

## بررسی پایداری دینامیکی تیر اولر - برنولی مدرج تابعی و مقطع متغیر با روش ریتز

**چکیده:** در مقاله حاضر، پایداری دینامیکی تیر اولر - برنولی مدرج تابعی با مقطع متغیر تحت بار محوری دینامیکی بررسی می شود. مقطع متغیر به صورت تابع نمایی و مصالح از نوع مدرج تابعی ترکیبی از آلومینیوم و اکسید زیرکونیوم فرض می شود. در گام اول، معادله دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش همیلتون استخراج می گردد. در گام بعدی، شکل ضعیف معادله محاسبه گردیده و از سری چبیشف به عنوان تابع تغییر مکان عرضی و از تابع بولوتین به عنوان سری زمانی استفاده می گردد. سپس ماتریس های سفتی مصالح، هندسی و جرم استخراج می گردد. در نهایت، مقادیر ضریب بار دینامیکی به ازای فرکانس های تحریک مختلف ریشه یابی می شوند. افزایش ضریب تغییرات سطح و ممان اینرسی، ضریب بار استاتیکی بی بعد و توان ماده تابعی سبب کاهش سفتی تیر گردیده و باعث انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد به سمت فرکانس های کوچک تر می شود. تمامی نمودارهای ارائه شده در این مقاله بی بعد است و می تواند ملاک طراحی مهندسان برای طراحی تیرهای مدرج تابعی تحت بار محوری دینامیکی قرار گیرد.

**واژه های راهنما:** پایداری دینامیکی، مواد مدرج تابعی، پایداری مقاطع متغیر، اصل همیلتون، تحلیل مقدار ویژه

امیرحسین طاهرخانی

کارشناسی ارشد

**مجید امین افشار\***

استادیار،

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه

بین المللی امام خمینی (ره)،

قزوین

مقاله علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۲۱

بازنگری: ۱۴۰۳/۰۱/۰۵

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۲۵

Amir Hossein  
Taherkhani  
M.Sc.

Majid  
Amin Afshar\*  
Assistant professor,  
Department of Technology  
and Engineering,  
Imam Khomeini  
International University,  
Qazvin

## Analysis of the dynamic stability of a functional graded Euler-Bernoulli beam and variable cross-section using the Ritz method

**Abstract:** In this article, the dynamic stability of a functionally graded Euler-Bernoulli beam with a variable cross-section under dynamic axial load is investigated. The variable cross-section is assumed to be an exponential function and the material is a combination of aluminum and subconium oxide. In the first step, the governing differential equation is derived using Hamilton's method. In the next step, the weak form of the equation is calculated and the Chebyshev series is used as the transverse displacement function and the Bolotin method is used as the time series. Then, the material, geometric, and mass hardness matrices are extracted. Finally, the values of the dynamic load factor are determined for different excitation frequencies. The increase in the coefficient of changes in the level and moment of inertia, the dimensionless static load coefficient and the power of the functional material causes the stiffness of the beam to decrease and causes the changes in the dimensionless dynamic load coefficient to be transferred to smaller frequencies.

**Keywords:** Dynamic stability, Functionally graded materials, Stability of variable sections, Hamilton's principle, Eigenvalue analysis

## ۱- مقدمه

بررسی تغییر شکل‌های بزرگ تیرهای منحنی عمیق مدرج تابعی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی پرداخت [۱۱]. حسینی و رحمانی به بررسی ارتعاش نانو تیرهای تیموشینکو عمیق منحنی شکل مدرج تابعی با استفاده از روش ناویر پرداختند [۱۲]. شفیعی و همکاران به مطالعه ارتعاش غیرخطی میکرو تیرهای مخروطی درجه‌بندی‌شده از نظر عملکردی محوری پرداختند. میکرو تیر باتوجه‌به تئوری تیر اولر - برنولی و نظریه تنش زوج اصلاح شده با غیرخطی بودن هندسی فون کارمان مدل‌سازی شده است [۱۳]. پائول و داس رفتار پس از کمانش تیر تیموشینکو از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری حرارتی را مطالعه کردند [۱۴]. قدیری و همکاران به بررسی اثرات سطحی بر رفتار ارتعاشی یک نانو تیر دوار غیرمحللی با مصالح مدرج تابعی پرداختند [۱۵]. آکباس به بررسی ارتعاشات اجباری تیرهای عمیق متخلخل مدرج تابعی پرداخت [۱۶]. سلطانی و عسگریان به بررسی کمانشی ستون‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متغیر پرداخت. در این تحقیق، به‌منظور بررسی رفتار پایداری و ارتعاش آزاد اعضاء، معادله حرکت حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای ماهیچه‌ای با مقطع متغیر با استفاده از ترکیب بسط مک لورن و روش سری‌های توانی حل شده است. نتایج بیانگر این است که با افزایش توان ماده تابعی، مقدار ضریب بارکمانشی و پایداری عضو به علت افزایش ضریب ارتجاعی سیستم افزایش می‌یابد. اما چون فرکانس ارتعاشی به صورت همزمان به هر دو پارامتر جرم و ضریب یانگ وابسته است قابل پیش بینی نیست [۱۷]. رضایی پژند و همکارانش با استفاده از روش ریتز به مطالعه رفتار کمانش جانبی - پیچشی تیر ماهیچه‌ای دوسر مفصلی با مقطع متقارن از جنس مواد تابعی دوطرفه که دارای مهار جانبی کافی در طول خود است، پرداختند [۱۸]. ابراهیمی و براتی به مطالعه کمانش نانو تیرهای غیرمحللی ساخته شده از مواد مدرج تابعی محوری بر روی محیط الاستیک متغیر پرداختند [۱۹]. جلایی و همکاران به بررسی پایداری دینامیکی صفحه گرافنی با اثر میرایی بر روی بستر ویسکوپاسترناک پرداختند [۲۰]. ژو و چانگ ارتعاشات و پایداری تیرهای رایلی چرخان متحرک محوری را مطالعه کردند. مشخص گردید که با افزایش اینرسی دورانی تیر، پایداری سیستم کاهش می‌یابد [۲۱]. چن و همکاران به مطالعه ارتعاشات غیرخطی و رفتار پسا کمانش میکرو تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی دوبعدی پرداختند [۲۲]. کائو و همکاران ارتعاشات آزاد تیر اولر - برنولی مدرج تابعی با مقطع متغیر را بررسی کردند. ایشان از روش ترکیبی اغتشاش<sup>۱</sup> و تابع

مواد تابعی مدرج در ابتدا در سال ۱۹۸۴ توسط گروهی از دانشمندان در دانشگاه سندانی ژاپن مطرح گردید. مواد تابعی مدرج مواد مرکب شامل دو یا چند نوع ماده هستند که خواص آنها به‌صورت تابعی تغییر کرده و به‌صورت درجه‌بندی کنار هم قرار می‌گیرند. مواد تابعی مدرج معمولاً از دوفاز فلزی و سرامیکی ترکیب شده با هم ساخته می‌شوند به‌طوری‌که خواص مواد از یک‌طرف به‌طرف دیگر آنها به‌صورت کاملاً یکنواخت تغییر می‌کند. در سال‌های اخیر استفاده از مواد تابعی مدرج در هواپیما، فضاپیما، اتومبیل، کاربردهای دفاعی در پوشش‌های زره‌ای، پزشکی و سنسورها کاربرد زیادی پیدا کرده است. از طرفی یک عضو با مقطع متغیر نسبت به عضو منشوری که دارای سطح مقطع بزرگ‌تری است، از توان باربری بیشتری برخوردار است. در نتیجه با ترکیب ویژگی مواد مدرج تابعی و اعضای با مقطع متغیر می‌توان ظرفیت باربری تیر را به طور قابل‌ملاحظه‌ای افزایش داد [۱]، [۲]. نخستین بار تیموشنکو [۳]، ونگ [۴]، بازانت [۵] به مطالعه ظرفیت بارکمانشی ستون‌های الاستیک بر مبنای روش‌های حل بسته معادله دیفرانسیل حاکم یا تقریبی عددی پرداختند. بولوتین نخستین بار به بررسی کمانش دینامیکی سیستم‌های مکانیکی پرداخت. ایشان با معرفی یک بارگذاری دینامیکی مشخص برای سیستم دینامیکی بر مبنای روش‌های تحلیلی به مطالعه پایداری دینامیکی سیستم پرداخت [۶]. دربندی و همکاران یک راه‌حل تحلیلی برای کمانش ستون‌های با سطح مقطع متغیر تحت بارهای متمرکز و گسترده ارائه کردند [۷]. انصاری و همکاران با استفاده از تئوری ارینگن پایداری دینامیکی نانولوله کربن تک‌جداره را بررسی کردند. مشخص گردید که دامنه ناحیه ناپایداری برای مدل غیر موضعی تیر تیموشنکو بزرگ‌تر از مدل غیر موضعی تیر اوپلر برنولی است [۸]. قنادپور و همکاران، به مطالعه کمانش و ارتعاشات تیر اولر - برنولی غیرمحللی به روش ریتز پرداختند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر غیرمحللی ارینگن مقدار ضریب بار کمانشی کاهش و در فرکانس طبیعی بی‌بعد بسته به شرایط مرزی تکیه‌گاهی افزایش یا کاهش می‌یابد [۹]. حسینی هاشمی و ناظم نژاد به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی سطح مؤثر نانو تیر مدرج تابعی پرداختند. مشخص گردید که افزایش ابعاد نانو تیر مدرج تابعی مانند نسبت طول یا ضخامت و اثرات سطح مؤثر باعث کاهش فرکانس نرمال طبیعی می‌شود [۱۰]. کورتاران به

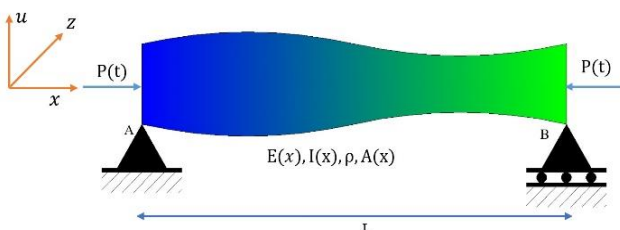
<sup>۱</sup> Perturbation

برای مقاطع جدار نازک باز و با اعمال اثرات محل اتصال بستر الاستیک و خروج از مرکزیت بار فشاری در معادلات بررسی کردند [۲۹]. ابراهیمی و همکاران پایداری حرارتی مکانیکی لوله‌های ریلی لغزان ساخته شده از مواد مدرج تابعی محوری را بررسی کردند [۳۰].

در پژوهش‌های پیشین عموماً فرکانس‌های طبیعی، پایداری استاتیکی، پایداری دینامیکی تاریخچه‌ی زمانی در تیرهای تیموشنکو مدرج تابعی بررسی شده است. در مقاله‌ی مذکور، با رویکرد جدید و با بهره‌مندی از تحقیقات گذشته، پایداری دینامیکی تیر اولر-برنولی مدرج تابعی بر مبنای تئوری بولوتین بررسی می‌شود. روش بولوتین روشی مبتنی بر تحلیل فرکانسی است و در این روش با استفاده از پاسخ سری زمانی مرزهای نواحی پایداری و ناپایداری دینامیکی بررسی می‌شود. برای محاسبه ماتریس‌های سفتی از روش نیمه تحلیلی ریتز با چند جمله‌ای چبیشف بهره گرفته می‌شود. روش فوق سرعت همگرایی بالایی دارد و برنامه نویسی و استخراج ماتریس به وسیله کدنویسی در نرم افزار متلب<sup>۳</sup> با سرعت بالاتر امکان پذیر است. برای مدل‌سازی مصالح مدرج تابعی نیز از الگوی اختلاط خطی کسر حجمی استفاده می‌شود. در تحقیقات پیشین، اثر تغییرات ممان اینرسی بر طبق توابع توانی لحاظ شده است. در این مقاله تغییرات ممان اینرسی و سطح مقطع بر مبنای توابع نمایی معادل می‌شود.

## ۲- مدل سازی و تعریف مسئله

مطابق شکل (۱) تیری با مقطع متغیر و مصالح مدرج تابعی با مشخصات گشتاور دوم سطح  $I(x)$ ، ضریب ارتجاعی  $E(x)$ ، جرم واحد طول  $\rho(x)A(x)$ ، طول  $L$ ، سطح مقطع  $A(x)$  و جرم مخصوص  $\rho(x)$  در نظر گرفته می‌شود. بار محوری متناوب  $P$  به صورت مجموع بارمحوری هارمونیک و استاتیکی نوشته می‌شود.



شکل ۱ تیری با مقطع متغیر و مصالح مدرج تابعی تحت بارمحوری متناوب

جی<sup>۱</sup> برای حل معادله دیفرانسیل استفاده کردند [۲۳]. علی مرادزاده و همکاران به مطالعه پایداری دینامیکی تیر مدرج تابعی بر بستر غیرخطی تحت بار متحرک پرداختند. در این پژوهش به طور همزمان اثر بسترخطی، برشی و غیرخطی در معادله دیفرانسیل مدل سازی شده است. محققین، تاثیر همزمان توان ماده تابعی، ضریب بستر خطی-برشی-غیرخطی و سرعت بار متحرک بر بیشینه‌ی تغییر مکان سازه را با استفاده تحلیل تاریخچه‌ی زمانی بررسی کرده اند [۲۴]. اسیری و همکاران به بررسی پایداری دینامیکی تیرهای ویسکوالاستیک ضخیم مدرج تابعی تحت بار پالس دینامیکی برای شرایط مرزی (کنسول، دوسر ساده) پرداختند. در این مطالعه رفتار تیر ویسکوالاستیک مطابق مدل کلوین - وویت<sup>۲</sup> و توزیع ضریب ارتجاعی و وزن مخصوص تیر بر مبنای تابع اختلاط خطی کسر حجمی نوشته شده است. در این پژوهش، از روش تحلیل تاریخچه‌ی زمانی (روش نیومارک) برای حل معادله استفاده شده است. نتایج بیانگر این است که افزایش توان ماده ی تابعی و ضریب ویسکوزیته بی‌بعد باعث افزایش بیشینه‌ی تغییر مکان سازه می‌شود [۲۵]. شارما و همکاران به تجزیه و تحلیل مودال یک تیر مدرج تابعی با عملکرد محوری تحت اثر تغییرات دمایی پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که افزایش توان ماده تابعی و درجه حرارت باعث کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر می‌شود. هم چنین اثر پارامترهای توان ماده تابعی و درجه حرارت به ازاء شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای حالت های مودی مختلف پرداخت شده است. نتایج این تحقیق برای طراحی حسگرهای محیط کابردی است [۲۶]. اکباس به مطالعه ارتعاشات اجباری تیر کنسول تیموشنکو ساخته شده از مواد مدرج تابعی پرداخت. ایشان از روش ریتز برای استخراج ماتریس های سفتی بهره گرفت و از روش شتاب متوسط نیومارک و تحلیل تاریخچه زمانی برای محاسبه حداکثر تغییر مکان تیر استفاده کرده است [۲۷]. آردا و آیدوگو به بررسی ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو - ارنفست مدرج تابعی با روش ریتز پرداختند. اثر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی تیر مقطع مستطیلی با استفاده از مدل تیموشنکو-ارنفتست در نظر گرفته شده است. اثر توان ماده‌ی تابعی در شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی تیر بررسی شده است [۲۸]. سلطانی و آهنیان ارتعاش آزاد و پایداری خمشی-پیچشی تیر جدار نازک ماهیچه‌ای ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار دادند. ایشان پایداری و ارتعاش آزاد را بر پایه مدل ولاسو

<sup>3</sup> MATLAB

<sup>1</sup> G-Function

<sup>2</sup> Kelvin-Voigt

$$A(x) = A_0 e^{\frac{ax}{L}} \quad (5)$$

در رابطه فوق  $a$  ضریب مثبت،  $L$  طول عضو،  $I_0$  و  $A_0$  به ترتیب ممان اینرسی و مساحت مقطع بزرگتر در ابتدای تیر هستند [۲۲].

## ۲-۲- استخراج معادله دیفرانسیل حرکت بر مبنای روش همیلتون<sup>۱</sup>

در این بخش با استفاده از روش همیلتون معادله متشکله مجموعه موردنظر استخراج می‌گردد. بدین منظور باید اصل همیلتون برای کارهای جنبشی، خارجی و پتانسیل ناشی از (اینرسی در واحد طول ستون، بار کمانش محوری و انرژی کرنشی ستون) نوشته شود.

مطابق تئوری تیر اولر - برنولی، فرضیه‌های ذیل برقرار می‌باشند. الف) سطح مقطع تیر مدرج تابعی بعد از تغییر شکل مسطح باقی می‌ماند. یعنی تیر، دارای یک تغییر مکان در پلان  $x - z$  و یک دوران حول محور  $y$  است.

ب) از اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی در پلان  $x - z$  صرف نظر می‌شود.

ج) زاویه دوران کوچک بوده به گونه‌ای که فرضیه زوایای کوچک صادق است. بدین ترتیب برای تیر اولر - برنولی میدان‌های جابجایی به صورت زیر تعریف می‌گردد [۳۱].

$$\phi(x, z, t) = -z \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (6)$$

$$u(x, z, t) = u(x, t) \quad (7)$$

در رابطه‌ی فوق فرض می‌گردد که محورهای  $x$  و  $z$  به ترتیب در جهت طول و ضخامت هستند و  $z$  نسبت به تار خنثی اندازه گیری می‌شود.  $u$  معرف جابجایی عرضی تیر است. کرنش عرضی بر حسب جابجایی عرضی به صورت رابطه‌ی زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{zz}(x, z) = \gamma_{xz}(x, z) = 0 \quad (9)$$

در رابطه (۸)  $\varepsilon_{xx}$  بیانگر کرنش نرمال ایجاد شده در تیر است. با استفاده از اصل حساب تغییرات، تغییر در کار ناشی از انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شود.

## ۲-۱- توزیع ضریب ارتجاعی، جرم واحد طول و مقطع متغیر در مواد مدرج تابعی

در این تحقیق یک تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. تیر مذکور ترکیبی از فلز و سرامیک است. خواص مواد در جهت طولی عضو به طور پیوسته و تدریجی از خواص کاملاً سرامیکی (زیرکونیا) در انتهای چپ به خواص کاملاً فلزی (آلومینیوم) در سمت راست تغییر می‌کند. ضمناً جنس مصالح تیر در راستای ضخامت ثابت فرض می‌شود. فرض بر این است که توزیع خواص مواد از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد پیروی می‌کند و بر اساس تابع توزیع توانی در طول تغییر می‌کند. هم چنین ضریب پواسون به علت تغییرات ناچیز در مواد مهندسی ثابت در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین توزیع خواص ماده مدرج تابعی شامل ضریب ارتجاعی و جرم واحد حجم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$E(x) = E_Z + (E_A - E_Z) \left(\frac{x}{L}\right)^m \quad (1)$$

$$\rho(x) = \rho_Z + (\rho_A - \rho_Z) \left(\frac{x}{L}\right)^m \quad (2)$$

$m$  عددی مثبت و حقیقی است که شاخص ناهمگنی ماده نام دارد. ضریب مذکور، چگونگی ترکیب کسر حجمی سرامیک و آلومینیوم را در امتداد طول عضو مشخص می‌کند. با افزایش مقدار شاخص مذکور، میزان سرامیک در ترکیب افزایش پیدا می‌کند. توصیه شده است که مقدار آن در بازه  $\frac{1}{3} \leq m \leq 3$  در نظر گرفته شود. زیر نویس های  $A$  و  $Z$  به ترتیب به خواص فلز و سرامیک اشاره می‌کند و مقدار مرتبط با ضریب ارتجاعی و چگالی هر یک به صورت زیر است [۱۷].

$$\text{ZrO}_2 \cdot E_Z = 200 \text{Gpa} \cdot \rho_Z = 5700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (3)$$

$$\text{Al} \cdot E_A = 70 \text{Gpa} \cdot \rho_A = 2702 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

ممان اینرسی مقطع و مساحت مقطع ماده، تابعی در جهت طولی هستند و با فرض آن که این خواص به صورت تابع‌نمایی تغییر کنند، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$I(x) = I_0 e^{\frac{ax}{L}} \quad (4)$$

<sup>1</sup> Hamilton

با اعمال عملگر تغییرات و انتگرال گیری جزء به جزء، تغییر در کار ناشی از بار کمانش محوری به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\delta V = - \int_0^{t_f} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_0^L dt + \int_0^L \left[ \int_0^{t_f} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u dt \right] dx \quad (16)$$

در رابطه (۱۶)،  $P_s$  و  $P_d$  و  $\Omega$  به ترتیب معرف متغیر ضریب بار دینامیکی، ضریب بار استاتیکی و فرکانس تحریک است. با استفاده از حساب تغییرات و اصل بقای انرژی و اعمال شرایط مرزی طبیعی و زمانی، روابط زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \delta \pi &= \delta T - \delta U - \delta V \\ &= - \int_0^{t_f} \int_0^L \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \delta u dx dt \\ &+ \int_0^L \rho(x)A(x) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \right]_0^{t_f} dx \\ &- \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \delta u - E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right\}_0^L dt \\ &+ \int_0^{t_f} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_0^L dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین معادله (۱۷) شامل دو بخش است. در بخش اول معادله دیفرانسیل حاکم بر عضو و در بخش دوم شرایط مرزی مسئله استخراج شده است. شرایط مسئله باتوجه به نوع آن (گیردار - آزاد - مفصلی) در تابع شکل اعمال می‌شود. معادله دیفرانسیل طبق رابطه زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

معادلات شرایط مرزی هندسی و زمانی در روابط (۱۲)، (۱۴) و (۱۶) با توجه به شرایط انتهایی تیر ارضاء می‌شوند؛ به طور مثال

$$\delta U = \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L \int_0^A \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} dA dx \right] dt \quad (10)$$

که  $t_f$  زمان نهایی است. روابط تنش- کرنش مطابق قانون هوک به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \quad (11)$$

با جایگذاری معادلات (۸) و (۱۱) در رابطه‌ی (۱۰) و انتگرال-گیری جزء به جزء، انرژی کرنشی تیر به صورت رابطه‌ی (۱۲) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta U &= - \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right] dt \\ &= \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \delta u - E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right\}_0^L dt \\ &- \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \delta u dx \right] dt \end{aligned} \quad (12)$$

کار جنبشی ناشی از اینرسی در طول واحد ستون به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$T = \int_0^L \left[ \int_0^{t_f} \frac{1}{2} \rho(x)A(x) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right] dx \quad (13)$$

با اعمال عملگر تغییرات و انتگرال گیری جزء به جزء، تغییر در انرژی جنبشی به صورت رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_0^L \rho(x)A(x) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \right]_0^{t_f} dx \\ &- \int_0^L \left[ \int_0^{t_f} \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dt \right] dx \end{aligned} \quad (14)$$

کار ناشی از نیروی خارجی بار کمانش محوری به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^{t_f} \left[ \int_0^L \frac{1}{2} (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] dt \end{aligned} \quad (15)$$

در بخش قبل معادله حاکم بر مجموعه (۸) ارائه شد. در این بخش با استفاده از روش نیمه تحلیلی ریتز معادله مذکور بررسی می‌شود. بدین منظور لازم است که ابتدا شکل ضعیف معادله تشکیل شود. در گام بعدی، از سری‌های چندجمله‌ای چبیشف برای استخراج ماتریس‌های عضو استفاده می‌گردند.

### ۲-۵- شکل ضعیف‌شده معادله متشکله

در پژوهش حاضر از روش ریتز برای حل معادله متشکله استفاده می‌شود. در این روش، تابع باقیمانده  $R(x, t)$  در تابع وزنی  $v(x, t)$  ضرب شده و از حاصل آن انتگرال‌گیری می‌شود. پاسخ به صورت معادله نمایش داده می‌شود. در این رابطه تابع وزن  $v(x, t)$  است که باید نسبت به  $x$  حداقل دوبار مشتق پذیر باشد.

$$\int_0^L v(x, t) R(x, t) dx$$

$$R(x, t) = E(x)I(x) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} T(t) + \rho(x)A(x)w(x) \left( \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \right) + P_{cr}(\eta + \mu \cos(\Omega t)) \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) T(t) \quad (24)$$

معادله (۲۴) دو بار انتگرال‌گیری جز به جز گردیده تا دو مرتبه مشتق‌گیری با تابع وزن  $v(x)$  مبادله گردد و دو مرتبه مشتق‌گیری روی متغیر وابسته  $w(x)$  باقی بماند. در نهایت شکل ضعیف معادله به شکل رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\Psi = \int_0^L [E(x)I(x) \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right) T(t) - P_{cr} \left( \eta + \mu \cos(\Omega t) \right) \left( \frac{dv}{dx} \right) \left( \frac{dw}{dx} \right) T(t) + \rho(x)A(x)w(x)v(x) \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right)] dx = 0 \quad (25)$$

رابطه (۲۵) شکل ضعیف رابطه (۲۴) را نشان می‌دهد.

برای حل معادله (۲۵) باید معادله تغییر مکان عرضی را حدس زد به طوری که شرایط مرزی را ارضا کند. در مقاله حاضر از سری‌های چندجمله‌ای چبیشف به عنوان تابع تغییر مکان عرضی استفاده می‌شود.

$$w(x) = f(x) \sum_{j=1}^n C_j A_{j-1}(x) \quad (26)$$

با دو تکیه‌گاه ساده انتهایی (شکل ۱) طبق روابط زیر برای شرایط مرزی و زمانی حاصل شده‌اند:

$$M(x=0) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = 0$$

$$M(x=L) = \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} \quad (19)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = u(x, 0) = u(x, t_f) = 0$$

### ۲-۳- معادله دیفرانسیل تیر با مقطع متغیر و مصالح مدرج تابعی

معادله دیفرانسیل تیر موردنظر با اثر انرژی کرنشی، جرم در واحد طول و بارمحوری دینامیکی بر مبنای روش همپلتون به صورت زیر بیان می‌شود.  $u(x, t)$  برابر با خیز جانبی تیر موردنظر است.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \rho(x)A(x) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + (P_s + P_d \cos(\Omega t)) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (20)$$

رابطه  $P = P_s + P_d \cos(\Omega t)$  به صورت زیر بیان می‌شود.

$$P = \eta + \mu \cos(\Omega t) \quad (21)$$

در رابطه فوق  $\eta = \frac{P_s}{P_{cr}}$  و  $\mu = \frac{P_d}{P_{cr}}$  است.

$\eta$  و  $\mu$  و  $P_d$  و  $P_s$  و  $P_{cr}$  به ترتیب معرف متغیر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد، ضریب بار استاتیکی بی‌بعد، ضریب بار دینامیکی، ضریب بار استاتیکی و ظرفیت بار کمانشی است.

$$u(x, t) = w(x) \times T(t) \quad (22)$$

پارامتر خیز جانبی  $u(x, t)$  تیر مطابق اصل جداسازی متغیرها، به صورت ضرب  $w(x)$  (پارامتر تابع شکل) در  $T(t)$  (پارامتر تابع زمانی) در نظر گرفته می‌شود.

با جایگذاری معادله‌های (۲۱) و (۲۲) در معادله (۲۰)، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$E(x)I(x) \frac{d^4 w}{dx^4} T(t) + \rho(x)A(x)w(x) \left( \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \right) + P_{cr}(\eta + \mu \cos(\Omega t)) \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right) T(t) = 0 \quad (23)$$

### ۲-۴- حل معادله با روش ریتز

با جای گذاری رابطه (۳۱) در رابطه (۲۵)، در نهایت معادله هدف به صورت رابطه (۳۲) نوشته می شود. از معادله بولوتین به عنوان تابع پیشنهادی برای بررسی پایداری دینامیکی تیر استفاده می شود. در رابطه زیر  $\Omega$  معرف فرکانس تحریک و  $a_k$  و  $b_k$  ضرایب بسط هستند [۶].

$$T(t) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} [a_k \sin\left(\frac{k\Omega t}{2}\right) + b_k \cos\left(\frac{k\Omega t}{2}\right)] \quad (32)$$

رابطه (۳۳) در معادله (۳۲) جای گذاری می شود و در نهایت رابطه مورد نظر به صورت زیر بیان می شود [۲۵].

$$([K_S] - P_{cr} \left(\eta \pm \frac{\mu}{2}\right) [K_G] - \frac{\Omega^2}{4} [M]) \{c\} = 0 \quad (33)$$

رابطه (۳۴)، رابطه مورد نظر برای محاسبه مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد است. رابطه مذکور از نوع مقدار ویژه است. برای حل لازم است از روش های ریشه یابی نیمه تحلیلی استفاده شود.

$$\left| [K_S] - P_{cr} \left(\eta \pm \frac{\mu}{2}\right) [K_G] - \frac{\Omega^2}{4} [M] \right| = 0 \quad (34)$$

چنانچه در رابطه (۳۵) اثر ضریب بار دینامیکی  $\mu$  صفر منظور گردد. رابطه مورد نظر برای محاسبه بار کمانشی استاتیکی تیر به دست می آید.

$$|K_S - P_{cr} K_G| = 0 \quad (35)$$

چنانچه در رابطه (۳۲) به جای تابع پیشنهادی بولوتین از معادله (۳۷) بعنوان پاسخ هارمونیک تیر استفاده شود. معادله (۳۸)، رابطه بدست آمده برای محاسبه فرکانس طبیعی تیر می باشد.

$$T(t) = e^{i\omega t} \quad (36)$$

$$|K_S - \omega^2 M| = 0 \quad (37)$$

برای ساده سازی روابط از بی بعد سازی متغیرها استفاده می شود.  $\bar{\Omega}$  و  $\bar{P}_{cr}$  و  $\bar{\omega}$  به ترتیب معرف فرکانس تحریک بی بعد، ضریب بار کمانشی بی بعد و فرکانس طبیعی بی بعد هستند.

$$\bar{\Omega} = \Omega \sqrt{\frac{\rho_Z A_0 L^4}{E_Z I_0}} \cdot \bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} L^2}{E_Z I_0} \quad (38)$$

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho_Z A_0 L^4}{E_Z I_0}}$$

$$f(x) = \prod_{m=1}^{n_1} (x_m - x)^{n_2}$$

در این رابطه  $C_j$  ماتریس بردار ویژه،  $n$  تعداد جملات سری،  $n_1$  تعداد تکیه گاه ها در طول تیر،  $x_m$  فاصله ی تکیه گاه  $m$  ام از ابتدای تیر و  $n_2$  پارامتری وابسته به نوع تکیه گاه است.  $n_2$  برای تکیه گاه ساده  $n_2 = 1$ ، تکیه گاه گیردار  $n_2 = 2$  و برای تکیه گاه آزاد  $n_2 = 0$  است [۱۴].

$$\begin{aligned} A_0(x) &= L \\ A_1(x) &= x \end{aligned} \quad (39)$$

$$A_{j+1} = 2xA_j(x) - A_{j-1}(x) \quad (40)$$

رابطه (۲۸)، رابطه ای بازگشتی بر حسب  $x$  است. جملات بالاتر بر حسب جملات قبلی محاسبه می شوند.

تابع وزن  $v(x)$  نیز برابر تابع تغییر مکان عرضی در نظر گرفته می شود.

$$v(x) = \prod_{m=1}^{n_1} (x_m - x)^{n_2} \sum_{j=1}^n C_j A_{j-1}(x) \quad (41)$$

روش ریتز به صورت رابطه زیر بیان می شود.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c_j} = 0 \quad (42)$$

با جای گذاری روابط (۲۶ و ۲۹) در رابطه (۲۵) و با استفاده از ویژگی روش ریتز (۳۰)، در نهایت ماتریس های سفتی به صورت رابطه زیر نوشته می شوند.

$$K_{ij(S)} = \int_0^L E(x) I(x) \left(\frac{d^2 v_i}{dx^2}\right) \left(\frac{d^2 w_j}{dx^2}\right) dx$$

$$K_{ij(G)} = \int_0^L \left(\frac{dv_i}{dx}\right) \left(\frac{dw_j}{dx}\right) dx \quad (43)$$

$$M_{ij} = \int_0^L (\rho(x) A(x)) v_i w_j dx$$

در رابطه (۳۱)  $K_{ij(S)}$  و  $K_{ij(G)}$  و  $M_{ij}$  به ترتیب معرف ماتریس سفتی مصالح، ماتریس سفتی هندسی و ماتریس جرم تیر می باشد.

$$[M]T(\ddot{t}) + ([K_S] - (\eta + \mu \cos(\Omega t)) P_{cr} [K_G]) T(t) = 0 \quad (44)$$

۳- نتایج و بحث

جدول ۱ مشخصات تیر

L = 1000 mm	طول تیر
b = 200 mm	عرض مقطع
h = 100 mm	ارتفاع مقطع
$A_0 = 2 * 10^4 \text{ mm}^2$	مساحت ابتدایی مقطع
$I_0 = 16.667 * 10^{-6} \text{ mm}^4$	ممان اینرسی ابتدایی مقطع
$\eta = \frac{1}{2}$	ضریب بار استاتیکی بی بعد

رابطه (۳۵) رابطه موردنظر برای محاسبه مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد  $\mu$  است. رابطه فوق یک معادله با مقادیر ویژه است. برای حل این معادله لازم مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد به ازای مقادیر مختلف فرکانس تحریک ریشه یابی شود. بدین منظور از روش ریشه یابی مولر برای حل استفاده می شود. برای دقت در ریشه یابی تأثیر مقادیر فرکانس تحریک بی بعد بر معادله متشکله با گام ۰/۰۱ بررسی می شود.

۳-۱- صحت سنجی نتایج

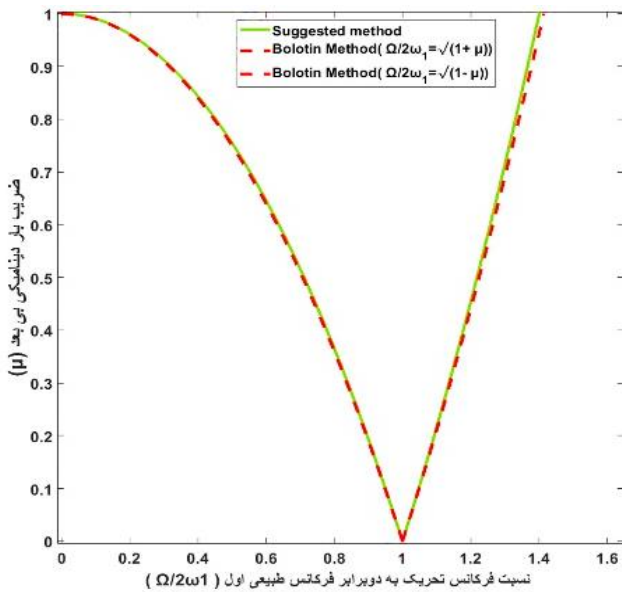
نخست برای صحت سنجی نتایج حاصل از این پژوهش، به مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با مدل های ارائه شده توسط محققین پرداخته می شود. همان طور که بیان شد، در بخشی کتاب از وانگ [۴] پایداری تیرهای الاستیک غیر منشوری بررسی شده است. ایشان با حل تحلیلی معادله دیفرانسیل متشکله، پاسخ دقیقی برای محاسبه بارکمانشی ارائه کرده اند. محاسبه پارامترهای بارکمانشی بی بعد استاتیکی به عنوان فصل مشترک مقاله حاضر و تحقیقات نامبرده تلقی می شود. بدین منظور، از نتایج این تحقیق برای صحت سنجی مقاله حاضر استفاده می شود.

همان طور که اشاره گردید از روش ریتز برای محاسبه تابع شکل معادله استفاده می شود. جهت همگرایی پاسخ ها، معادله تا جملات دهم بررسی می شود. تمامی مراحل فوق به وسیله کدنویسی در نرم افزار متلب انجام می شود. در گام اول، مقدار بارکمانشی استاتیکی محاسبه می گردد. به این صورت که باید ضریب  $\mu$  برابر صفر لحاظ شود و بارکمانشی  $P_{cr}$  مطابق رابطه (۳۵) محاسبه شود. بر مبنای بار کمانشی، مقادیر ضریب بار دینامیکی بی بعد  $\mu$  به ازای فرکانس های تحریک مختلف ریشه یابی می شود.

مشخصات مکانیکی تیر به صورت جدول (۱) فرض می شود. در ادامه با لحاظ مشخصات مکانیکی مذکور برای تیر، تأثیر مقطع متغیر با مصالح مدرج تابعی بر ضریب بار دینامیکی بی بعد بررسی می شود.

جدول ۲ مقادیر بارکمانشی بی بعد و فرکانس طبیعی بی بعد برای تیری با مقطع متغیر تحت شرایط مرزی مختلف

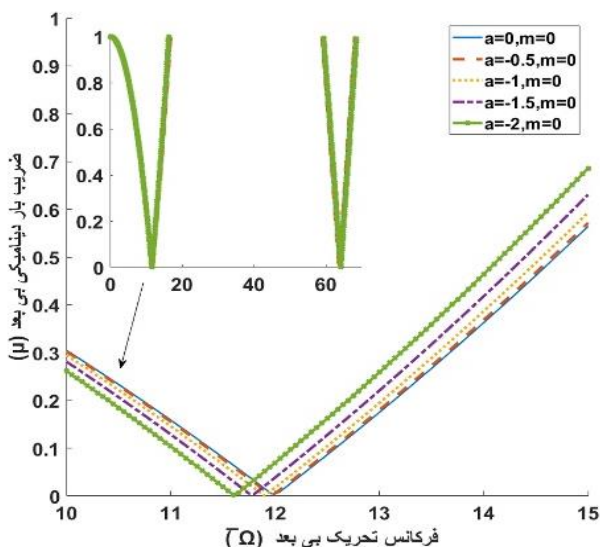
نتایج جدید			سلطانی [۱۷]	نتایج جدید			وانگ، وانگ [۴]	a (ضریب تغییرات سطح مقطع)	شرایط مرزی
$\omega$			$\omega$	$\overline{P}_{cr}$			$\overline{P}_{cr}$		
n=۱۰	n=۵	n=۳	$\omega$	n=۱۰	n=۵	n=۳	$\overline{P}_{cr}$		
۹/۸۴۵	۹/۸۴۵	۹/۸۵۷	۹/۸۴۵	۷/۶۴۳	۷/۶۳۵	۷/۶۷۲	۷/۶۳۴	-۰/۵	
۹/۷۷۳	۹/۷۷۳	۹/۸۱۰	۹/۷۷۳	۵/۸۲۷	۵/۸۲۷	۵/۹۲۸	۵/۸۲۷	-۱	دو سر ساده
۹/۶۵۳	۹/۶۵۳	۹/۷۲۸	۹/۶۵۳	۴/۳۸۹	۴/۳۸۹	۴/۵۴۶	۴/۳۸۹	-۱/۵	
۹/۸۷۰	۹/۸۷۰	۹/۸۷۲	۹/۸۷۰	۹/۸۷۰	۹/۸۷۵	۱۲/۰۰۰	۹/۸۷۰	.	
				۲/۱۱۰	۲/۱۱۲	۲/۱۱۲	۲/۱۱۰	-۰/۵	
				۱/۷۸۲	۱/۷۸۲	۱/۷۸۴	۱/۷۸۲	-۱	گیردار - آزاد
				۱/۴۸۰	۱/۴۸۰	۱/۴۸۷	۱/۴۸۰	-۱/۵	
				۱۵/۶۴۰	۱۵/۶۴۰	۱۵/۶۵۶	۱۵/۶۴۰	-۰/۵	
				۱۱/۹۹۰	۱۱/۹۸۹	۱۲/۰۱۳	۱۱/۹۹۰	-۱	گیردار - ساده
				۹/۰۹۸	۹/۰۹۸	۹/۱۹۷	۹/۰۹۸	-۱/۵	
.	.	۰/۷۷	-	.	۰/۰۹	۱/۰۸	-	-	$\Delta_{max} \%$



شکل ۲ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب نسبت فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی مود اول بی بعد

### ۳-۲- تأثیر مصالح مدرج تابعی $m$ و مقطع متغیر $a$ بر ضریب بار دینامیکی بی بعد $\mu$

در این بخش، تأثیر هم‌زمان مصالح مدرج تابعی و مقطع متغیر بر ضریب بار دینامیکی بی بعد تیری با شرایط مرزی مختلف (گیردار - آزاد)، (گیردار - مفصلی)، (مفصلی - مفصلی) بررسی می‌شود. مقدار ضریب بار استاتیکی بی بعد  $\eta$  در تمامی حالت‌های مختلف برابر  $0.5$  مقدار ضریب  $a$  نیز در حالت‌های  $(2, 1/5, 1)$  و  $(0.5)$  و مقدار پارامتر توان ماده تابعی  $m$  نیز در حالت‌های  $(2, 1)$  و  $(0)$  فرض می‌شود.



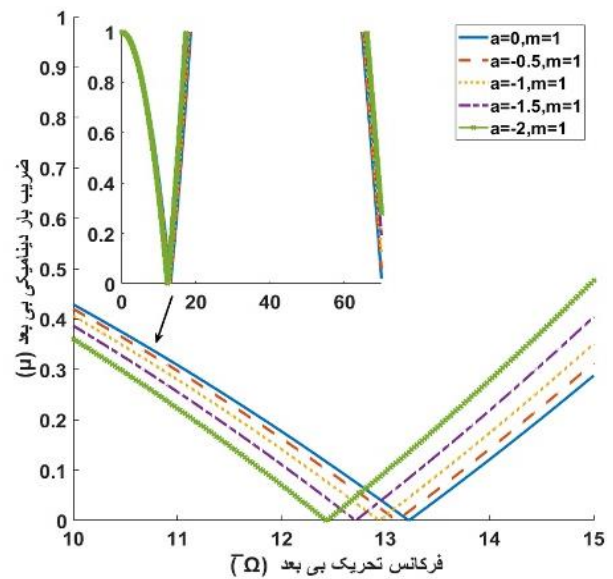
شکل ۳ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب فرکانس تحریک بی بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی دوسر مفصلی،  $m = 0$

مطابق جدول (۲)، مقادیر بار کم‌انرژی بی بعد برای تیری با مقطع متغیر تحت شرایط مرزی مختلف محاسبه می‌شود. برای افزایش دقت در محاسبات، معادله متشکله به‌ازای  $10$  جمله بررسی می‌شود. با انتخاب جملات مراتب بالاتر مشخص است که مقادیر این پارامتر در مقاله حاضر با مقاله ی پیشین منطبق می‌شود. هم چنین مطابق جدول (۲)، مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد نیز در تیر با مقطع متغیر برای شرایط مرزی دو سر ساده محاسبه می‌شود. مشخص است مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد در روش حاضر و پژوهش سلطانی و عسگریان [۱۷] تطابق قابل قبولی دارد. در بخشی دیگر از صحت سنجی، نتایج تحقیق حاضر با نتایج پژوهش بولوتین [۶] مقایسه می‌شود. همان‌طور که بیان شد. در بخشی از کتاب بولوتین، پایداری دینامیکی تیری منشوری تنها با اثر جرم در واحد طول به روش تحلیلی بررسی شده است. محقق از روش تحلیلی برای حل معادله دیفرانسیل حاکم استفاده کرده است. درحالی‌که در پژوهش حاضر، پایداری دینامیکی تیر غیرمحملی غیر منشوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بار متناوب به روش ریتز بررسی می‌شود. برای صحت سنجی پژوهش حاضر با مدل بولوتین باید اثر مقطع غیر منشوری و مصالح مدرج تابعی نادیده گرفته شود و رفتار دینامیکی تیری منشوری تنها به‌ازای شرایط (مرزی مفصلی-مفصلی) و  $\eta = 0$  (ضریب بار استاتیکی بی بعد) بررسی شود. شکل (۲) نمودار تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد تیری مفصلی-مفصلی را بر حسب نسبت فرکانسی (فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی) بی بعد نمایش می‌دهد. محقق رابطه (۴۰) را برای محاسبه ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب نسبت فرکانسی ارائه کرده است.  $k$ ، پارامتری مربوط به مود فرکانس است.

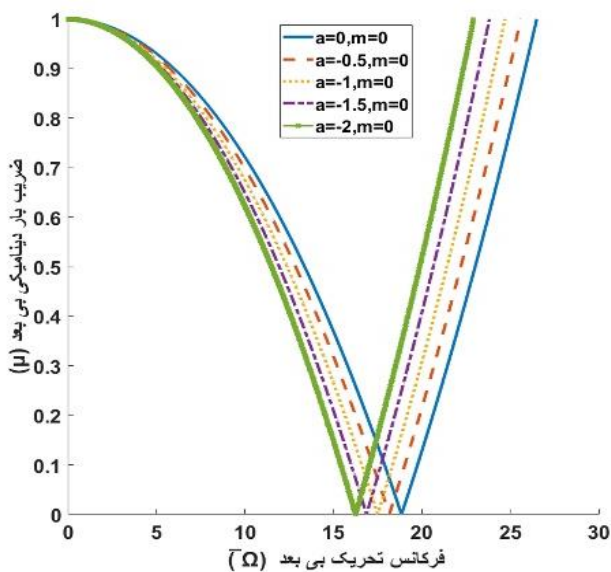
$$\frac{\Omega}{2\omega_k} = \frac{\sqrt{1 \pm \mu}}{k} \quad (40)$$

در شکل (۲) تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب نسبت فرکانسی بی بعد تیری با شرایط مرزی مفصلی - مفصلی تنها با اثر جرم واحد طول ترسیم می‌شود. باتوجه به شکل مشخص می‌شود. اگر مقدار نسبت بی بعد فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی مود اول برابر  $1 = \frac{\Omega}{2\omega_k}$  باشد. در این صورت ضریب پایداری دینامیکی برابر صفر است. این وضعیت که وضعیت تشدید نام دارد. در این حالت، مجموعه دچار وضعیت ناپایداری دینامیکی می‌گردد. در صورتیکه مقدار نسبت فرکانسی بی بعد برای صفر لحاظ گردد. مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد برابر  $1$  می‌گردد. شکل (۲) مبین این است که نتایج تحقیق حاضر با نتایج تحقیق پیشین هم خوانی دارد.

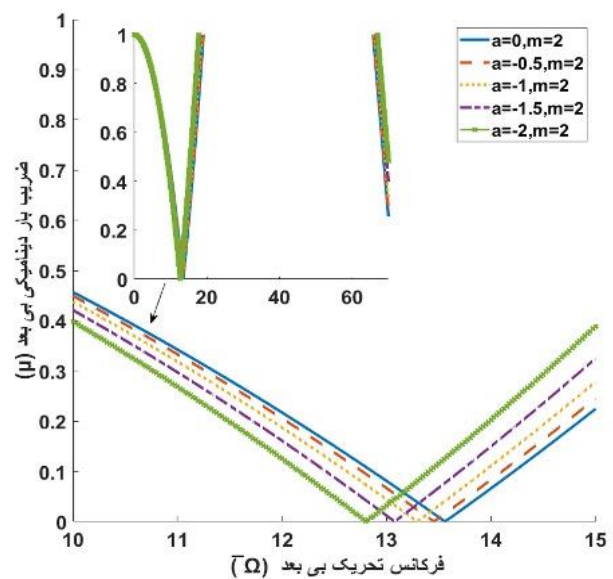
سمت چپ محور منتقل می‌شود. در واقع افزایش پارامتر مذکور منجر به کاهش صلبیت خمشی تیر می‌شود؛ کاهش صلبیت خمشی سبب می‌شود که فرکانس تشدید به‌ازای مقدار کوچک‌تری رخ دهد. از طرفی افزایش پارامتر توان ماده تابعی  $m$  نیز منجر می‌شود که تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به سمت راست محور منتقل شود. در واقع با افزایش پارامتر مذکور، میزان سرامیک (زیرکونیا) در طرح اختلاط ماده‌ی تابعی افزایش می‌شود و این منجر به افزایش سفتی ماده‌ی سازنده می‌شود. به همین دلیل تغییرات ضریب بار دینامیکی با افزایش پارامتر  $m$  به سمت راست متمایل می‌شود.



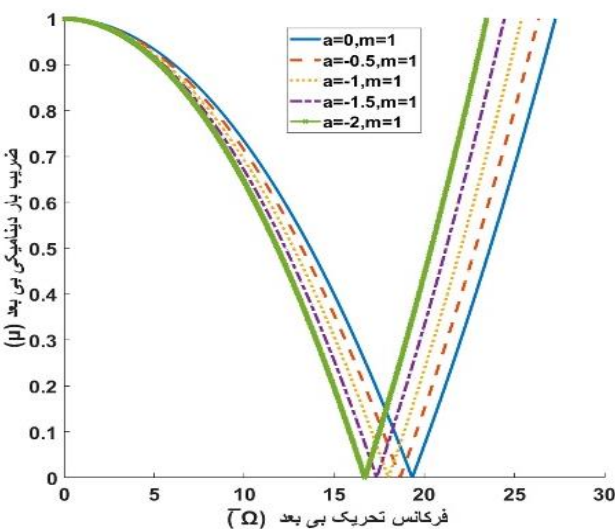
شکل ۴ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی دوسر مفصلی،  $m = 1$



شکل ۶ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - مفصلی،  $m = 0$

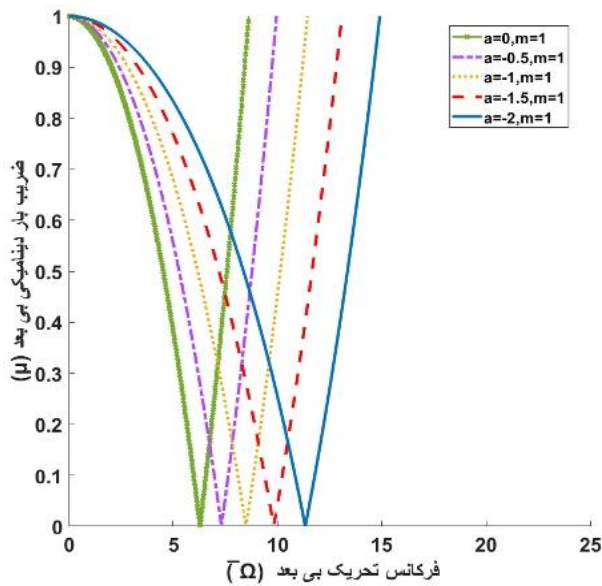


شکل ۵ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی دوسر مفصلی،  $m = 2$

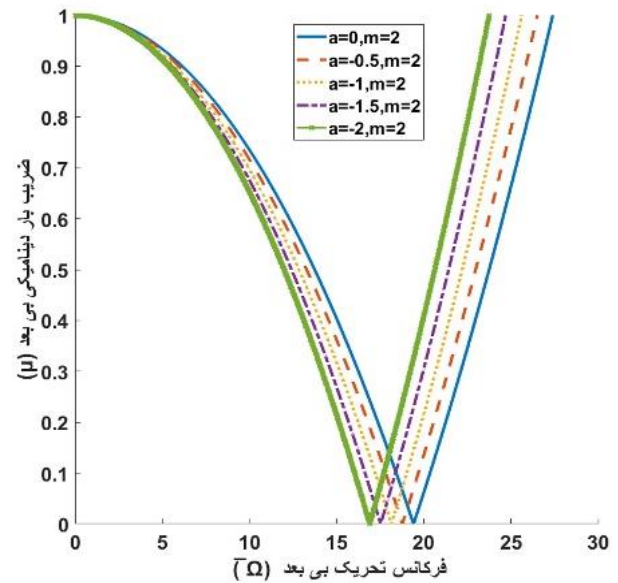


شکل ۷ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - مفصلی،  $m = 1$

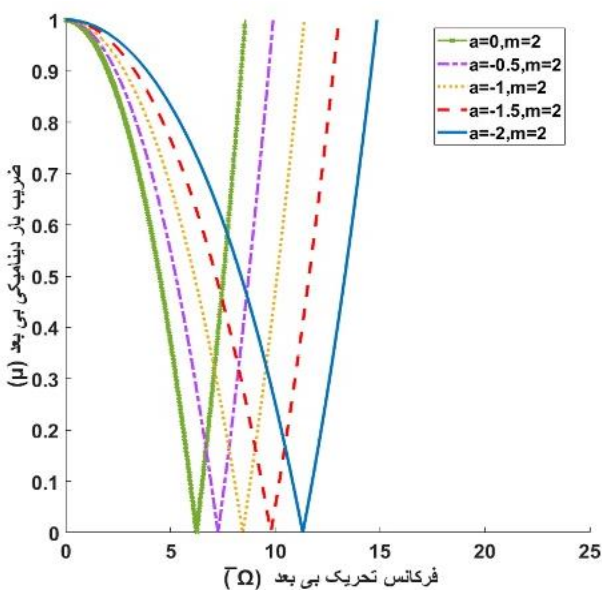
مطابق با شکل‌های (۳)، (۴) و (۵) مشخص است که تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد در تمام حالت‌های مختلف به‌صورت تابع قدرمطلق است. در نقطه خاصی (نقطه تکنینی) مقدار ضریب بار دینامیکی برابر صفر است. این نقطه خاص در بحث پایداری، فرکانس تشدید نام دارد. در واقع تیر تحت باری با مقدار فرکانس تشدید ناپایدار می‌گردد. اگر شرایط مرزی تکیه‌گاهی دو سر مفصلی در نظر گرفته شود. با افزایش ضریب تغییرات سطح مقطع و ممان اینرسی  $a$ ، تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد به



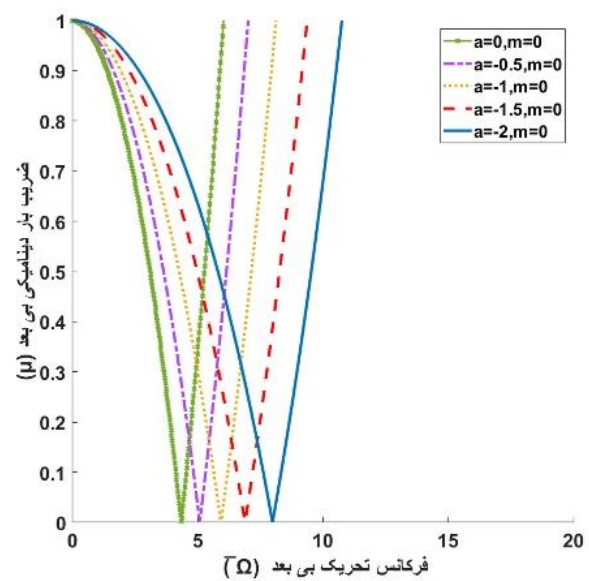
شکل ۱۰ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - آزاد،  $m = 1$



شکل ۸ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - مفصلی،  $m = 2$



شکل ۱۱ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - آزاد،  $m = 2$



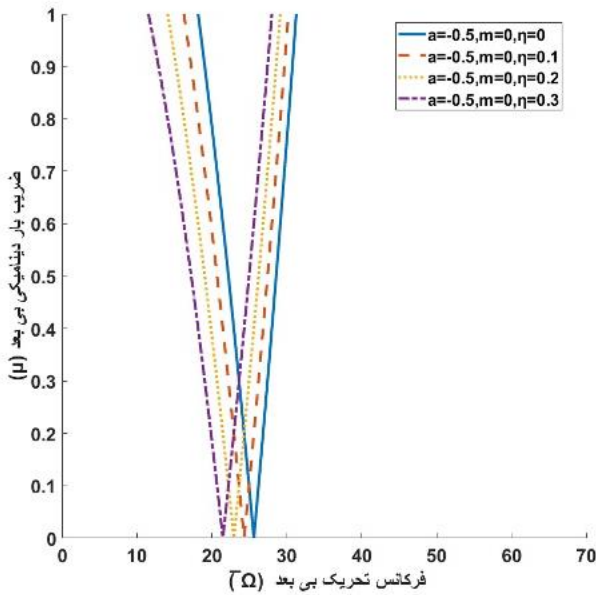
شکل ۹ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - آزاد،  $m = 0$

### ۳-۳- تأثیر ضریب بار استاتیکی بی‌بعد $\eta$ بر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد $\mu$

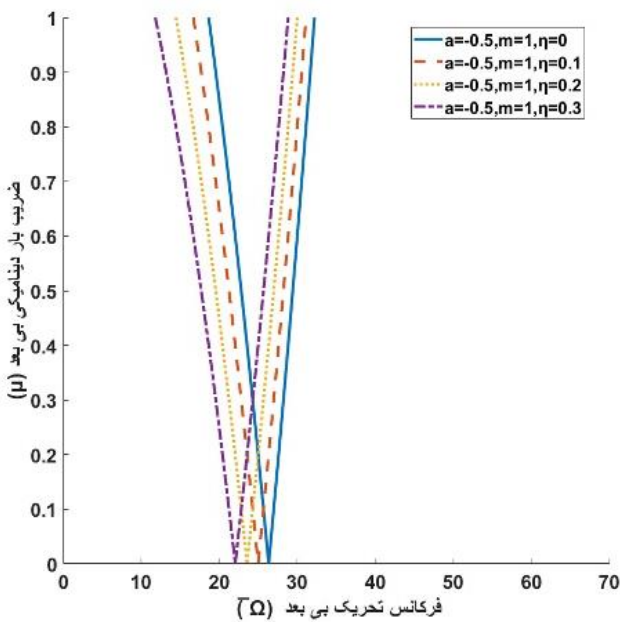
در این بخش، تأثیر ضریب بار استاتیکی بی‌بعد  $\eta$  بر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد تیری با شرایط مرزی مختلف (گیردار-آزاد)، (گیردار-مفصلی)، (مفصلی-مفصلی) بررسی می‌شود. مقدار ضریب بار استاتیکی بی‌بعد در تمامی حالت‌های مورد بررسی

مطابق با شکل‌های (۶)، (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) و (۱۱) مشخص است برای شرایط مرزی گیردار-مفصلی و گیردار-آزاد نیز افزایش پارامتر  $a$  به‌عنوان یک عامل کاهنده صلبیت خمشی محسوب شده و سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد در فرکانس‌های کوچک‌تر می‌شود. افزایش پارامتر  $m$  نیز به‌دلیل افزایش خصوصیات زیرکونیا در طرح اختلاط ماده‌ی تابعی، سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی به سمت راست محور می‌شود.

افزایش ضریب بار استاتیکی بی بعد همانند ضریب  $a$  سبب کاهش سفتی تیر می شود. کاهش سفتی تیر سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد به سمت فرکانس تحریک بی بعد کوچک تری می شود. مطابق حالت قبل، افزایش پارامتر  $m$  نیز منجر می شود که تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد تیر به سمت راست محور منتقل شود. زیرا افزایش پارامتر  $m$  باعث افزایش سفتی تیر می شود.

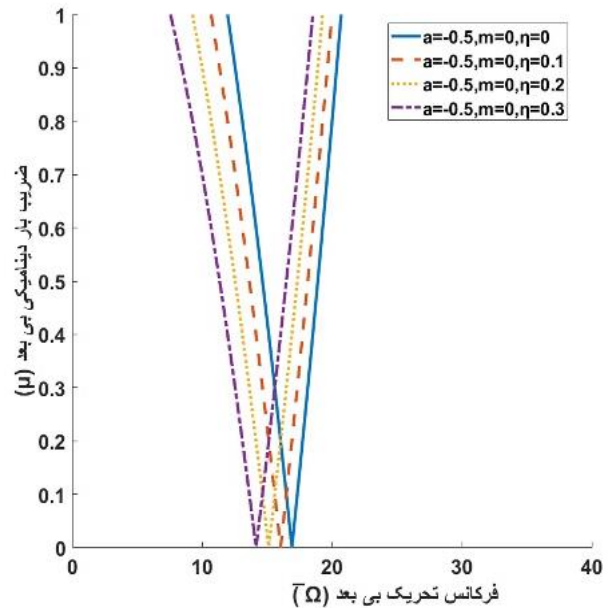


شکل ۱۴ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد برحسب فرکانس تحریک بی بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - مفصلی،  $m = 0$

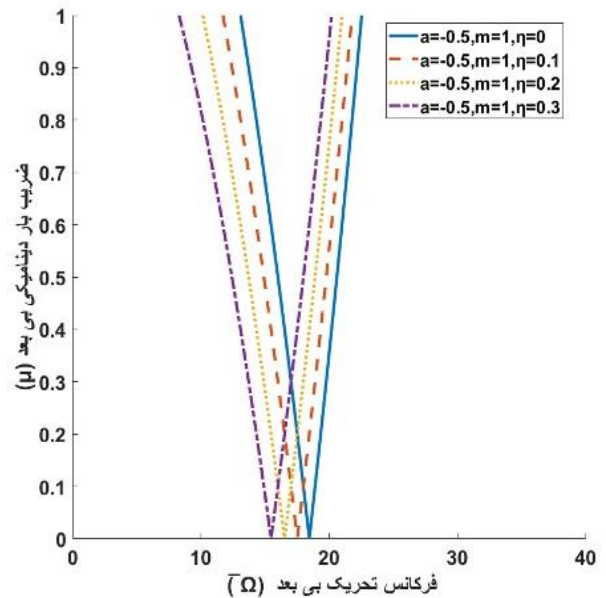


شکل ۱۵ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد برحسب فرکانس تحریک بی بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - مفصلی،  $m = 1$

مقدار  $\eta$  (۰/۳، ۰/۲، ۰/۱ و ۰) مقدار ضریب  $a$  (۰/۵) و مقدار پارامتر  $m$  نیز (۰/۱) فرض می شود.



شکل ۱۲ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد برحسب فرکانس تحریک بی بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی دوسر مفصلی،  $m = 0$



شکل ۱۳ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد برحسب فرکانس تحریک بی بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی دوسر مفصلی،  $m = 1$

مطابق با شکل های (۱۲) و (۱۳) اگر شرایط مرزی تکیه گاهی دو سر مفصلی در نظر گرفته شود، با افزایش ضریب بار استاتیکی بی بعد  $\eta$ ، تغییرات ضریب بار دینامیکی بی بعد بر حسب فرکانس تحریک بی بعد به سمت چپ محور منتقل می شود. در واقع

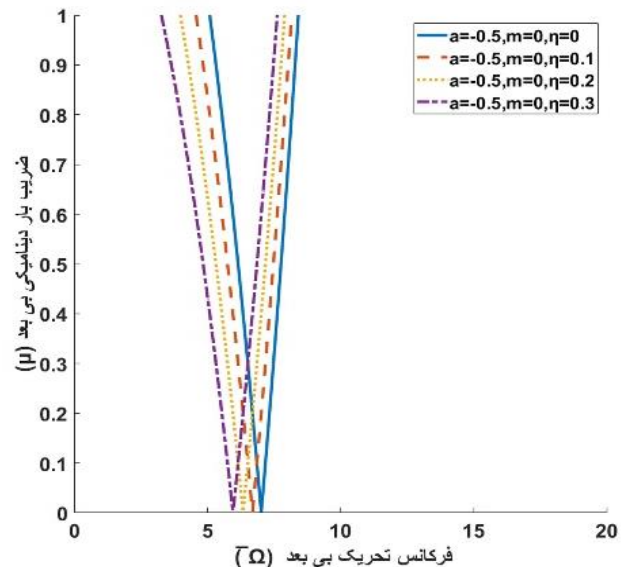
## ۴- نتیجه گیری

در مقاله حاضر بر مبنای روش نیمه تحلیلی ریتز پایداری دینامیکی تیر غیر منشوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بار محوری متناوب بررسی شد. در گام اول، شکل ضعیف معادله دیفرانسیل حاکم نوشته شد. از چند جمله‌های سری چیشیف به‌عنوان تابع تغییر مکان عرضی و از سری فوریه (پیشنهادی بولوتین) به‌عنوان تابع زمانی برای حل معادله استفاده گردید. بر این اساس ماتریس‌های سفتی مصالح، سفتی هندسی و ماتریس جرم استخراج گردید. پس از استخراج ماتریس‌های سفتی مقادیر ویژه (ضریب بار دینامیکی بی‌بعد) معادله بررسی شد. از تکنیک ریشه‌یابی مولر به‌وسیله کدنویسی در نرم‌افزار متلب برای محاسبه مقادیر ویژه استفاده گردید. خلاصه نتایج پژوهش حاضر به شرح ذیل است:

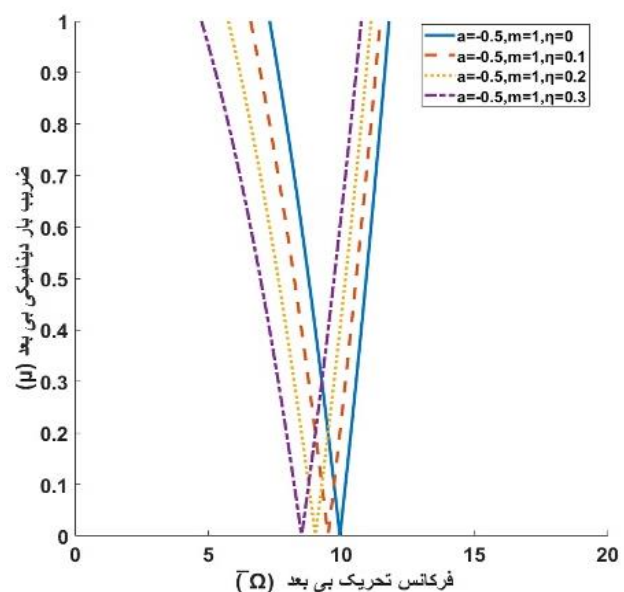
- افزایش ضریب تغییرات سطح مقطع و ممان اینرسی  $a$  در تیر مدرج تابعی با مقطع متغیر نمایی سبب کاهش سفتی تیر می‌شود. کاهش سفتی تیر بر مسیر پایداری دینامیکی اثرگذار بوده و باعث انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به سمت فرکانس‌های کوچک‌تر می‌شود. در واقع به دلیل وجود رابطه‌ی مستقیم بین فرکانس طبیعی و سفتی سازه، با کاهش سفتی سازه فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. از طرفی فرکانس تحریک بی‌بعد به صورت مضربی از فرکانس طبیعی لحاظ می‌گردد. پس کاهش سفتی سازه در نهایت به کاهش فرکانس تحریک بی‌بعد منتج شده و سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی به سمت فرکانس‌های کوچک‌تر می‌شود.

- افزایش پارامتر توان ماده تابعی  $m$  در تیر مدرج تابعی با مقطع نمایی باعث افزایش سفتی تیر می‌شود. بدین صورت که با افزایش پارامتر  $m$  درصد حضور سرامیک (زیرکونیا) در طرح اختلاط ماده‌ی تابعی افزایش می‌یابد و این منجر به افزایش سفتی ماده‌ی سازنده تیر می‌شود. افزایش سفتی سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به سمت فرکانس‌های بزرگ‌تر می‌شود. در واقع به دلیل وجود رابطه‌ی مستقیم بین فرکانس طبیعی و سفتی سازه، با افزایش سفتی سازه فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد. از طرفی فرکانس تحریک بی‌بعد به صورت مضربی از فرکانس طبیعی لحاظ می‌گردد. بنابراین افزایش سفتی سازه در نهایت به افزایش فرکانس تحریک بی‌بعد منتج شده و سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی به سمت فرکانس‌های بزرگ‌تر می‌شود.

- ضریب بار استاتیکی بی‌بعد  $\eta$  به‌عنوان یک پارامتر اثرگذار بر سفتی تیر است. افزایش این پارامتر به دلیل کاهش سفتی تیر،



شکل ۱۶ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - آزاد،  $m = 0$



شکل ۱۷ تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی و مقطع غیر منشوری با شرایط مرزی گیردار - آزاد،  $m = 1$

مطابق با شکل‌های (۱۴)، (۱۵)، (۱۶)، و (۱۷) اگر شرایط مرزی گیردار-مفصلی یا گیردار-آزاد در نظر گرفته شود. افزایش ضریب استاتیکی بی‌بعد، سبب کاهش سفتی تیر شده و همانند تیر دوسر مفصلی، تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به سمت چپ محور منتقل می‌شود. قابل ذکر است که در شرایط مرزی گیردار-مفصلی در مقایسه با شرایط گیردار-آزاد و دوسر مفصلی سفتی بیشتر دارد. به همین دلیل تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد در بازه بیشتری از فرکانس تحریک بی‌بعد رخ می‌دهد.

- under axial loading," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 136, no. 4, pp. 472-476, 2010, doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000096](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000096).
- [8] R. Ansari, R. Gholami, and S. Sahmani, "On the dynamic stability of embedded single-walled carbon nanotubes including thermal environment effects," *Scientia Iranica*, vol. 19, no. 3, pp. 919-925, 2012/06/01/ 2012, doi: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2012.02.013>.
- [9] S. A. M. Ghannadpour, B. Mohammadi, and J. Fazilati, "Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method," *Composite Structures*, vol. 96, pp. 584-589, 2013/02/01/ 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.024>.
- [10] S. Hosseini-Hashemi and R. Nazemnezhad, "An analytical study on the nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams incorporating surface effects," *Composites Part B: Engineering*, vol. 52, pp. 199-206, 2013/09/01/ 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.04.023>.
- [11] H. Kurtaran, "Large displacement static and transient analysis of functionally graded deep curved beams with generalized differential quadrature method," *Composite Structures*, vol. 131, pp. 821-831, 2015/11/01/ 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.06.024>.
- [12] S. Hosseini and O. Rahmani, "Free vibration of shallow and deep curved FG nanobeam via nonlocal Timoshenko curved beam model," *Applied Physics A*, vol. 122, pp. 1-11, 2016, doi: <https://doi.org/10.1007/s00339-016-9696-4>.
- [13] N. Shafiei, M. Kazemi, and M. Ghadiri, "Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams," *International Journal of Engineering Science*, vol. 102, pp. 12-26, 2016/05/01/ 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.02.007>.
- [14] A. Paul and D. Das, "Non-linear thermal post-buckling analysis of FGM Timoshenko beam under non-uniform temperature rise across thickness," *Engineering Science and Technology, an International Journal*, vol. 19, no. 3, pp. 1608-1625, 2016/09/01/ 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2016.05.014>.
- [15] N. Shafiei, M. Kazemi, and M. Ghadiri, "Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams," *International Journal of Engineering Science*, vol. 102, pp. 12-26, 2016/05/01/ 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.02.007>.
- باعث انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به سمت فرکانس‌های کوچک‌تر می‌شود. در واقع به دلیل وجود رابطه‌ی مستقیم بین فرکانس طبیعی و سفتی سازه با کاهش سفتی سازه فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. از طرفی فرکانس تحریک بی‌بعد به صورت مضربی از فرکانس طبیعی لحاظ می‌گردد. پس کاهش سفتی سازه در نهایت به کاهش فرکانس تحریک بی‌بعد منتج شده و سبب انتقال تغییرات ضریب بار دینامیکی به سمت فرکانس‌های کوچک‌تر می‌شود.
- همه نمودارهای ارائه شده در این مقاله بی‌بعد است و می‌تواند ملاک طراحی مهندسان برای طراحی تیرهای مدرج تابعی تحت بار محوری دینامیکی قرار گیرد.
- ### ۵- مراجع
- [1] B. Kieback, A. Neubrand, and H. Riedel, "Processing techniques for functionally graded materials," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, no. 1, pp. 81-106, 2003/12/05/ 2003, doi: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1).
- [2] Y. Fukui, "Fundamental Investigation of Functionally Gradient Material Manufacturing System using Centrifugal Force," *JSME international journal. Ser. 3, Vibration, control engineering, engineering for industry*, vol. 34, no. 1, pp. 144-148, 1991, doi: <https://doi.org/10.1299/jsmec1988.34.144>.
- [3] S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of elastic stability*. Courier Corporation, 2009, [https://books.google.com/books/about/Theory\\_of\\_Elastic\\_Stability.html?id=98B6JOW2HiUC](https://books.google.com/books/about/Theory_of_Elastic_Stability.html?id=98B6JOW2HiUC).
- [4] C. M. Wang and C. Y. Wang, *Exact solutions for buckling of structural members*. CRC press, 2004, <https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.1201/9780203483534/exact-solutions-buckling-structural-members-wang-wang>.
- [5] L. Cedolin, *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific, 2010, <https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/7828>.
- [6] V. V. e. Bolotin, *The Dynamic Stability of Elastic Systems, Volume 1*. Aerospace Corporation, Systems Research and Planning Division, 1962, <https://www.semanticscholar.org/paper/The-Dynamic-Stability-of-Elastic-Systems.-By-V.-V.-Knops-Wilkes/aebec0b495fe1297583c2e598b70912fb6e75184>.
- [7] S. M. Darbandi, R. Firouz-Abadi, and H. Haddadpour, "Buckling of variable section columns

- functionally graded (AFG) beam resting on nonlinear elastic foundation subjected to moving load," *Nonlinear Engineering*, vol. 8, no. 1, pp. 250-260, 2019, doi: <https://doi.org/10.1515/nleng-2018-0051>.
- [25] S. A. Asiri, Ş. D. Akbaş, and M. Eltahir, "Dynamic analysis of layered functionally graded viscoelastic deep beams with different boundary conditions due to a pulse load," *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, no. 05, p. 2050055, 2020, doi: <https://doi.org/10.1142/S1758825120500556>.
- [26] P. Sharma, R. Singh, and M. Hussain, "On modal analysis of axially functionally graded material beam under hygrothermal effect," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 234, no. 5, pp. 1085-1101, 2020, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406219888234>.
- [27] Ş. D. Akbaş, "Forced Vibration Responses of Axially Functionally Graded Beams by using Ritz Method," *Journal of Applied and Computational Mechanics*, vol. 7, no. 1, pp. 109-115, 2021, doi: <https://doi.org/10.22055/jacm.2020.34865.2491>.
- [28] M. Arda and M. Aydogdu, "A Ritz formulation for vibration analysis of axially functionally graded Timoshenko-Ehrenfest beams," *Journal of Computational Applied Mechanics*, vol. 53, no. 1, pp. 102-115, 2022, doi: <https://doi.org/10.22059/jcamech.2022.334062.667>.
- [29] M. Soltani and A. Ahanian, "Free vibration and flexural-torsional stability analyses of axially functionally graded tapered thin-walled beam resting on elastic foundation," *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, vol. 53, no. 6, pp. 3587-3614, 2021, doi: <https://doi.org/10.22060/mej.2021.18445.6816>.
- [30] A. Ebrahimi-Mamaghani, R. Sotudeh-Gharebagh, R. Zarghami, and N. Mostoufi, "Thermo-mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, vol. 50, no. 2, pp. 412-441, 2022, doi: <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1717967>.
- [31] C. Wang, Y. Zhang, and X. He, "Vibration of nonlocal Timoshenko beams," *Nanotechnology*, vol. 18, no. 10, p. 105401, 2007, doi: <https://doi.org/10.1088/0957-4484/18/10/105401>.
- [16] Ş. D. Akbaş, "Forced vibration analysis of functionally graded porous deep beams," *Composite Structures*, vol. 186, pp. 293-302, 2018/02/15/ 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.013>.
- [17] M. Soltani, "Buckling analysis of axially functionally graded beams with variable cross-section," *mdrjms*, vol. 18, no. 3, pp. 87-99, 2018. [Online]. Available: <http://mcej.modares.ac.ir/article-16-20306-fa.html>.
- [18] M. Rezaiee-Pajand, A. R. Masoodi, and A. Alepaighambar, "Lateral-torsional buckling of functionally graded tapered I-beams considering lateral bracing," *Steel and Composite Structures, An International Journal*, vol. 28, no. 4, pp. 403-414, 2018, doi: <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2018.28.4.403>.
- [19] F. Ebrahimi and M. R. Barati, "Buckling analysis of nonlocal strain gradient axially functionally graded nanobeams resting on variable elastic medium," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 232, no. 11, pp. 2067-2078, 2018, doi: <https://doi.org/10.1177/0954406217713518>.
- [20] M. H. Jalaei, A. G. Arani, and H. Tourang, "On the dynamic stability of viscoelastic graphene sheets," *International Journal of Engineering Science*, vol. 132, pp. 16-29, 2018/11/01/ 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jengsci.2018.07.002>.
- [21] K. Zhu and J. Chung, "Vibration and stability analysis of a simply-supported Rayleigh beam with spinning and axial motions," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 66, pp. 362-382, 2019/02/01/ 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.09.021>.
- [22] X. Chen, X. Zhang, Y. Lu, and Y. Li, "Static and dynamic analysis of the postbuckling of bi-directional functionally graded material microbeams," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 151, pp. 424-443, 2019/02/01/ 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.001>.
- [23] D. Cao, B. Wang, W. Hu, and Y. Gao, "Free vibration of axially functionally graded beam," *Mechanics of Functionally Graded Materials and Structures*, 2019, doi: <http://10.5772/intechopen.85835>.
- [24] M. Alimradzadeh, M. Salehi, and S. M. Esfarjani, "Nonlinear dynamic response of an axially