>.
- [2] F. Ebrahimi and M. R. Barati, "Porosity-dependent vibration analysis of piezo-magnetically actuated heterogeneous nanobeams," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 93, pp. 445-459, 2017/09/01/ 2017, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.02.021>.
- [3] R. Ansari, E. Hasrati, R. Gholami, and F. Sadeghi, "Nonlinear analysis of forced vibration of nonlocal third-order shear deformable beam model of magneto-electro-thermo elastic nanobeams," *Composites Part B: Engineering*, vol. 83, pp. 226-241, 2015/12/15/ 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.08.038>.
- [4] V. Mahesh and S. C. Kattimani, "Static behavior of thermally loaded multilayered Magneto-Electro-Elastic beam," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 63, pp. 481-495, 08/25 2017, doi: 10.12989/sem.2017.63.4.481.
- [5] F. Ebrahimi and M. Barati, "A third-order parabolic shear deformation beam theory for nonlocal vibration analysis of magneto-electro-elastic nanobeams embedded in two-parameter elastic foundation," *Advances in Nano Research*, vol. 5, pp. 313-336, 12/01 2017, doi: 10.12989/anr.2017.5.4.313.
- [6] K. M. C. and S. C. Kattimani, "Buckling characteristics and static studies of multilayered magneto-electro-elastic plate," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 64, pp. 751-763, 12/25 2017, doi: 10.12989/sem.2017.64.6.751.
- [7] H. Liu, H. Liu, and J. Yang, "Vibration of FG magneto-electro-viscoelastic porous nanobeams on visco-Pasternak foundation," *Composites Part B: Engineering*, vol. 155, pp. 244-256, 2018/12/15/ 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.08.042>.
- [8] F. Ebrahimi and A. Dabbagh, "Wave dispersion characteristics of rotating heterogeneous magneto-electro-elastic nanobeams based on nonlocal strain gradient elasticity theory," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, pp. 1-32, 09/08 2017, doi: 10.1080/09205071.2017.1369903.
- [9] Y.-E. Wang, X. Li, T.-H. Wu, and Q.-S. Liu, "Steady-state forced vibrations of magneto-electro-elastic Timoshenko nanobeams," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 33,

[20] O. Rahmani and O. Pedram, "Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory," *International Journal of Engineering Science*, vol. 77, pp. 55-70, 2014/04/01/ 2014, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2013.12.003>.

Functionally Graded Strip Beam using Finite Element Method," *Journal of Applied and Computational Mechanics*, vol. 8, no. 4, pp. 1422-1430, 2022, doi: 10.22055/jacm.2022.40253.3576.