

بررسی ارتعاشات آزاد تیر خمیده نازک کامپوزیتی - ساندویچی با لایه گذاری متعامد با استفاده از تئوری لایه ای

چکیده: در این مقاله ارتعاشات آزاد تیر خمیده نازک کامپوزیتی - ساندویچی با لایه گذاری متعامد با استفاده از فرمولبندی تئوری لایه ای مورد تحلیل قرار گرفته است. برای فرمولبندی مساله از تئوری لایه ای بر مبنای جابجایی استفاده شده است. جنس رویه ها از کامپوزیت با لایه گذاری متعامد می باشد. ابتدا یک میدان جابجایی کاملاً عمومی دو بعدی برای تیر فرض شده است و میدان کرنش تیر خمیده نازک بر اساس تئوری لایه ای به دست آمده است. سپس با استفاده از اصل همپلتون، معادلات حرکت حاکم و شرایط مرزی متناسب برای تیر خمیده ساندویچی در تئوری لایه ای به دست آمده است. در نهایت با استفاده از یک میدان جابجایی مناسب، معادلات حاکم بر مساله به یک مساله مقدار ویژه تبدیل شده است و فرکانس های طبیعی تیر خمیده کامپوزیتی - ساندویچی با شرایط مرزی ساده استخراج شده است. در قسمت نتایج عددی ابتدا پیش بینی تئوری برای فرکانس های طبیعی صحنه گذاری شده است و سپس فرکانس های ارتعاشات آزاد تیر کامپوزیتی - ساندویچی با شرایط مرزی ساده برای مدهای مختلف از جمله مدهای ارتعاشی خمشی و مدهای در راستای ضخامت استخراج شده است و بررسی پارامتری روی فرکانس های طبیعی انجام شده است.

واژه های راهنما: ارتعاشات آزاد، تئوری لایه ای، تیر خمیده نازک کامپوزیتی - ساندویچی، لایه گذاری متعامد

عیسی احمدی*
دانشیار

زهرا
میرخوند چگینی
کارشناسی ارشد

مهسا نجفی
دکتری،
گروه مهندسی مکانیک،
دانشگاه زنجان، زنجان

مقاله علمی پژوهشی
دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۱۴
بازنگری: ۱۴۰۲/۰۹/۲۰
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۳۰

Free vibration of curved thin cross-ply composite-sandwich beam based on layerwise theory

Isa Ahmadi*
Associate Professor

Zahra Mirkhond
Chegini
MSc.

Mahsa Najafi
PhD.,
Department of
Mechanical
Engineering
University of Zanjan,
Zanjan

Abstract: In this study, the free vibration of a thin curved cross-ply composite-sandwich beam resting on the Winkler-Pasternak foundation is analyzed. A displacement based Layerwise theory is used for formulation of the problem. First, a general 2D-displacement field is considered for the curved beam. The strain field of the thin curved beam is obtained based on the strain-displacement relations, and then, the governing equations and the appropriate boundary conditions are derived utilizing the Hamilton's principle. These equations are converted into an eigen-value problem using an appropriate displacement field and the natural frequencies of the curved beam are obtained. Numerical result for free vibration frequencies of simply-supported curved thin cross-ply composite-sandwich beam for different modes, including flexural and thickness modes are obtained and parametric analysis is performed.

Keywords: Free vibration, Layerwise theory, Curved thin composite-sandwich beam, Cross-ply lamination, Thickness mode

۱- مقدمه

مدول کششی به مدول برشی عرضی در مواد کامپوزیتی، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی از اهمیت زیادی در تحلیل استاتیکی و دینامیکی لایه‌های کامپوزیتی و ساندویچی دارد. گو و همکاران [۱] در سال ۲۰۱۸ یک روش جامعی برای حل پاسخ استاتیکی و دینامیکی یک تیر خمیده با بستر الاستیک ارائه دادند. در سال ۲۰۲۰ بی و همکاران [۲] ارتعاشات عرضی غیرخطی یک تیر خمیده با شرایط مرزی غیرخطی را بررسی کردند. آنها با استفاده از اصل همپلتون تعمیم‌یافته، معادله حاکم برای دینامیک تیر خمیده به دست آوردند. خدابخش پور و همکاران [۳] در سال ۲۰۲۱ ارتعاشات آزاد تیرهای خمیده کامپوزیتی با مقطع پلکانی را مورد تحلیل قرار دادند. در این تحقیق، روش‌های نیمه تحلیلی و المان محدود برای بررسی اثر میرایی در تحلیل ارتعاش توسعه داده شده است. همچنین با توجه به تاثیر پارامترهای مختلف مانند پارامترهای هندسی، شرایط مرزی و جهت گیری الیاف با نرم‌افزار تجاری انسیس^۱ مقایسه شدند. آسیون و همکارش [۴] با استفاده از نظریه زیگزاگ اصلاح شده به بررسی کمانش و تحلیل واکنش استاتیک غیرخطی تیرهای کامپوزیتی-ساندویچی پرداختند. آنها فرمولاسیون غیرخطی تئوری زیگزاگ اصلاح شده را با در نظر گرفتن نواقص هندسی و غیرخطی بودن، از رابطه تنش-جابجایی وون-کارمن توسعه دادند. صیاد و اوهاد [۵] با استفاده از تئوری تیر خمیده مرتبه پنجم به بررسی تاثیر کرنش‌های برشی عرضی و نرمال مانند اثر کشش ضخامت پرداختند. این تئوری تغییرات مرتبه بالاتر جابجایی‌های محوری (مماسی) و عرضی (شعاعی) را در نظر می‌گیرد. در سال ۲۰۱۹ وانگ و زو [۶] ارتعاشات آزاد یک تیر با هسته فوم فلزی تعبیه شده در بستر الاستیک وینکلر-پسترناک را با استفاده از روش چیشف مورد تحلیل قرار دادند. در این تحقیق تئوری تیر تیموشنکو مورد استفاده قرار گرفته و اصل همپلتون برای استخراج شرایط مرزی و معادلات حاکم بر مدل استفاده شده است. در سال ۲۰۲۲ تای [۷] خمش استاتیکی، ارتعاشات آزاد و کمانش تیرهای خمیده دو لایه ساندویچی مدرج تابعی را با استفاده از حل دقیق تحلیلی و تئوری تیر اصلاح شده تیموشنکو انجام داده است. سیستم تیر خمیده متشکل از دو لایه از تیر تک منحنی است که توسط اتصالات برشی به یکدیگر متصل می‌شوند. در سال ۲۰۲۰ دمیر و همکارانش [۸] ارتعاشات تیرهای خمیده ساندویچی سه‌لایه با لایه‌های الاستیک و هسته ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حرکت که

تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی تقویت شده با الیاف کربن کاربرد گسترده‌ای در صنایع هوایی و صنعت هوافضا دارد. پژوهشگران با تجزیه و تحلیل در ساختار کامپوزیت‌های چندلایه به این نکته دست یافته‌اند که در ساختارهای ناهمسانگرد و ناهمگن کامپوزیت‌های چندلایه، پدیده‌های منحصر به فردی می‌تواند در ابعاد هندسی مختلفی اتفاق بیافتد. توزیع تنش برشی بین‌لایه‌ای در سازه‌های کامپوزیتی بطور کلی شکل پیچیده‌ای دارد و این درحالی است که بسیاری از تئوری‌های برشی شکل ساده و از پیش تعیین شده‌ای برای توزیع تنش برشی جانبی در تیرها در نظر می‌گیرند و معمولاً از تنش عمودی جانبی صرف‌نظر می‌کنند. در سازه‌های همگن مانند تیرهای فلزی و در سازه‌های کامپوزیتی زمانی که تاکید اصلی برای تعیین پاسخ کلی سازه نظیر تعیین بار بحرانی کمانش، تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها باشد، تئوری‌های تک‌لایه معادل مانند تئوری کلاسیک و تئوری‌های برشی مخصوصاً برای سازه‌های نازک مناسب است و می‌تواند پیش بینی قابل قبولی برای رفتار سازه ارائه کند. در سازه‌های کامپوزیتی و مخصوصاً سازه‌های ساندویچی به علت پایین بودن نسبت مدول برشی به مدول الاستیک طولی، و تغییر ناگهانی خواص بین هسته و رویه‌ها توزیع تنش برشی شکل پیچیده‌ای دارد و سهم تغییر شکل برشی در پاسخ سازه افزایش می‌یابد. لذا دقت تئوری‌های تک لایه معادل در تحلیل سازه‌های ساندویچی و کامپوزیتی کاهش می‌یابد.

در این مقاله یک فرمولبندی بر اساس تئوری لایه‌ای برای تحلیل رفتار ارتعاشی تیرهای ساندویچی دارای انحنا ارائه شده است که قادر است علاوه بر مدهای ارتعاشی خمشی مدهای در راستای ضخامت را هم پیش‌بینی نمایند. مزیت اصلی این تئوری دقت بالای آن است که به علت در نظر گرفتن فرم کلی برای میدان جابجایی، تمام کرنش‌های برشی و عمودی را با فرم کلی و بدون تحمیل توزیع از پیش تعیین شده در نظر می‌گیرد. مدل ارائه شده قادر به پیش‌بینی تغییر شکل‌ها در راستای ضخامت نیز می‌باشد، لذا تئوری حاضر می‌تواند علاوه بر مدهای خمشی، سایر مدهای ارتعاشی را نیز پیش‌بینی نماید.

۲- مروری بر کارهای پیشین

تاکنون مدل‌ها و تئوری‌های زیادی برای تحلیل سازه‌های چندلایه و ساندویچی ارائه شده‌اند. به دلیل بالا بودن نسبت

¹ ANSYS

شکل برشی فرض معتبری نمی‌باشد. در تئوری لایه‌های مشکلات ناشی از ناهمگنی در راستای ضخامت مرتفع می‌شود، زیرا درجات آزادی مستقلی را برای هر لایه در نظر می‌گیرد و پیوستگی از ابتدا ارضا می‌شود، بنابراین نتایج آن قابل مقایسه با راه‌حل‌های الاستیسیته سه‌بعدی است. لذا در این مقاله یک فرمولبندی بر اساس تئوری لایه‌ای بر مبنای جابجایی برای مدلسازی رفتار تیر نازک خمیده کامپوزیتی-ساندویچی ارائه شده است. یک میدان جابجایی عمومی که هیچگونه فرم از پیش تعیین شده‌ای را به تیر تحمیل نمی‌کند برای تیر در نظر گرفته شده است. این میدان جابجایی با توجه به تئوری لایه‌ای که در آن تیر در راستای ضخامت به تعداد زیادی لایه و سطح عددی تقسیم‌بندی می‌شود، می‌تواند شکل عمومی برای توزیع کرنش‌های در راستای طول و ضخامت و همچنین کرنش برشی جانبی پیش‌بینی نماید. لذا کرنش‌های برون‌صفحه‌ای عمودی و برشی بطور کامل در نظر گرفته شده است. لذا جواب‌های این تئوری خطاهایی را که از اعمال میدان جابجایی با فرم از پیش تعیین شده در تئوری‌های تک لایه معادل بوجود می‌آید حذف می‌کند و همچنین می‌تواند علاوه بر مد فرکانس‌های طبیعی خمشی، سایر مودهای ارتعاشی تیر را نیز پیش‌بینی کند که مدهای ضخامت نامیده می‌شوند. در این مقاله معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و از روش ناویر برای حل معادلات و استخراج فرکانس‌های طبیعی تیر نازک خمیده کامپوزیتی-ساندویچی با شرایط مرزی ساده استفاده شده است.

۲-۱- تعریف مساله و مدل‌سازی

یک تیر خمیده با شعاع درونی R_i ، شعاع بیرونی R_o ، شعاع میانگین R و ضخامت h که بر روی بستر الاستیک وینکلر-پسترناک قرار دارد، در نظر گرفته می‌شود. طول آن در شعاع متوسط تیر برابر $L=R\theta_0$ است. محور مختصات $r\theta$ مطابق شکل (۱) به تیر متصل شده است که r راستای شعاعی و θ راستای طولی (محیطی) تیر خمیده را نشان می‌دهد. همچنین برای راحتی فرمولبندی، مختصه ضخامت z بصورت $z=r-R$ تعریف می‌شود که $z=0$ سطح میانی تیر را نشان می‌دهد و سطح پایین و بالای تیر در $z=\pm h/2$ قرار گرفته‌اند. پارامترهای سفتی عمودی (وینکلر) و برشی (پسترناک) تکیه‌گاه به ترتیب با K_p و K_w نشان داده می‌شود. تیرخمیده در شکل (۱) نشان داده شده است.

ارتعاشات آزاد تیرهای خمیده را به همراه شرایط مرزی کنترل می‌کند، با استفاده از اصل کار مجازی به طور کلی استخراج می‌شوند. عارفی و نجفی تبار [۹] به بررسی کمانش و ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی پرداختند. تیر ساندویچی از یک هسته نرم متشکل از صفحات کامپوزیتی تقویت‌شده با گرافن تابعی تشکیل شده است. روابط سینماتیکی براساس تئوری تیر ساندویچی مرتبه بالاتر در نظر گرفته شده است و معادلات حاکم با استفاده از فرمول‌بندی ریتز-لاگرانژ استخراج شده است. اوکار و همکارانش [۱۰] فرکانس‌های طبیعی تیرهای ساندویچی را که از هسته متخلخل ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی و صفحات تخت الاستیک همگن فلزی و سرامیکی تشکیل شده است، بررسی کردند. با توجه به ضعف تئوری‌های تک لایه معادل در پیش‌بینی رفتار کامپوزیت‌ها و سازه‌های ساندویچی، یک نظریه لایه‌ای توسط ردی برای آنالیز صفحه کامپوزیتی و ساندویچی ارائه شده است [۱۱]. لیو و همکارانش [۱۲] نظریه‌های لایه‌ای، پیاده‌سازی عددی آن‌ها و کاربرد آن‌ها در تحلیل سازه‌های کامپوزیتی را بررسی کردند. یاسین و همکاران [۱۳] یک نظریه لایه‌ای کارآمد مرتبه سوم برای تجزیه و تحلیل استاتیکی و ارتعاشات آزاد تیرهای خمیده کامپوزیتی ساندویچی با انحنای عمیق ارائه دادند. در سال ۲۰۲۳ نجفی و احمدی [۱۴] روشی برای تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات نانو تیر مدرج تابعی براساس تئوری الاستیسیته غیرمحمولی و تئوری لایه‌ای ارائه دادند. همانگونه که ملاحظه شد، نظریه‌های متعددی برای مدل‌سازی صفحات و تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی توسط محققان مختلف و به دلایل مختلف توسعه داده شده است. تئوری الاستیسیته سه بعدی، تئوری‌های تک لایه معادل، نظریه‌های زیگزاگ، و تئوری‌های لایه‌ای مثال‌های قابل ذکر هستند. تئوری‌های تک لایه معادل نمی‌توانند نتایج قابل قبولی از رفتار سازه‌های کامپوزیتی و ساندویچی ضخیم ارائه کنند. اکثر تئوری‌های ذکر شده قبلی به درستی تنش‌های برشی عرضی را پیش‌بینی نمی‌کنند. به عنوان مثال به دلیل تفاوت سفتی لایه‌های مختلف کامپوزیتی و رویه‌ها و هسته در تیرهای ساندویچی، تئوری‌های تک لایه معادل (با هر مرتبه‌ای) برای تحلیل تنش‌های بین صفحه‌ای این سازه‌ها مناسب نمی‌باشند. این تئوری‌ها بطور کلی فرم تغییر شکل از پیش تعیین شده را برای تیر (ورق) اعمال می‌کنند که دارای فرض‌های ساده کننده است. مثلاً تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول فرض می‌کند که صفحه‌های عمود بر تار میانی بعد از تغییر شکل بصورت صفحه باقی می‌مانند که این فرض در سازه‌های کامپوزیتی-ساندویچی به علت نقش بالای تغییر

با توجه به میدان جابجایی (۱)، کرنش‌های تیر در مختصات استوانه‌ای به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial U_k(\theta, t)}{\partial \theta} + W_k(\theta, t) \right) \Phi_k(z) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = W_k(\theta, t) \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} = U_k(\theta, t) \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \\ &+ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial W_k(\theta, t)}{\partial \theta} - U_k(\theta, t) \right) \Phi_k(z) \end{aligned} \quad (3)$$

که در رابطه بالا برای تیرهای نازک که در آن نسبت ضخامت به شعاع تیر خیلی کوچک است ($h/R \ll 1$) مقدار $r = R(1+z/R) \approx R$ در نظر گرفته شده است. برای بدست آوردن معادلات حاکم بر تیر خمیده از اصل همپلتون استفاده می‌شود که به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\delta \Pi = \int_{t_1}^{t_2} (\delta \Pi_s + \delta \Pi_w - \delta \Pi_k) dt = 0 \quad (4)$$

که در آن $\delta \Pi_s$ ، $\delta \Pi_w$ و $\delta \Pi_k$ تغییرات انرژی کرنشی، تغییرات کارانجام شده توسط نیروهای خارجی و تغییرات انرژی جنبشی تیر است. تغییر انرژی کرنشی در تیر خمیده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta \Pi_s = \int_V (\sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z}) R d\theta dy dz \quad (5)$$

تغییرات کار توسط نیروهای خارجی مربوط به بستر در سطح داخلی تیر به صورت زیر بدست آید:

$$\delta \Pi_w = \int_0^{\theta_0} ((K_w W_1 - K_p \frac{\partial^2 W_1}{R^2 \partial \theta^2}) \delta W_1) R d\theta \quad (6)$$

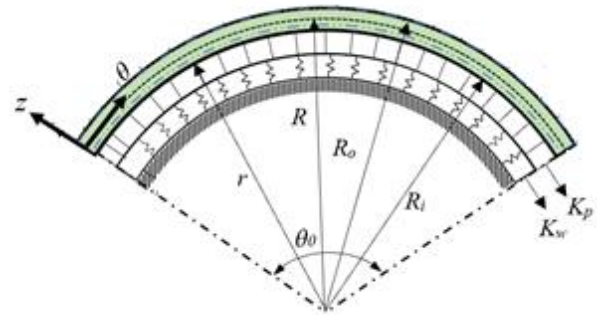
که K_w ضریب سفتی وینکلر و K_p ضریب پسترناک بستر است. تغییر انرژی جنبشی با توجه به میدان جابجایی (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\theta_0} E_{kj} \left(\frac{\partial U_j}{\partial t} \frac{\partial \delta U_k}{\partial t} + \frac{\partial W_j}{\partial t} \frac{\partial \delta W_k}{\partial t} \right) R d\theta dt \quad (7)$$

که در آن ماتریس E_{kj} بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$E_{kj} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \Phi_k(z) \Phi_j(z) dz \quad (8)$$

با استفاده از اصل همپلتون معادلات حاکم بر تیر خمیده به صورت زیر بدست می‌آید.



شکل ۱ هندسه، محورهای مختصات و بستر تیر خمیده ساندویچی

برای فرمولبندی فرض می‌شود که تیر در راستای ضخامت به تعدادی لایه با ضخامت یکنواخت تقسیم شده است که به این لایه‌ها، لایه‌های عددی گفته می‌شود. سطح تماس لایه‌های عددی سطوحی را تشکیل می‌دهد که به آنها سطوح عددی گفته می‌شود. این لایه‌های عددی از سطح داخلی تیر خمیده به سمت سطح بیرونی آن از یک تا N شماره گذاری شده است. همچنین سطوح عددی (شامل سطح پایینی و سطح بالایی تیر) از سطح داخلی تیر خمیده به سمت سطح بیرونی آن، از یک تا $N+1$ شماره گذاری شده است. مولفه‌های جابجایی در سطح عددی k ام در راستای θ و z به ترتیب با توابع مجهول $U_k(\theta, t)$ و $W_k(\theta, t)$ نشان داده می‌شوند. لذا اگر به تعداد N لایه عددی در تیر در نظر گرفته شود تعداد $2N+2$ مجهول جابجایی وجود دارد. از مولفه جابجایی در جهت پهنای تیر صرف نظر می‌شود. با در نظر گرفتن جابجایی سطوح عددی، مولفه‌های جابجایی برای تیر را می‌توان به شکل زیر نشان داد.

$$\begin{aligned} u_\theta(\theta, z, t) &= U_k(\theta, t) \Phi_k(z), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N+1 \\ u_r(\theta, z, t) &= W_k(\theta, t) \Phi_k(z) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $u_\theta(\theta, z, t)$ و $u_r(\theta, z, t)$ مولفه‌های جابجایی تیر در راستای طول تیر θ و ضخامت تیر z هستند. k اندیس دامی^۱ است و جمع بر روی اندیس تکرار شونده از ۱ تا $N+1$ انجام می‌شود. علاوه بر این، تابع درونیاب لاگرانژی خطی است که برای یافتن مولفه‌های جابجایی در جهت ضخامت استفاده می‌شود. تابع درونیاب خطی بصورت زیر است.

$$\Phi_k = \begin{cases} 0 & z \leq z_{k-1} \\ \frac{z - z_{k-1}}{h_{k-1}} & z_{k-1} \leq z \leq z_k \\ \frac{z_{k+1} - z}{h_k} & z_k \leq z \leq z_{k+1} \\ 0 & z \geq z_{k+1} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2)$$

¹ Dummy

$$\begin{aligned}
 A_{ab}^{kj} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{C}_{ab} \frac{d\Phi_k(z)}{dz} \frac{d\Phi_j(z)}{dz} dz \\
 B_{ab}^{kj} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{C}_{ab} \Phi_k(z) \frac{d\Phi_j(z)}{dz} dz \\
 D_{ab}^{kj} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{C}_{ab} \Phi_k(z) \Phi_j(z) dz
 \end{aligned} \quad (14)$$

۲-۲- حل معادله

روش ناویر برای بررسی فرکانس ارتعاشات آزاد تیر خمیده لایه‌ای بکار گرفته شده است. شرایط مرزی برای تیر خمیده با مرزهای دوسر ساده (در لبه‌های $\theta=0$ و $\theta=\theta_0$) با توجه به رابطه (۱۰) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
 M_{\theta}^k(\theta, t) &= \frac{D_{11}^{kj}}{R} \frac{\partial U_j(\theta, t)}{\partial \theta} + (D_{11}^{kj} + B_{13}^{kj}) W_j(\theta, t) = 0 \\
 W_k(\theta, t) &= 0,
 \end{aligned} \quad (15)$$

براساس روش ناویر، برای ارضای شرایط مرزی، مولفه‌های جابجایی به صورت سری‌های مثلثاتی از مکان بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \{U(\theta, t)\} &= \{\bar{U}\}_m \cos(\alpha_m \theta) e^{i\omega_{mp} t} \\
 \{W(\theta, t)\} &= \{\bar{W}\}_m \sin(\alpha_m \theta) e^{i\omega_{mp} t}
 \end{aligned} \quad (16)$$

در این معادله فرکانس طبیعی تیر و $\alpha_m = m\pi/L$ است. به منظور به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی تیر، با قرار دادن (۱۶) در معادله (۱۳) رابطه حاصل بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$([K] - [M]\omega_{mp}^2) \begin{Bmatrix} \{\bar{U}\}_m \\ \{\bar{W}\}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

که در آن $\{0\}$ ماتریس ستونی با $N+1$ مولفه صفر است. همچنین ماتریس‌های $[K]$ و $[M]$ صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 [K] &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} E_{kj} & [0] \\ [0] & E_{kj} \end{bmatrix} \\
 [K_{11}] &= \alpha_m^2 D_{11}^{kj} + \frac{1}{R^2} D_{55}^{kj} - \frac{1}{R} (B_{55}^{jk} + B_{55}^{kj}) + A_{55}^{kj} \\
 [K_{12}] &= -\frac{1}{R} (D_{11}^{kj} + D_{55}^{kj}) \alpha_m - (B_{13}^{kj} - B_{55}^{jk}) \alpha_m \\
 [K_{21}] &= -\frac{1}{R} (D_{11}^{kj} + D_{55}^{kj}) \alpha_m - (B_{13}^{jk} - B_{55}^{kj}) \alpha_m \\
 [K_{22}] &= D_{55}^{kj} + \frac{1}{R^2} D_{11}^{kj} + \frac{1}{R} (B_{13}^{kj} + B_{13}^{jk}) + A_{33}^{kj} \\
 &\quad + K_p \delta_{1k} - K_w \delta_{1j}
 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_{\theta}^k}{R \partial \theta} - Q_{\theta}^k + \frac{R_{\theta}^k}{R} &= E_{kj} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial R_{\theta}^k}{R \partial \theta} - \frac{M_{\theta}^k}{R} - N_z^k &= E_{kj} \frac{\partial^3 W}{\partial t^2} + K_w W_k \delta_{1k} \\
 -K_p \frac{\partial^3 W_k}{R^2 \partial \theta^2} \delta_{1k} &
 \end{aligned} \quad (9)$$

و شرایط مرزی ممکن در $\theta=0$ و $\theta=\theta_0$ بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 M_{\theta}^k &= 0 \quad \text{or} \quad \delta U_k = 0 \\
 R_{\theta}^k &= 0 \quad \text{or} \quad \delta W_k = 0
 \end{aligned} \quad (10)$$

و همچنین $M_{\theta}^k, N_z^k, Q_{\theta}^k$ و R_{θ}^k بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 (M_{\theta}^k, R_{\theta}^k) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{\theta}, \sigma_{\theta z}) \Phi_k dz \\
 (N_z^k, Q_{\theta}^k) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_z, \sigma_{\theta z}) \frac{d\Phi_k}{dz} dz
 \end{aligned} \quad (11)$$

با توجه به اینکه برای لایه‌های کامپوزیتی زاویه الیاف نسبت به راستای طولی تیر سنجیده شده است (زاویه صفر الیاف در راستای طول تیر و زاویه ۹۰ الیاف در راستای پهنا را نشان می‌دهد) رابطه تنش-کرنش را با توجه به مولفه‌های غیر صفر میدان کرنش که در رابطه (۳) آمده است می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta} \\ \sigma_z \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{13} & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

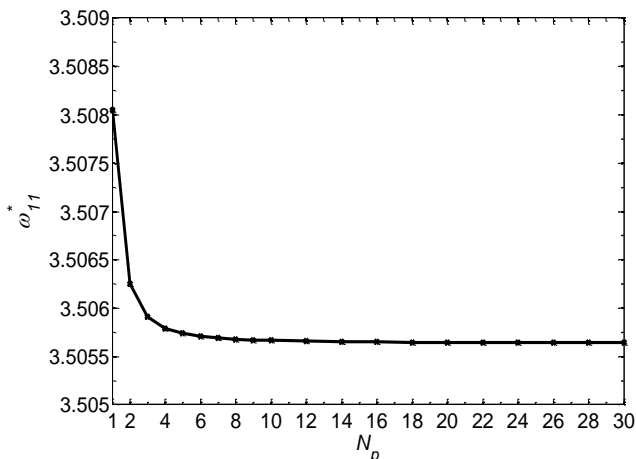
که در آن \bar{C}_{ab} مولفه‌های تانسور ضرایب الاستیک است. معادلات بر حسب میدان جابجایی بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}
 D_{11}^{kj} \frac{\partial^2 U_j}{R^2 \partial \theta^2} - (A_{55}^{kj} - \frac{1}{R} B_{55}^{jk} - \frac{1}{R} B_{55}^{kj} + \frac{1}{R^2} D_{55}^{kj}) U_j \\
 + (\frac{1}{R} D_{11}^{kj} + B_{13}^{kj} - B_{55}^{jk} + \frac{1}{R} D_{55}^{kj}) \frac{\partial W_j}{R \partial \theta} = E_{kj} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \\
 (B_{55}^{kj} - \frac{1}{R} D_{11}^{kj} - B_{13}^{jk} - \frac{1}{R} D_{55}^{kj}) \frac{\partial U_j}{R \partial \theta} + D_{55}^{kj} \frac{\partial^2 W_j}{R^2 \partial \theta^2} \\
 - (\frac{1}{R^2} D_{11}^{kj} + \frac{1}{R} B_{13}^{kj} + \frac{1}{R} B_{13}^{jk} + A_{33}^{kj}) W_j = K_w W_j \delta_{1j} \\
 - K_p \frac{\partial^2 W_k}{R^2 \partial \theta^2} \delta_{1k} - N^M (\frac{\partial^2 W_{N_c}}{R^2 \partial \theta^2}) + E_{kj} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}
 \end{aligned} \quad (13)$$

معادلات فوق شامل $2N+2$ معادله دیفرانسیل کوپل است که باید بصورت همزمان حل شوند. همچنین ماتریس‌های ضرایب معادلات فوق ظاهر شده است به صورت زیر تعریف می‌شوند.

دقت نتایج این تئوری به تعداد لایه‌های عددی انتخاب شده بستگی دارد. با افزایش تعداد لایه‌های عددی (سطوح عددی) درجه آزادی مدل برای پیش‌بینی تغییر شکل تیر افزایش می‌یابد و می‌تواند با دقت بالاتر رفتار تیر را پیش‌بینی کند. برای بررسی اثر تعداد لایه‌های عددی بر پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی، ابتدا همگرایی نتایج عددی با افزایش تعداد لایه‌های عددی مورد بررسی قرار گرفته است. تعداد لایه‌های عددی در هر لایه فیزیکی گرافیت-اپوکسی با N_p نشان داده شده است. همچنین ضخامت تمام لایه‌های عددی در تیر یکسان در نظر گرفته شده است. تیر کامپوزیتی-ساندویچی با لایه‌گذاری [0/90/core/90/0]، که در آن ضخامت هر لایه فیزیکی گرافیت-اپوکسی برابر با $h_c=0.1h$ و در نتیجه ضخامت هسته برابر $h_c=0.6h$ می‌باشد در نظر گرفته شده است. در این مقاله ترتیب لایه‌های تیر کامپوزیت-ساندویچی از سطح داخلی تیر خمیده به سمت سطح خارجی آن در داخل کروش از چپ به راست نوشته شده است و زاویه صفر به معنای الیاف طولی تیر و ۹۰ به معنای الیاف در راستای پهنای تیر است.

با توجه به اینکه هر لایه فیزیکی گرافیت-اپوکسی به N_p لایه عددی تقسیم شده است و با توجه به یکسان بودن ضخامت لایه‌های عددی، در مجموع تعداد لایه‌های عددی در کل این تیر برابر با $N=10N_p$ است. در شکل (۲) همگرایی فرکانس طبیعی اول خمشی ω_{11} ($p=1, m=1$) تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی برای $L/h=10$ و $L/R=1$ بررسی شده است.



شکل ۲ بررسی همگرایی فرکانس طبیعی تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی ($L/h=10, \theta_0=L/R=1$)

برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی تیر خمیده لازم است که دترمینان $([K]-\omega_{mp}^2[M])$ برابر با صفر قرار داده شود. برای هر شماره مد m ، مدهای ارتعاشی مختلفی وجود دارد که با p نشان داده می‌شوند. اولین مد ارتعاشی ($p=1$) مد خمشی نامیده می‌شود و سایر مدهای ارتعاشی ($p>1$) مد ضخامت نامیده می‌شوند و فرکانس طبیعی مربوط به آن‌ها به صورت ω_{mp} نشان داده می‌شود. برای هر $m, p=1$ مد ارتعاشی خمشی است و برای $p>1$ ، مدهای ضخامت نامیده می‌شود. تئوری حاضر می‌تواند با در نظر گرفتن فرم کلی برای میدان جابجایی فرکانس‌های طبیعی تیر خمیده مرتبط با مد ضخامت را پیش‌بینی نماید که تئوری‌های تک لایه معادل قادر به پیش‌بینی آن نیستند. علاوه بر مدهای خمشی، مدهای ضخامت می‌توانند نقش مهمی در تحلیل رفتار دینامیکی تیر خمیده ساندویچی داشته باشند. بنابراین بررسی فرکانس‌های طبیعی مربوط به آن‌ها به منظور بررسی دقیق رفتار تیر خمیده ساندویچی دارای اهمیت است.

۲-۳- نتایج عددی

تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی با هندسه و شرایط بارگذاری نشان داده شده در شکل (۱)، در نظر گرفته می‌شود. خواص مکانیکی مربوط به لایه‌های گرافیت-اپوکسی و هسته در جدول (۱) نشان داده شده است.

جدول ۱ خواص مکانیکی لایه‌ها گرافیت-اپوکسی و هسته [۱۵]

خواص مواد	E_1 (Gpa)	$E_2=$ E_3 (Gpa)	$G_{12}=$ G_{13} (Gpa)	G_{23} (Gpa)	$\nu_{12}=$ ν_{13}	ν_{23}
Gr-Ep	137.9	9.0	7.1	6.2	0.3	0.49
Core	0.232	0.232	0.096	0.096	0.2	0.2

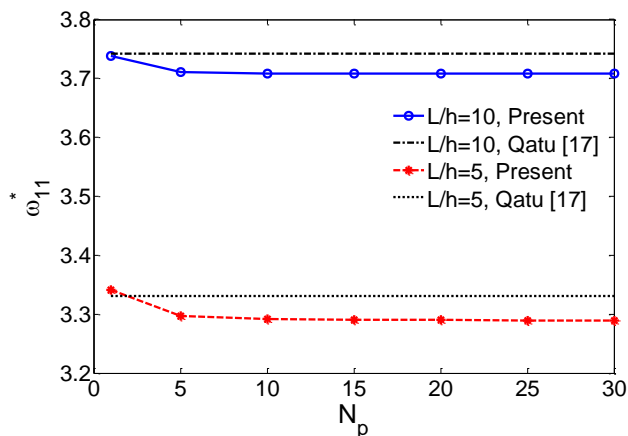
همچنین چگالی لایه‌های گرافیت-اپوکسی برابر $\rho=1580\text{kg/m}^3$ و چگالی فوم $\rho=320\text{kg/m}^3$ می‌باشد. همچنین در این مقاله فرکانس طبیعی بی بعد تیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_{mp}^* = \omega L^2 \left(\sqrt{\frac{12\rho}{C_{11}h^2}} \right)_{Gr-Ep} \quad (19)$$

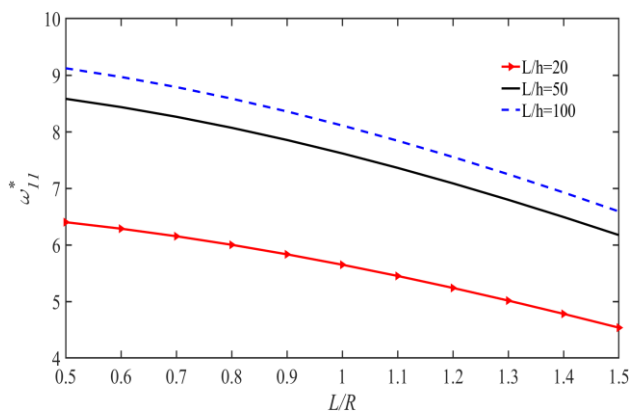
که در آن C_{11} ضریب الاستیک لایه کامپوزیتی گرافیت-اپوکسی ($C_{11}=141.24\text{Gpa}$)، چگالی لایه گرافیت-اپوکسی ρ و ضخامت تیر می‌باشد.

تیرخمیده کاهش می‌یابد. بار فشاری و ضرایب بستر در این نمودار صفر می‌باشد.

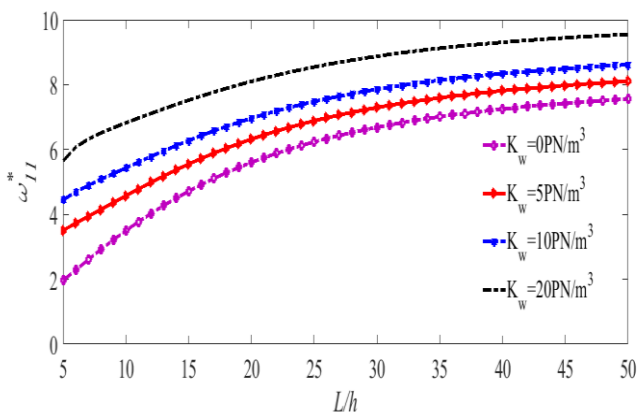
اثر وجود بسترالاستیک وینکلر-پسترناک بر فرکانس طبیعی تیر $[0/90/core/90/0]$ در شکل‌های (۵) و (۶) ارایه شده است. نسبت $L/R=1$ و طول تیرخمیده $L=0.01m$ است. مشاهده می‌شود که افزایش پارامترهای بسترالاستیک وینکلر-پسترناک باعث افزایش فرکانس طبیعی تیرخمیده می‌شود.



شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد اول بر حسب افزایش تعداد لایه عددی و مقایسه با مرجع [۱۷]



شکل ۴ فرکانس بی بعد تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی $[0/90/core/90/0]$ در نسبت طول به شعاع مختلف $L=1m$



شکل ۵ اثر پارامتر بستر وینکلر بر فرکانس طبیعی تیر خمیده

مشاهده می‌شود که به منظور همگرایی نتایج حداقل ۸ لایه عددی برای هر لایه فیزیکی و در مجموع حداقل ۸۰ لایه عددی مورد نیاز می‌باشد. از این رو در تمامی محاسبات و نتایج ارائه شده هر لایه گرافیت-اپوکسی به ۱۰ لایه عددی تقسیم شده و ضخامت لایه‌های عددی در تمام لایه‌ها نیز با هم برابر است. بطور مثال در تیر بررسی شده در نمودار (۲)، هسته به ۶۰ لایه عددی تقسیم شده است.

به منظور بررسی درستی و صحت نتایج عددی، فرکانس طبیعی خمشی اول تا چهارم تیر $[0/90]$ که با روش حاضر پیش‌بینی شده است، با نتایج مرجع [۱۶] و [۱۷] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود مقادیر فرکانس طبیعی پیش‌بینی شده انطباق خوبی با همدیگر دارند.

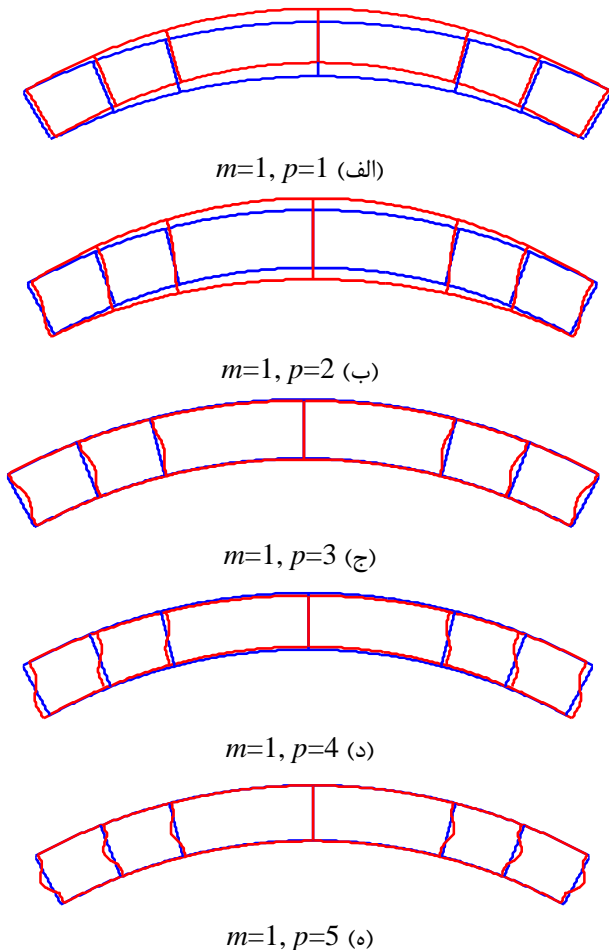
جدول ۲ مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد تیر خمیده کامپوزیتی با لایه‌گذاری $[0/90]$ و $(L/h=100)$

	m	[17] Deep beam	[16] Shallow beam	Present
$L/R=0.2$	1	4.6707	4.6911	4.6223
	2	18.767	18.792	18.5488
	3	42.255	42.291	41.67667
	4	75.131	75.179	73.8835
$L/R=1$	1	4.0115	4.4725	3.9893
	2	18.030	18.539	17.9172
	3	41.431	41.992	41.0894
	4	74.188	74.823	73.3632

فرکانس طبیعی بی بعد تیر خمیده کامپوزیتی $[0/90]$ با $L/h=10$ و $L/h=5$ برای مقادیر مختلف تعداد لایه عددی N در شکل (۳) آمده است و با نتایج مرجع [۱۷] مقایسه شده است. همانطور که مشخص است جواب حاضر در عین انطباق با نتایج مرجع [۱۷] از مقادیر این مرجع کوچکتر است. برای تعداد لایه عددی $N_p=1$ ، نتایج تئوری حاضر و تئوری تک لایه معادل [۱۷] بسیار نزدیک می‌باشند.

شکل (۴) فرکانس بی بعد تیرخمیده کامپوزیتی-ساندویچی را نسبت به تغییرات نسبت طول به شعاع (L/R) برای سه مقدار مختلف L/h در تیر ساندویچی $[0/90/core/90/0]$ نشان می‌دهد. طول تیر ثابت و برابر با $L=1m$ و ضخامت هسته $h_c=0.6h$ انتخاب شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به شعاع $(\theta_0=L/R)$ فرکانس بی بعد

فرکانس‌های خمشی نزدیکتر می‌شوند و نقش آنها در تحلیل رفتار دینامیکی تیر افزایش می‌یابد. همچنین در تیرهای ساندویچی به علت صلبیت پایین هسته نسبت به رویه‌ها ممکن است نقش این مدها قابل توجه باشد. رنگ آبی شکل اولیه تیر و رنگ قرمز شکل تغییر یافته (مد ارتعاشی) را نشان می‌دهد.

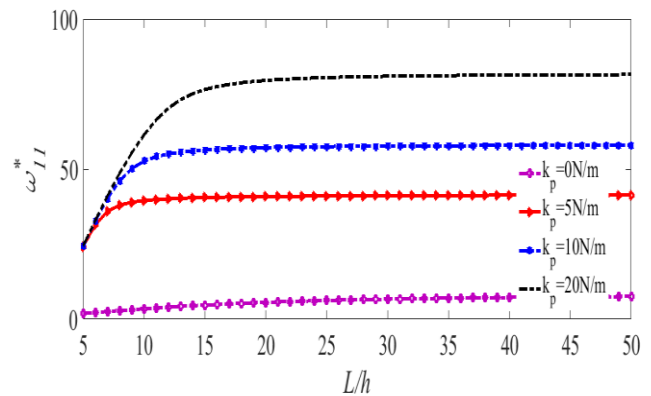


شکل ۷ شکل مدهای تیر خمیده [0/0/core/0/0] مربوط به مد خمشی اول $m=1$ و شماره‌های مختلف مد ضخامت $(L=1m, L/h=10, K_W=K_P=P_0=0, h_c=0.6h)$

فرکانس‌های طبیعی مربوط به شکل مدهای نشان داده شده در شکل (۷) برای مدهای اول تا چهارم مد ضخامت $(m=1, p=1, \dots, 4)$ در جدول (۳) تا جدول (۵) برای لایه‌گذاری‌های مختلف برای $L=1m$ و $h_c=0.6h$ آمده است.

جدول ۳ فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ضخامت مختلف تیر خمیده ساندویچی [0/0/core/0/0] $(m=1, h_c=0.6h, L/R=1)$

L/h	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
10	3.5469	55.1950	86.3150	113.2533
20	5.8545	193.5285	214.5570	270.1188
30	7.3641	294.9878	430.3295	535.2066



شکل ۶ اثر پارامتر بستر پسترناک بر فرکانس طبیعی تیر خمیده

همانگونه که ذکر شد مدل ارایه شده می‌تواند تغییر شکل‌های پیچیده تیر از جمله تغییر شکل برشی پیچیده و تراکم هسته و رویه‌ها را در نظر بگیرد و علاوه بر مدهای خمشی، مدهای ارتعاشی دیگری را نیز پیش‌بینی می‌کند. بطور مثال تئوری مرتبه اول برشی فرض می‌کند که صفحات عمود بر تار میانی بعد از تغییر شکل صفحه باقی می‌مانند و تئوری اویلر برنولی فرض می‌کند که صفحات عمود بر تار میانی بعد از تغییر شکل بصورت صفحه عمود بر تار میانی باقی می‌مانند. همچنین تئوری‌های مرتبه بالاتر نیز فرم از پیش تعیین شده‌ای برای تغییر شکل تیر در نظر گرفته و آن را بر تیر تحمیل می‌کند. تئوری حاضر هیچگونه فرم از قبل تعیین شده‌ای برای جابجایی در نظر نمی‌گیرد و با افزایش تعداد لایه‌های عددی می‌تواند تغییر شکل‌های پیچیده را پیش‌بینی کند. همانگونه که قبلاً گفته شد، برای هر شماره مد m مدهای ارتعاشی مختلفی وجود دارد که با p نشان داده می‌شوند. اولین مد ارتعاشی ($p=1$) مد خمشی نامیده می‌شود و سایر مدهای ارتعاشی ($p>1$) مد ضخامت نامیده می‌شود. شکل (۷) مدهای ارتعاشی تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی [0/0/core/0/0] برای شماره مدهای ارتعاشی مختلف مد ضخامت (p) در مد اول خمشی ($m=1$) شامل مدهای ($m=1, p=1$), ($m=1, p=2$), ($m=1, p=3$), ($m=1, p=4$) و ($m=1, p=5$) را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود در $p=1$ صفحات عمود بر صفحه میانی، بعد از تغییر شکل هم تقریباً به شکل صفحه باقی مانده است ولی در $p=2$ تا $p=5$ این صفحات تغییر شکی یافته است که نشان دهنده شکل‌های پیچیده از توزیع تغییر شکل در راستای ضخامت است که تئوری‌های تک لایه معادل توان پیش‌بینی آنها را ندارند. این مدهای ارتعاشی مدهای ضخامت نامیده می‌شوند. فرکانس این مدها از مود خمشی بسیار بالاتر است. در تیرهای کامپوزیتی ضخیم این فرکانس‌ها به

۳- نتیجه گیری

در این پژوهش از تئوری لایه‌ای به منظور مطالعه رفتار ارتعاشات آزاد تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی روی بستر وینکلر-پسترناک استفاده شده است. تئوری لایه‌ای بر خلاف تئوری‌های تکنیکی تک‌لایه معادل که فرم از پیش تعیین شده برای جابجایی تیر در نظر می‌گیرند فرم جابجایی (تغییر شکل) عمومی برای تیر در نظر می‌گیرد و لذا می‌تواند رفتار تیر کامپوزیتی-ساندویچی را با دقت بالایی پیش‌بینی نماید. این مساله در تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی که تغییر شکل‌های برشی نقش بیشتری در تعیین رفتار تیر دارند اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. در تئوری حاضر فرض می‌شود که هر لایه از تیر کامپوزیتی-ساندویچی در راستای ضخامت از تعدادی لایه فرضی تشکیل شده است، لذا هر لایه فیزیکی تیر به تعداد مشخصی لایه عددی تقسیم می‌شود. نتایج پیش‌بینی شده توسط تئوری حاضر با تئوری‌های به کار رفته در مقالات دیگر مورد مقایسه قرار گرفته و همگرایی نتایج نیز بررسی شده است. با توجه به مطالعات صورت گرفته در بخش‌های پیشین، نتایج زیر حاصل شده است.

- تئوری حاضر بر خلاف تئوری‌های تغییر شکل برشی فرم کلی برای میدان جابه‌جایی، کرنش و پتانسیل الکتریکی در نظر گرفته است. به بیان دیگر این تئوری از کرنش‌های برون صفحه‌ای برشی و عمودی در تیر صرف‌نظر نمی‌کند و بلکه فرم کاملاً عمومی برای آن در نظر می‌گیرد. لذا در تئوری حاضر نتایج پیش‌بینی شده برای فرکانس طبیعی کوچکتر از نتایج تئوری‌های تغییر شکل برشی است که از بعضی کرنش‌ها صرف‌نظر می‌کنند یا توزیع از پیش تعیین شده‌ای برای آن در نظر می‌گیرد.

- بر خلاف تئوری‌های تغییر شکل برشی، تئوری حاضر می‌تواند مقادیر فرکانس طبیعی مرتبط با مدهای ارتعاشی ضخامت را پیش‌بینی نماید. مطالعه دقیق رفتار ارتعاشی تیرخمیده نیازمند در نظر گرفتن فرکانس‌های طبیعی مرتبط با مدهای ارتعاشی خمشی و ضخامت است و از این‌رو به نظر می‌رسد تئوری ارائه شده در پژوهش حاضر می‌تواند پیش‌بینی دقیق‌تری از رفتار دینامیکی تیرخمیده کامپوزیتی-ساندویچی ارائه نماید.

- افزایش نسبت طول بر ضخامت تیر خمیده کامپوزیتی-ساندویچی باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد آن می‌گردد.
- افزایش نسبت طول به شعاع تیرخمیده کامپوزیتی-ساندویچی باعث کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود.

جدول ۴ فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ضخامت مختلف تیر خمیده ساندویچی $(m=1, h_c=0.6h, L/R=1)$ [0/90/core/90/0]

L/h	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
10	3.5057	54.5559	68.7174	87.2795
20	5.6139	143.2080	197.7427	241.2394
30	6.7010	216.4461	385.7756	523.5894

جدول ۵ فرکانس‌های طبیعی مربوط به مدهای ضخامت مختلف تیر خمیده ساندویچی $(m=1, h_c=0.6h, L/R=1)$ [0/0/core/90/90]

L/h	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
10	2.7509	33.7984	56.6836	96.7508
20	3.4125	96.1311	213.5804	249.2263
30	3.6010	174.0748	404.7613	524.2572

اثرات پارامترهای مربوط به بستر بر فرکانس طبیعی تیرخمیده کامپوزیتی-ساندویچی برای لایه‌گذاری‌های مختلف متقارن و نامتقارن در جدول (۶) آمده است. مشاهده می‌شود که افزایش پارامترهای مربوط به بستر الاستیک وینکلر-پسترناک باعث افزایش فرکانس طبیعی تیرخمیده می‌شود. اثر جابجا شدن محل قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی در رویه‌ها بر فرکانس طبیعی تیر ساندویچی در این جدول مشاهده می‌شود. فرکانس طبیعی مربوط به تیر با لایه‌گذاری [0/90/core/90/0] بزرگتر از فرکانس طبیعی تیر با لایه‌گذاری [90/0/core/0/90] است. همچنین فرکانس طبیعی این تیرها از تیر با لایه‌گذاری نامتقارن [90/90/core/0/0] بزرگتر است. همچنین مقادیر بی‌بعد مربوط به بستر بصورت زیر تعریف شده است.

$$K_0 = K_W (E_1 I / L^4), K_1 = K_P (E_1 I \pi^2) / L^2 \quad (20)$$

جدول ۶ فرکانس طبیعی ω_{11}^* تیرخمیده ساندویچی برای پارامترهای بی‌بعد مربوط به بستر الاستیک K_W, K_P $(L=1m, L/R=1, L/h=20, h_c=0.6h)$

K_I	K_0	[90/0/core/0/90]	[0/90/core/90/0]	[90/90/core/0/0]
0	0	4.5289	5.6139	3.2810
	10	6.1312	6.9733	5.2287
	20	7.3928	8.1067	6.6249
0.1	0	7.3206	8.0377	6.5608
	10	8.4063	9.0393	7.7203
	20	9.3659	9.9395	8.7256
0.2	0	9.3091	9.8834	8.6775
	10	10.1847	10.7135	9.5833
	20	10.9898	11.4829	10.4096

Structures & Materials, vol. 22, no. 7, pp. 2250-2286, 2020. doi: <https://doi.org/10.1177/1099636218795381>.

[5] A. S. Sayyad, and P. V. Avhad, "A new higher order shear and normal deformation theory for the free vibration analysis of sandwich curved beams". *Composite Structures*, vol. 280, no., pp. 114948, 2022. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114948>.

[6] Y. Q. Wang, H. L. Zhao, "Free vibration analysis of metal foam core sandwich beams on elastic foundation using Chebyshev collocation method". *Archive of Applied Mechanics*, vol. 89, no., pp. 2335-2349, 2019. doi: <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01579-0>.

[7] H. N. Thi, "On mechanical behavior of two-layer functionally graded sandwich curved beams resting on elastic foundations using an analytical solution and refined Timoshenko Beam Theory". *Ain Shams Engineering Journal*, vol. 13, no. 4, pp. 101647, 2022. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asej.2021.11.016>.

[8] O. Demir, D. Balkan, R. C. Peker, M. Metin, and A. Arikoglu, "Vibration analysis of curved composite sandwich beams with viscoelastic core by using differential quadrature method". *Journal of Sandwich Structures & Materials*, vol. 22, no. 3, pp. 743-770, 2020. doi: <https://doi.org/10.1177/1099636218767491>.

[9] M. Arefi, and F. Najafitabar, "Buckling and free vibration analyses of a sandwich beam made of a soft core with FG-GNPs reinforced composite face-sheets using Ritz Method". *Thin-Walled Structures*, vol. 158, no., pp. 107200, 2021. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107200>.

[10] M. Avcar, L. Hadji, and R. Akan, "The influence of Winkler-Pasternak elastic foundations on the natural frequencies of imperfect functionally graded sandwich beams". *Geomechanics and Engineering*, vol. 31, no. 1, pp. 099, 2022. doi: <https://doi.org/10.12989/gae.2022.31.1.099>.

[11] J. N. Reddy, "Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis", CRC press, 2003, ISBN:9780203502808, 0203502809.

[12] K. Liew, Z. Pan, and L. Zhang, "An overview of layerwise theories for composite laminates and structures: Development, numerical implementation and application". *Composite Structures*, vol. 216, no., pp. 240-259, 2019. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.074>.

[13] M. Y. Yasin, H. M. Khalid, and M. S. Beg, "Exact solution considering layerwise mechanics for

• وجود بستر وینکلر-پسترناک به دلیل افزایش سفتی تیرخمیده کامپوزیتی-ساندویچی، باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی آن می‌گردد.

۴- فهرست علائم و اختصارات

علائم انگلیسی	
$u_\theta(\theta, z), u_r(\theta, z)$	مولفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای θ و z
$U_i(\theta), W_i(\theta)$	جابه‌جایی سطح عددی i ام در راستای θ و z
$\Phi_k(z)$	تابع درون یاب لاگرانژی برای سطح عددی k ام
$\varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}$	کرنش‌های نرمال و برشی
σ_{ij}	مولفه‌های تنش
ρ	چگالی
$\delta\pi_s$	تغییر انرژی کرنشی
$\delta\pi_w$	تغییر کار انجام شده توسط نیروهای خارجی
$\delta\pi_k$	تغییر انرژی جنبشی
K_w	پارامتر عمودی بستر الاستیک
K_p	پارامتر برشی بستر الاستیک
P_0	بار محوری
ω_{mp}	فرکانس طبیعی
N_p	تعداد لایه‌های عددی فرضی
h, b, L	طول، عرض و ضخامت تیرخمیده
زیرنویس‌ها	
p, m	شماره مدهای ارتعاشی

۵- مراجع

- [1] J. Guo, D. Shi, Q. Wang, F. Pang and Q. Liang, "A domain decomposition approach for static and dynamic analysis of composite laminated curved beam with general elastic restrains". *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 26, no. 16, pp. 1390-1402, 2019. doi: <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1432810>.
- [2] S. Q. Ye, X.Y. Mao, H. Ding, J.C. Ji, and L. Q. Chen, "Nonlinear vibrations of a slightly curved beam with nonlinear boundary conditions". *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 168, no., pp. 105294, 2020. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105294>.
- [3] S. Khodabakhshpour-Bariki, R.-A. Jafari-Talookolaei, M. Attar, and A. Eyvazian, "Free vibration analysis of composite curved beams with stepped cross-section". *Structures*, vol. 33, no., pp. 4828-4842, 2021. doi: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.07.041>.
- [4] A. Ascione, and M. Gherlone, "Nonlinear static response analysis of sandwich beams using the Refined Zigzag Theory". *Journal of Sandwich*

- Structures & Materials*, vol. 21, no. 1, pp. 320-365,2019. doi: <https://doi.org/10.1177/1099636217693623>.
- [16] M. Qatu, "In-plane vibration of slightly curved laminated composite beams". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 159, no. 2, pp. 327-338,1992. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(92\)90039-Z](https://doi.org/10.1016/0022-460X(92)90039-Z).
- [17] M. S. Qatu, "Theories and analyses of thin and moderately thick laminated composite curved beams". *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, no. 20, pp. 2743-2756,1993. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90152-W](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90152-W).
- laminated composite and sandwich curved beams of deep curvatures". *Composite Structures*, vol. 244, no., pp. 112258,2020. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112258>.
- [14] M. Najafi, and I. Ahmadi, "Nonlocal layerwise theory for bending, buckling and vibration analysis of functionally graded nanobeams". *Engineering with Computers*, vol. 39, no. 4, pp. 2653-2675,2023. doi: <https://doi.org/10.1007/s00366-022-01605-w>.
- [15] F. Tornabene, N. Fantuzzi, and M. Baccocchi, "Foam core composite sandwich plates and shells with variable stiffness: Effect of the curvilinear fiber path on the modal response". *Journal of Sandwich*