

بررسی مشخصات ارتعاشاتی موتورهای توربین گازی میکروالکترومکانیکی

مهدی هاشمی^۱، محسن اصغری^۲

۱ دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

۲ دانشیار و عضو هیئت علمی دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران، asghari@sharif.edu

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۱/۲۴

چکیده

در این مقاله مشخصات ارتعاشاتی موتورهای توربین گازی میکروالکترومکانیکی که روی یاتاقان‌های لغزشی سرعت بالای گازی قرار گرفته است، به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. برای لحاظ نمودن آثار مربوط به کوچکی مقیاس میکروموتور، از مدل جف کات توسعه یافته براساس تئوری تنش کوپلی استفاده شده است. بدین صورت که ضریب فنریت میکروشفیت براساس تئوری مذکور تعیین و با ضرایب فنریت و میرایی یاتاقان سرعت بالای گازی ترکیب شده است. سپس با نوشتن معادلات حرکت میکروموتور و حل آنها بعد از بی بعد سازی، عباراتی برای فرکانس تشدید، سرعت در آستانه ناپایداری میکروسیستم در حین لنگ زنی و پاسخ آن در اثر وجود نامیزانی در دیسک استخراج شده است. نتایج حاصل از مثال عددی در قالب نمودارهای تغییرات، مبین تأثیر بسزای پارامترهای مختلف از جمله پارامتر بی بعد شده مقیاس طولی و خواص فیزیکی یاتاقان بر مشخصات ارتعاشاتی میکروموتور شامل فرکانس تشدید، سرعت در آستانه ناپایداری و سرعت بحرانی می باشد.

واژگان کلیدی

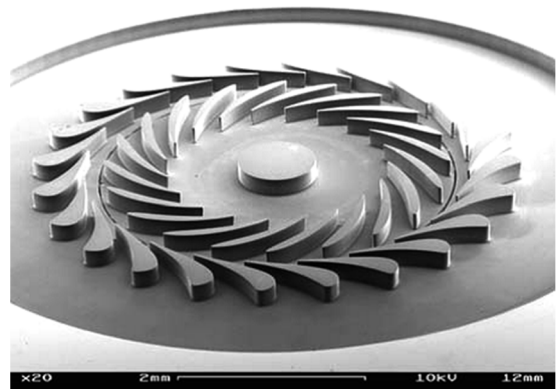
میکروموتور توربین گازی، تئوری محیط پیوسته غیر کلاسیک، تئوری تنش کوپلی، مدل جف کات، مشخصات ارتعاشاتی

۱. مقدمه

میکروالکترومکانیکی، که از توان خروجی در حدود ۱۷ وات برخوردار بود، را طراحی کردند. میکروموتور مذکور که با سوخت هیدروژن کار می کرد، شامل یک میکروشفیت، یک دیسک و پره های حکاکی شده از جنس مواد سیلیسیمی، روی دیسک چرخان و استاتور بود (شکل ۱). همچنین یاتاقان های هیدرواستاتیکی و هیدرودینامیکی تعبیه شده در آن، ضمن کنترل حرکت شعاعی و محوری میکروموتور امکان دستیابی به سرعت های فراتر از یک میلیون دور بر دقیقه را نیز برای مجموعه فراهم می کردند. در واقع این یاتاقان ها خود از سیال های گازی برای روانکاری بهره

امروزه نیاز به دستیابی به منابع انرژی فشرده با چگالی توان بالا، که قادر به راه اندازی وسائل الکترونیکی باشند، منجر به طراحی و توسعه میکرومولدهای توانی شده است. موتورهای توربین گازی میکروالکترومکانیکی یا به طور مختصر میکروموتور نمونه ای از این وسائل مولد انرژی می باشد که ایده اولیه طراحی آن برای نخستین بار توسط یک گروه تحقیقاتی در مؤسسه فناوری مساجوستس^۱ مطرح شد. در این راستا دو تن از استادان این مؤسسه به نام های اپستین و ستوریا^۲ [۱-۳] همراه با گروه تحقیقاتی خود نمونه اولیه این موتورهای توربین گازی

می‌گرفتند. نحوه عملکرد این میکروموتور طراحی شده به طور خلاصه بدین صورت می‌باشد که وقتی میکروموتور با هوای فشرده تغذیه شد، سوخت و هوا وارد کمپرسور شده و ضمن ترکیب با یکدیگر فشرده می‌شوند. سپس در محفظه احتراق شعله‌ور شده و توربین را به حرکت درمی‌آورند. چون توربین به‌طور محوری به کمپرسور متصل است، آن را به حرکت درآورده و چرخه ترمودینامیکی ادامه پیدا می‌کند. همچنین هوای خروجی کمپرسور در اطراف محفظه احتراق پیچیده شده و باعث می‌شود ضمن جذب گرمای اتلافی، دیواره‌های محفظه احتراق خنک‌تر شده و کارایی مجموعه بالاتر رود. در این میکروموتور نیروهای شعاعی تنها توسط یک یاتاقان ژورنال در اطراف کمپرسور مهار می‌شود. این در حالی است که یاتاقان‌های کف‌گرد تعبیه در دو انتهای شفت میکروروتور از طریق تغذیه با منابع هوایی خارجی تحت فشار، نیروی محوری وارده به دیسک را تحمل می‌کنند [۲-۳].



شکل ۱. اولین نمونه از موتور توربین گازی میکروالکترومکانیکی

طراحی شده در مؤسسه فناوری مساجوستس [۳]

طراحی میکروموتورها همانند طراحی انواع توربوماشین‌ها و شاید فراتر از آنها ملاحظات طراحی گوناگون دارد که نیازمند به‌کارگیری دانش‌های گوناگون علم مکانیک می‌باشد. این موارد شامل ملاحظات درخصوص مباحث ترمودینامیک مطرح در میکروموتورها، چگونگی و مکانیزم‌های انتقال حرارت در آن، بحث‌های مربوط به مکانیک سیالات در مقیاس کوچک و تعامل سیال با جامد، ساخت و تولید در ابعاد میکرو، علم مواد و تحلیل‌های سازه‌ای، علم کنترل حرکت و چرخش روتور و دانش دینامیک و ارتعاشات اجسام دوار (روتوردینامیک) می‌باشد. بررسی هر یک از این موارد می‌تواند به‌تنهایی به‌عنوان شاخه‌ای مهم در تدوین دانش فنی طراحی میکروموتورها بسیار مؤثر واقع گردد. در

میان الزامات مطرح‌شده، تحلیل رفتار ارتعاشاتی میکروموتورها یا به‌عبارت دیگر تحلیل روتوردینامیکی این سازه‌های دوار به دلیل سرعت فوق‌العاده بالای کارکردی که می‌تواند به فراتر از یک میلیون دور بر دقیقه برسد، از اهمیت بسزایی برخوردار است. از سوی دیگر، مطالعات و تحقیقات آزمایشگاهی اخیر ثابت کرده است که رفتار مکانیکی سازه‌ها در مقیاس کوچک را نمی‌توان به‌درستی توسط تئوری مکانیک محیط پیوسته کلاسیک پیش‌بینی نمود [۴-۵]. نتایج این تحقیقات به‌صورت متفق‌القولی بیان می‌دارد که تئوری مکانیک محیط پیوسته کلاسیک توانایی پیش‌بینی و تشریح رفتار وابسته به مقیاس در سازه‌های مینیاتوری ساخته‌شده در ابعاد میکرو و کمتر از آن را به‌طور دقیق ندارد. از اینرو، تحلیل دقیق‌تر رفتار مکانیکی میکروموتورها با در نظر گرفتن آثار مربوط به کوچکی اندازه نیازمند آن است که این سازه‌ها را براساس تئوری‌های محیط پیوسته غیرکلاسیک پیشنهادشده مانند تئوری تنش کوپلی مدلسازی نمود. استفاده از تئوری تنش کوپلی برای مطالعه رفتار ارتعاشاتی میکروروتورها برای نخستین‌بار توسط هاشمی و اصغری پیشنهاد شد [۶-۷]. در مقاله مذکور عباراتی تحلیلی براساس روش گلرکین برای فرکانس‌های طبیعی یک میکروروتور شامل یک شفت انعطاف‌پذیر و یک دیسک صلب در وسط آن در دستگاه چرخان ارائه گردید. محدودیت‌های روش تحلیلی پیشنهادی در تحقیق مذکور امکان بررسی جامع خواص ارتعاشاتی از جمله تأثیر یاتاقان بر رفتار ارتعاشاتی، ناپایداری سیستم، پاسخ سیستم در حضور نامیزانی و غیره را فراهم نمی‌کند. با توجه به توضیحات مطرح‌شده توسعه مدلی که ضمن در نظر گرفتن آثار مربوط به کوچکی اندازه میکروموتور، تأثیر یاتاقان‌های سرعت بالای گازی را نیز لحاظ می‌کند، برای مطالعه رفتار روتوردینامیکی این میکروسیستم‌ها ضروری می‌باشد. از اینرو در این مقاله یک مدل جف‌کات مستقر روی یاتاقان‌های گازی سرعت‌بالا که براساس تئوری تنش کوپلی توسعه یافته است، ارائه خواهد شد. برای این منظور در ابتدا ضریب سختی فنریت میکروموتور براساس تئوری مذکور تعیین شده و سپس عباراتی برای ضریب سختی و میرایی یاتاقان هیدرواستاتیکی - هیدرودینامیکی ارائه می‌گردد. بدین ترتیب فرکانس طبیعی، سرعت در آستانه ناپایداری میکروموتور حین لنگ‌زنی و پاسخ سیستم در اثر نامیزانی در دیسک تعیین می‌شود. در مثال‌های عددی نیز تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل پارامتر

بی‌بعدشده مقیاس طولی و خواص یاتاقان بر مشخصات ارتعاشاتی میکروموتور مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲. مدل‌سازی و معادلات حاکم

برای مدل‌سازی رفتار ارتعاشاتی میکروموتور از مدل جف‌کات استفاده خواهد شد. این مدل مطابق شکل ۲، شامل یک دیسک به جرم M_d با خروج از مرکزیت e در زاویه φ_0 که در وسط یک میکروشفست بدون جرم انعطاف‌پذیر به شعاع R_s و طول L در ابعاد میکرو قرار گرفته است، می‌باشد. فرض می‌شود که مجموعه‌ی شفت - دیسک مذکور ضمن دوران با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω ، روی یاتاقان‌هایی یکسان که برای سرعت‌های دورانی بسیار بالا طراحی شده قرار گرفته است. در صورتی که مؤلفه‌های جابه‌جایی در وسط میکروشفست یا خود دیسک نسبت به دستگاه ثابت $X-Y-Z$ در دو راستای Z و Y به ترتیب برابر v_m و w_m باشند، معادلات نظیر حرکت میکروموتور براساس قانون دوم نیوتن به صورت زیر نوشته خواهد شد [۸].

$$M_d \ddot{w}_m + C_{YY} \dot{w}_m + K_{YY} v_m + K_{YZ} w_m = M_d e \Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi_0), \quad (1)$$

$$M_d \ddot{v}_m + C_{ZZ} \dot{v}_m + K_{ZZ} w_m + K_{ZY} v_m = M_d e \Omega^2 \sin(\Omega t - \varphi_0),$$

$$K_{YY} = K_{ZZ} = \frac{2k_b^{hs} k_s}{2k_b^{hs} + k_s}, \quad K_{ZY} = -K_{YZ} = 2k_d^{hd}, \quad (2)$$

$$C_{YY} = C_{ZZ} = 2c_b^{sys}.$$

در رابطه فوق، k_b^{hs} ضریب فنریت هیدرواستاتیکی یاتاقان تحت اختلاف فشار Δp با لقی شعاعی h_b و طول محوری L_b ، k_d^{hd} ضریب فنریت هیدرودینامیکی یاتاقان و c_b^{sys} ضریب میرایی مربوط به یاتاقان با سیال به ویسکوزیته μ_0 می‌باشند که هر یک به ترتیب از رابطه ۳ برای میکروموتور تعیین می‌شوند [۹].

$$k_{ZZ} = k_{YY} = k_b^{hs} \approx 8 \frac{R_s L_b}{h_b} \Delta p, \quad (3)$$

$$k_{ZY} = -k_{YZ} = k_b^{hd} \approx \frac{\mu_0 R_s L_b}{h_b} \left(\frac{L_b^2}{2h_b^2} - \frac{R_s}{h_b} \right) \Omega,$$

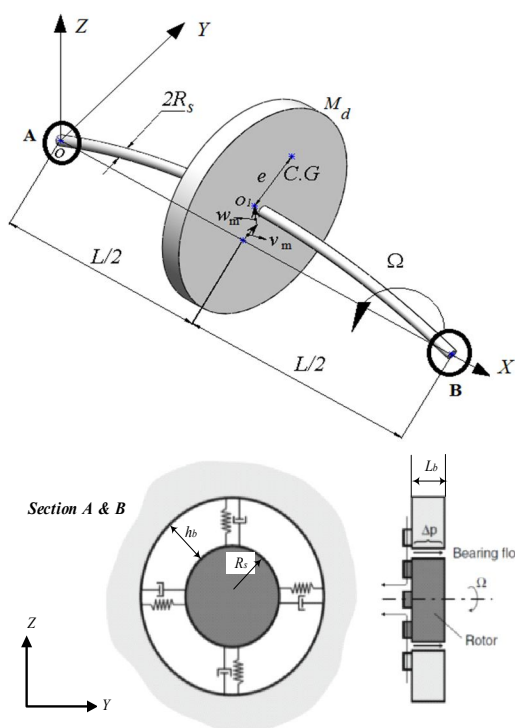
$$c_{ZZ} = c_{YY} = c_b^{sys} \approx \pi \mu_0 R_s \frac{L_b^3}{h_b^3}, \quad c_{ZY} = c_{YZ} \approx 0.$$

همچنین در رابطه ۲، k_s معرف ضریب فنریت میکروشفست در وسط آن است. برای تعیین مقدار k_s باید معکوس میزان جابه‌جایی یک میکروتیر به طول L و ممان سطحی I_s ، مستقر

روی تکیه‌گاه ساده تحت نیرویی واحد در مرکز آن محاسبه گردد. در صورت استفاده از تئوری تنش کوپلی مشابه آنچه در مرجع [۶] اشاره شده است، k_s از رابطه ۴ تعیین خواهد شد.

$$k_s = \frac{48EI_s}{L^3} \left(1 + \frac{2}{1+\nu} \left(\frac{l}{R_s} \right)^2 \right). \quad (4)$$

در رابطه ۴، E معرف مدول یانگ، ν بیانگر نسبت پواسون و پارامتر l با بعد طولی معرف مقیاس طولی ماده به کار رفته در میکروشفست می‌باشد. گفتنی است در مطالعات پیش‌رو از به l/R_s عنوان پارامتر بی‌بعد شده مقیاس طولی استفاده خواهد شد. چنانچه $l/R_s = 0$ باشد، نتایج حاصل به تئوری کلاسیک تقلیل پیدا خواهد کرد.



شکل ۲. مدل جف‌کات

برای میکروموتور قرار گرفته روی یاتاقان‌های سرعت بالای گازی

حال می‌توان با تعریف تابع مختلط $g_m = v_m + jw_m$ ، دو معادله دیفرانسیلی کوپل شده حرکت در رابطه ۱ را به یک معادله دیفرانسیلی مختلط به شرح زیر انتقال داد.

$$M_d \ddot{g}_m + C \dot{g}_m + (K_1 + jK_2 \Omega) g_m = M_d e \Omega^2 e^{j(\Omega t - \varphi_0)}, \quad (5)$$

$$K_1 + jK_2 \Omega = \frac{2k_b^{hs} k_s}{2k_b^{hs} + k_s} + 2jk_d^{hd}, \quad (6)$$

$$C = C_{YY} = C_{ZZ} = 2c_b^{sys}.$$

۳. تحلیل ارتعاشاتی میکروموتور

تحلیل دینامیکی معادله ۵ را می‌توان با انتقال به حوزه فرکانس از طریق تبدیل لاپلاس مورد بررسی قرار داد. بر این اساس و با فرض عدم وجود نیروهای خارجی، معادله مشخصه برای رفتار روتوردینامیکی میکروموتور مورد نظر به شرح ذیل خواهد شد.

$$M_d s^2 + C s + K_1 + j K_2 \Omega = 0. \quad (7)$$

پاسخ معادله مشخصه قبل را می‌توان از طریق رابطه ۸

محاسبه نمود.

$$s_i = -\frac{C}{2M_d} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{-P + \sqrt{P^2 + \left(\frac{K_2 \Omega}{M_d}\right)^2}} + j \sqrt{P + \sqrt{P^2 + \left(\frac{K_2 \Omega}{M_d}\right)^2}} \right], \quad (8)$$

$$P = \frac{K_1}{M_d} - \left(\frac{C}{2M_d}\right)^2. \quad (9)$$

همان‌گونه که در رابطه ۸ مشاهده می‌شود، مقادیر ویژه حاصله متناسب با سرعت دورانی می‌باشد. علت این امر آن است که ضریب فنریت هیدرودینامیکی متناسب با فرکانس روتور (یا سرعت دورانی میکروروتور) می‌باشد. قسمت موهومی پاسخ مقادیر ویژه در رابطه ۸، معرف فرکانس اصلی و طبیعی میرا شده و بی‌بعد سیستم می‌باشد. یعنی:

$$\bar{\omega}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{P + \sqrt{P^2 + \left(\frac{K_2 \Omega}{M_d}\right)^2}}, \quad (10)$$

فرکانس اصلی و طبیعی میرا شده بی‌بعد سیستم نیز تابعی از سرعت دورانی میکروروتور مورد نظر می‌باشند. حال با فرض میرایی کم یا شرایط زیر بحرانی؛ یعنی $C < 2\sqrt{K_1 M_d}$ و یا ضریب میرایی کمتر از ۱ ($\zeta = C/(2\sqrt{K_1 M_d}) < 1$)، می‌توان این فرکانس طبیعی را از طریق رابطه ۱۱ بعد از انجام عملیات ساده‌سازی تقریب زد.

$$\bar{\omega}_d \approx \sqrt{\frac{K_1}{M_d} + \zeta^2 \Omega^2}, \quad (11)$$

بنابراین در حالت میرایی کم، فرکانس طبیعی اساساً تابعی از سفتی روتور و جرم آن و در سرعت‌های دورانی بالا تابعی از این سرعت دورانی نیز خواهد بود. نکته دیگر آنکه سختی ضربه‌ری سبب می‌شود که فرکانس‌های طبیعی سیستم تابعی از سرعت دورانی باشند. از سوی دیگر برای برقراری پایداری سیستم، مقادیر حقیقی رابطه ۸ باید نامثبت باشد. این امر سبب می‌شود که رابطه

۱۲ نتیجه شود. با حل نامعادله‌ی ۱۲ جهت یافتن حداقل سرعت دورانی Ω_{th} که در آن پایداری سیستم برقرار خواهد شد، رابطه ۱۳ برای آن حاصل خواهد شد.

$$-\frac{C}{2M_d} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{-P + \sqrt{P^2 + \left(\frac{K_2 \Omega}{M_d}\right)^2}} \right] \leq 0 \quad (12)$$

$$\Omega_{th} = \frac{C}{K_2} \sqrt{\frac{K_1}{M_d}}, \quad (13)$$

که در آن، Ω_{th} نیز معرف سرعت (دورانی بی‌بعد شده) در آستانه ناپایداری می‌باشد. چنانچه فرکانس طبیعی میکروروتور بدون در نظر گرفتن میرایی با توجه به رابطه ۱۰ بدون نسبت لنگ‌زنی در این مدل از میکروموتور برابر است با:

$$R = \frac{\Omega_{th}}{\bar{\omega}_n} = \frac{C}{K_2}. \quad (14)$$

همان‌طور که در رابطه ۱۴ مشاهده می‌شود، این نسبت لنگ‌زنی تنها به خواص یاتاقان مورد استفاده بستگی دارد. علاوه بر آن، پاسخ میکروروتور در اثر نامیزانی یا به عبارت دیگر پاسخ رابطه ۵ را می‌توان به سادگی از رابطه ۱۵ محاسبه نمود.

$$g_m = \Lambda e^{j(\Omega t - \varphi_0)}, \quad (15)$$

$$\Lambda = \frac{M_d e \Omega^2}{K_1 - M_d \Omega^2 + j(C + K_2) \Omega}. \quad (16)$$

۴. نتایج عددی

در این قسمت نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشاتی میکروموتور براساس روش و مدل توسعه داده شده در قسمت قبل بر پایه تئوری تنش کوپلی ارائه می‌شود. فرض خواهد شد که نسبت شعاع به طول میکروموتور برابر ۱ به ۲۰ یا به عبارت دیگر $R_s/L = 1/20$. همچنین مشخصات هندسی یاتاقان‌های به کار رفته به صورت $L_b/h_b = 10$ و $R_s/h_b = 10$ باشند، مگر آنکه خلاف آن ذکر شود. گفتنی است در ارائه نتایج از پارامترهای بی‌بعد شده ۱۷ استفاده خواهد شد. در این رابطه، κ معرف میزان انعطاف‌پذیری یاتاقان به شفت است. مقادیر بالای این نسبت بیانگر نزدیک بودن رفتار یاتاقان به یاتاقان صلب یا انعطاف‌پذیر بودن خود میکروموتور می‌باشد. حال آنکه مقادیر پایین این نسبت معرف انعطاف‌پذیری یاتاقان و صلب بودن میکروموتور می‌باشد. از سوی دیگر، μ^* می‌تواند معرف میزان میرایی در یاتاقان و مؤثر

در سرعت آستانه ناپایداری میکروموتور مورد مطالعه باشد. مقادیر فرض شده برای این دو کمیت به صورت $\kappa=1$ و $\mu^*=1$ می‌باشد، بجز مواردی که خلاف آن اشاره شود.

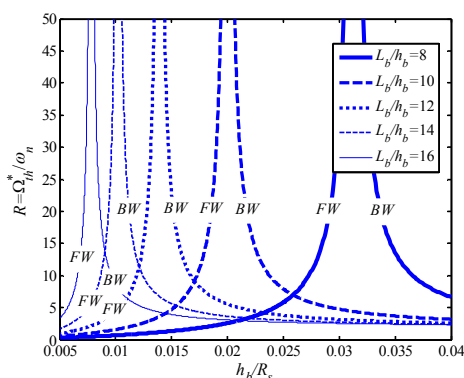
$$\kappa = \frac{\Delta p}{E} \times 10^5, \quad \mu^* = \frac{\mu_0}{\rho_s A_s \bar{\omega}} \times 10^5.$$

$$Z_m = \frac{g_m}{R_s}, \quad \tilde{e} = \frac{e}{R_s}, \quad M_d^* = \frac{M_d}{\rho_s A_s L} \quad (17)$$

$$\bar{\omega} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_s}{\rho_s A_s}}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\bar{\omega}}, \quad \omega = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}},$$

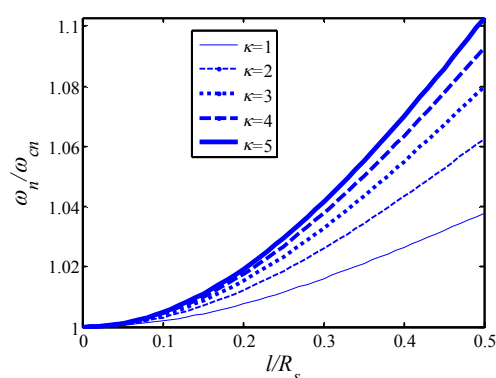
در ابتدا تغییرات مربوط به فرکانس طبیعی بی‌بعد شده اصلی میکروسیستم ω_n براساس تئوری مذکور مورد بررسی قرار خواهد گرفت. برای این منظور، در شکل ۳ تغییرات نسبت فرکانس طبیعی بی‌بعد شده میکروموتور مدلسازی شده براساس تئوری تنش کوپلی به مقادیر متناظر در حالتی که $l/R_s = 0$ ، یا همان ω_n/ω_{cn} ، برحسب پارامتر بی‌بعد شده مقیاس طولی میکروشفیت l/R_s برای نسبت فشارنسبی در یاتاقان به مدول یانگ κ مختلف رسم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر مربوط به l/R_s ، مقدار نسبت فرکانسی ω_n/ω_{cn} افزایش می‌یابد. در واقع اختلاف نتایج فرکانسی مربوط به تئوری غیرکلاسیک محیط پیوسته با تئوری کلاسیک با افزایش پارامتر l/R_s بیشتر می‌شود. نکته قابل توجه دیگر در این نمودارها آن است که مقدار نسبت فرکانسی ω_n/ω_{cn} در مقادیر بالای κ بیشتر می‌شود. در حقیقت با صلب شدن یاتاقان‌ها و یا منعطف پذیر شدن میکروموتور، تفاوت نتایج فرکانسی مربوط به تئوری‌های تنش

کوپلی با تئوری کلاسیک محیط پیوسته بیشتر نمایان خواهد شد. شکل ۴ تغییرات نسبت لنگ‌زنی یا همان نسبت سرعت در آستانه ناپایداری بی‌بعد شده به فرکانس طبیعی بی‌بعد شده را برحسب نسبت لقی شعاعی به شعاع یاتاقان h_b/R_s برای چند مقدار نسبت طول به لقی شعاعی یاتاقان L_b/h_b براساس تئوری تنش کوپلی با $l/R_s = 0.2$ نمایش می‌دهد. این نسبت تعیین‌کننده سرعت ناپایداری حین لنگ‌زنی برحسب فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. همچنین در این شکل FW معرف حرکت لنگ‌زنی پیشرو یا همسو با جهت چرخش میکروموتور و BW معرف حرکت لنگ‌زنی پسرو یا در جهت خلاف چرخش میکروموتور می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، صرف‌نظر از نوع تئوری، در صورتی که $h_b/R_s = 0.5(L_b/R_s)^2$ باشد، نسبت لنگ‌زنی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و بدین ترتیب به دلیل برابر بودن سفتی هیدرودینامیکی در اثر پمپاژ با سفتی هیدرودینامیکی در اثر نیروی درگ ویسکوز، میکروموتور به‌طور خنثی پایدار است. در واقع در چنین حالتی میزان ضریب فنریت جفت‌شده ضربدری، که عامل ناپایدار ساز در مدل جفکات در نظر گرفته شده می‌باشد، از نظر عددی مقدار آن برابر صفر خواهد شد. در حالتی که $h_b/R_s < 0.5(L_b/R_s)^2$ ، برآیند نیروهای هیدرودینامیکی هم‌جهت با جهت چرخش بوده و سبب لنگ‌زنی پیشرو می‌شود. در حالی که وقتی $h_b/R_s > 0.5(L_b/R_s)^2$ ، برآیند نیروهای هیدرودینامیکی در خلاف جهت چرخش بوده و سبب لنگ‌زنی پسرو در میکروموتور می‌شود.



شکل ۴. تغییرات نسبت فرکانس میکروموتور به فرکانس طبیعی آن برحسب نسبت لقی شعاعی به شعاع یاتاقان برای مقادیر مختلف نسبت طول به لقی شعاعی یاتاقان

بی‌بعد شده Ω^* بازای مقادیر مختلف پارامتر طولی بی‌بعد شده میکروشفیت l/R_s حاصله از تئوری تنش کوپلی در شکل ۵ به



شکل ۵. تغییرات نسبت فرکانس طبیعی میکروموتور مدلسازی شده براساس تئوری تنش کوپلی به فرکانس طبیعی آن در حالت تئوری کلاسیک برحسب پارامتر بی‌بعد شده مقیاس طولی مربوط به میکروشفیت برای κ مختلف

تغییرات فرکانس طبیعی میرا و بی‌بعد شده ω_d مدل جفکات میکروموتور با فرض $M_d^* = 2$ برحسب سرعت دورانی

تصویر کشیده شده است. در واقع این نمودار، معرف دیاگرام کمپل میکروموتور می‌باشد. صرف‌نظر از نوع تئوری به‌کار گرفته شده با افزایش سرعت دورانی Ω^* ، بر مقدار ω_d افزوده می‌گردد. همچنین در این جا نیز مقادیر فرکانسی با افزایش l/R_s بیشتر خواهد شد. شکل ۶ پاسخ سنکرون میکروروتور یا نمودار بوده با فرض $M_d^* = 2$ ، شامل دامنه بی‌بعد شده $|\Lambda/e^*|$ و فاز ϕ یا همان نمودار بوده در اثر وجود نامیزانی جرمی در دیسک به میزان e به‌ترتیب بازای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طولی میکروشفست l/R_s نمایش می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش مقادیر l/R_s مربوط به تئوری به‌کار گرفته شده، سرعت بحرانی میکروموتور؛ یعنی سرعتی که در آن بیشترین دامنه ارتعاشات و تغییر فاز 180° درجه پدیدار می‌شود، بیشتر می‌شود. به نوعی این پارامتر مربوط به مقیاس اندازه ماده سبب می‌شوند که میکروموتور رفتار سخت‌شوندگی از خود نشان دهد. به‌منظور بررسی تأثیر پارامتر بی‌بعدشده μ^* که به نوعی معرف میرایی در یاتاقان‌های سرعت بالای به‌کار رفته و مؤثر بر میزان ضریب فنریت جفت‌شده ضربدری می‌باشد، تغییرات فرکانس طبیعی میرا و بی‌بعدشده ω_d مدل جفکات میکروموتور با فرض $M_d^* = 2$ برحسب سرعت دورانی بی‌بعدشده Ω^* به‌ازای مقادیر مختلف برای $l/R_s = 0.2$ براساس تئوری تنش کوپلی استفاده شده، در شکل ۷ رسم شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، صرف‌نظر از نوع تئوری به‌کار گرفته شده، با افزایش مقدار μ^* تأثیر افزایش سرعت دورانی Ω^* روی مقادیر فرکانس بیشتر و نمایان تر می‌گردد. بدین‌صورت که در مقادیر بالا برای μ^* تأثیر سخت‌شوندگی میکروروتور با افزایش سرعت دورانی Ω^* فزونی خواهد یافت. در شکل ۸ تغییرات دامنه بی‌بعد شده $|\Lambda/e^*|$ و فاز ϕ میکروموتور با فرض $M_d^* = 2$ ، در اثر نامیزانی جرمی در دیسک به میزان e برحسب سرعت دورانی بی‌بعد شده Ω^* و به‌ازای مقادیر مختلف k در حالت $l/R_s = 0.2$ ترسیم شده

است. می‌توان به‌روشنی دید که با افزایش k بر سرعت‌های که در آن ماکزیمم دامنه و تغییر زاویه فاز 180° درجه رخ می‌دهد، افزوده می‌شود. علت این امر آن است که با افزایش مقدار k ضمن آن که یاتاقان‌ها به‌سمت صلیبیت کامل می‌روند، میکروموتور نیز از مود حرکت جسم صلب به‌سمت مود منعطف‌پذیر و در پی آن افزایش سرعت بحرانی پیش می‌رود.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله مشخصات ارتعاشاتی یک موتور توربین گازی میکروالکترومکانیکی براساس یک مدل جفکات توسعه یافته بر پایه تئوری تنش کوپلی بررسی شد. نتایج عددی حاصل از مطالعه پارامترهای هندسی و مادی میکروموتور بیانگر آن است که:

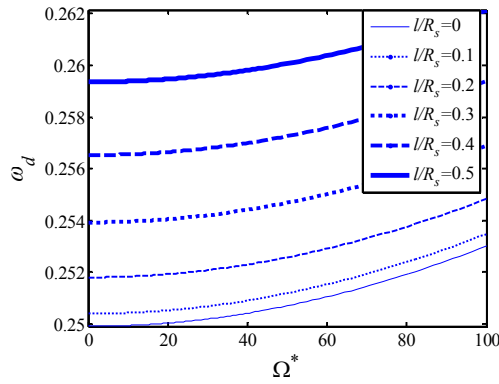
۱. با افزایش پارامتر بی‌بعد شده مقیاس طولی، حاصل از به‌کارگیری تئوری تنش کوپلی، فرکانس‌های طبیعی میرا و نامیرا، سرعت دورانی بحرانی و سرعت در آستانه ناپایداری میکروموتور به‌دلیل سخت‌شوندگی افزایش می‌یابند.

۲. تأثیر استفاده از تئوری تنش کوپلی در هنگام صلب بودن یاتاقان و یا انعطاف‌پذیر بودن میکروموتور بیشتر خواهد شد.

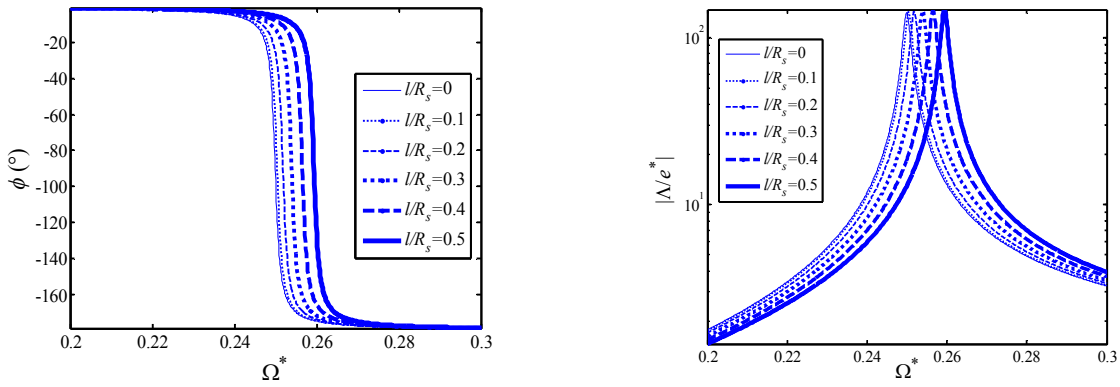
۳. چنانچه در میکروروتور حاوی یاتاقان‌های گازی سرعت بالا با مشخصات هندسی $h_b/R_s = 0.5(L_b/R_s)^2$ باشد، نسبت لنگ‌زنی به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند و میکروروتور به‌طور خنثی پایدار است. به‌عبارت دیگر ضریب فنریت جفت‌شده یاتاقان در چنین حالتی صفر خواهد شد.

۴. وقتی $h_b/R_s < 0.5(L_b/R_s)^2$ ، میکروروتور در حرکت لنگ‌زنی پیش‌رو و وقتی $h_b/R_s > 0.5(L_b/R_s)^2$ ، در حرکت لنگ‌زنی پس‌رو، در یک سرعت دورانی مشخص به بعد می‌تواند ناپایدار گردد.

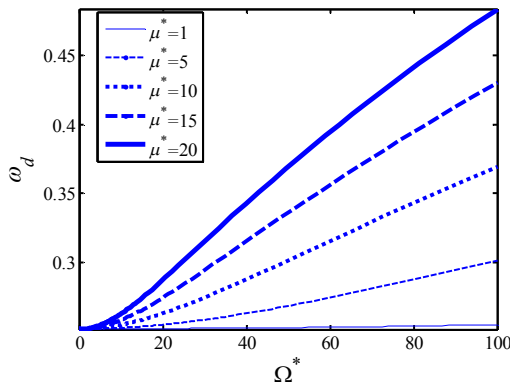
۵. با افزایش صلیبیت یاتاقان‌ها، مقادیر سرعت بحرانی افزایش می‌یابد و همچنین تأثیرپذیری مقادیر فرکانس تشدید با دور میکروموتور در مقادیر بالای میرایی یاتاقان بیشتر می‌شود.



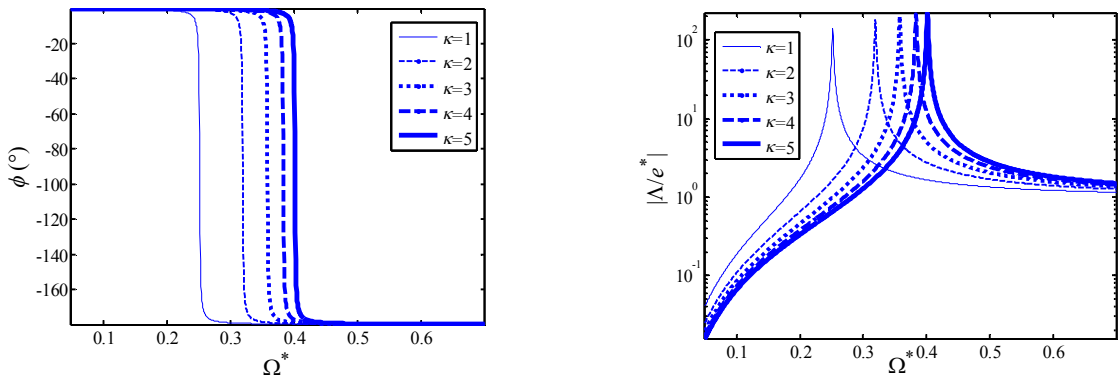
شکل ۵. دیاگرام کمپل میکروموتور بازای مقادیر مختلف پارامتری بعد شده مقیاس طولی میکروشفت



شکل ۶. پاسخ سنکرون (نمودار بوده) میکروموتور بازای مقادیر مختلف پارامتری بعد شده مقیاس طولی میکروشفت



شکل ۷. دیاگرام کمپل میکروموتور بازای مقادیر مختلف میرایی یا ناقان μ^*



شکل ۸. پاسخ سنکرون میکروموتور بازای مقادیر مختلف κ

- [1] S. D. Senturia, A. H. Epstein, O. Al-Midani, G. Anathasuresh, A. Ayon, K. Breuer, K-S Chen, F. E. Ehrich, E. Esteve, L. Frechette, G. Gauba, R. Ghodssi, C. Groshenry, S. Jacobson, J. L. Kerrebrock, J. H. Lang, C-C Lin, A. London, J. Lopata, A. Mehra, J. O. Mur Miranda, S. Nagle, D. J. Orr, E. Piekos, M. A. Schmidt, G. Shirley, S. M. Spearing, C. S. Tan, Y-S. Tzeng, I. A. Waitz, Micro-heat engines, gas turbines, and rocket engines- the MIT microengine project, in proceeding of the 28th AIAA Fluid Dynamics Conference, Snowmass Village, 1997.
- [2] A. H. Epstein, Millimeter-scale gas turbine engines, in the Proceeding of ASME Turbo Expo 2003 Power for Land, Sea, and Air, Atlanta, Georgia, USA, 2003.
- [3] J. H. Lang, Multi-Wafer Rotating MEMS Machines, Turbines, Generators, and Engines, Springer, 2009.
- [4] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 51, pp. 1477-1508, 2003.
- [5] A. W. McFarland, J. S. Colton, Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 15, pp. 1060-1067, 2005.
- [6] M. Hashemi, M. Asghari, Investigation of the small-scale effects on the three-dimensional flexural vibration characteristics of a basic model for micro-engines, *Acta Mechanica*, vol. 226, pp. 3085-3096, 2015.
- [7] M. Hashemi, M. Asghari, On the Size-Dependent Flexural Vibration Characteristics of Unbalanced Couple Stress-Based Micro-Spinning Beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2016.
- [8] J. M. Vance, F. Y. Zeidan, B. Murphy, *Machinery vibration and rotordynamics*, John Wiley & Sons, 2010.
- [9] Z. S. Spakovszky, High-Speed Gas Bearings for Micro-Turbomachinery, in book Multi-Wafer Rotating MEMS Machines, Turbines, Generators, and Engines, Springer, 2009.

1. Massachusetts Institute of Technology (MIT)
2. Epstein and Senturia