

مطالعه رفتار ارتعاشی یک روتور با استفاده از مدل ۸ درجه آزادی جفکات و مقایسه با آزمون تجربی

چکیده: حل تحلیلی، عددی و تجربی محورهای دوار در مراحل طراحی، ساخت و عملیات، به منظور جلوگیری از وقوع پدیده تشدید از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. در این پژوهش، تحلیل عددی و تجربی یک سیستم روتور با استفاده از مدل هشت درجه آزادی جفکات مورد مطالعه قرار می‌گیرد. استخراج معادلات حاکم بر سیستم با در نظر گرفتن اثرات ژيروسکوپی و جرم یاتاقان‌ها، با استفاده از روش لاگرانژ انجام می‌شود. بدین منظور، پس از معرفی یک مدل برای سیستم، عبارت‌های انرژی کرنشی، جنبشی و اتلافی با توجه به شرایط مرزی بدست می‌آیند. سپس با جایگذاری پارامترهای سیستم، فرکانس‌های طبیعی و نمودار کمپبل به منظور پیش بینی سرعت‌های بحرانی استخراج می‌شود. اعتبار سنجی مدل ارائه شده به وسیله مقایسه با نتایج حل المان محدود (انسیس)، و نتایج تجربی صورت گرفته است. پس از آن، تاثیر پارامتر موقعیت قرارگیری دیسک نسبت به یاتاقان اول بر فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی شده است. در انتها نمودار پاسخ فرکانسی سیستم تحت نابالانسی جرمی در فواصل مختلف نابالانسی ارائه شده و تاثیر پارامتر موقعیت قرارگیری دیسک بر روی آن بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد تغییرات فاصله نابالانسی و موقعیت قرارگیری دیسک، فرکانس و قله تشدید سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

واژه‌های راهنما: روتور، مدل جفکات، فرکانس‌های طبیعی، نمودار کمپبل، نابالانسی جرمی

سارا اناری

دانشجوی دکتری،
دانشگاه شهید بهشتی،
دانشکده مهندسی مکانیک
و انرژی، تهران

عباس رهی*

دانشیار،
دانشگاه شهید بهشتی،
دانشکده مهندسی مکانیک
و انرژی، تهران

مقاله علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۲/۰۶/۲۶

بازنگری: ۱۴۰۲/۰۸/۲۷

پذیرش: ۱۴۰۲/۰۹/۲۰

Sara Anari
PhD Candidate

Abbas Rahi*
Associate Professor,
Faculty of Mechanical
Engineering and
Energy,
Shahid Beheshti
University, Tehran

Vibration behavior study of a rotor using Jeffcott's 8 DOF model and comparing with the experimental test

Abstract: Analytical, numerical, and experimental solution of the rotating system in the stages of design, construction, and operation is important in order to prevent resonance phenomenon. In this research, the numerical and experimental analysis of a rotor is studied using Jeffcott's 8 DOF model. The equations of motion by considering the gyroscopic effects and the mass of the bearings are formulated using the Lagrange method. After introducing a model of the system, the terms of potential, kinetic, and dissipation energy are obtained according to the boundary conditions. Then, by placing the system parameters, the natural frequencies of the system and the Campbell diagram have been obtained in order to predict the critical speeds. Validation of the presented model has been done by comparing with the results of Finite Element Solution (ANSYS) and approximate solution, and also percentage error of the first critical frequency compared to the experimental value is 15%. Then, the effect of changing the position of the disk from the first bearing on the natural frequencies of the system is studied. In the end, the system's frequency response is presented at the different unbalanced distances and the position of the disk. Observations show that changes in unbalanced distance and position of the disk can affect the frequency and resonance peak of the system.

Keywords: Rotor, Jeffcott model, Natural frequencies, Campbell diagram, Mass imbalance

۱- مقدمه

جدید از روتور غیرخطی با منبع ایده آل را به منظور بررسی ارتعاشات عرضی پیچشی تحت شرایط کاری غیر ثابت را توسعه دادند. آنها روتور مورد نظر را به صورت الاستیک و با شش درجه آزادی مدلسازی و اثر متغیرهایی همچون اندازه و فاز نامیزانی جرمی و گشتاور احتمالی از سوی موتور بر روی افزایش سرعت زاویه ای روتور در ناحیه عبور از سرعت های بحرانی سیستم بررسی کردند. آن ها نشان دادند با اضافه شدن نامیزانی به میزان ناچیزی، روتور قادر به عبور از سرعت های بحرانی خود نخواهد بود. جمشیدی و همکاران [۱۱] یک مدل تحلیلی مناسب، جهت بررسی رفتار ارتعاشات غیرخطی روتورهای متقارن و نامتقارن تحت نیروهای ناهم محوری و نامیزانی جرمی در دستگاه مختصات دوار ارائه دادند. برای تحلیل ارتعاشی دقیق تر، از تئوری تیر تیموشنکو و جهت مدل سازی نیروی ناهم محوری، از معادلات گیبنز استفاده شده است. با بکارگیری روش ریلی-ریتز، متغیرهای مکانی و زمانی روابط انرژی از یکدیگر جدا شده و سپس با بهره گیری از اصل همپلتون، معادلات حرکت بدست آمده اند. آنها در این مطالعه، تاثیر هرکدام از عیوب عدم تقارن محوری، نیروی ناهم محوری، نامیزانی جرمی و همچنین جمله های غیرخطی، را روی رفتار دینامیکی روتور بررسی کردند. امیرزادگان و همکاران [۱۲] ارتعاشات غیرخطی روتور انعطاف پذیر را حین عبور از سرعت های بحرانی مورد بررسی قرار دادند. معادلات حرکت روتور به صورت ۶ درجه آزادی استخراج شده و سپس با استفاده از روش المان محدود حل شده اند. آنها نشان دادند، افزایش میزان نامیزانی روتور می تواند باعث افزایش دامنه ارتعاشات جانبی، و جلوگیری از افزایش سرعت دورانی روتور و نهایتاً عدم عبور از سرعت های بحرانی شود. کرووز و همکاران [۱۳] یک مدل المان محدود را به منظور پیش بینی پدیده های ارتعاش جانبی ناشی از روتور چند مرحله ای (هفت مرحله) با عدم تعادل، از جمله اثرات میرایی و ژبروسکویی پیشنهاد کردند. نتایج آنها نشان داد با در نظر گرفتن اثرات عدم تعادل، سرعت های بحرانی به سمت فرکانس های پایین تر حرکت می کنند. کیم و همکاران [۱۴] یک مدل دینامیکی غیرخطی را به منظور بررسی یک سیستم روتور-پره با حرکت چرخشی پیشنهاد دادند که در آن روتور صلب و پره ها به ترتیب به عنوان روتور جفکات و تیرهای اوپلر-برنولی مدل سازی شده اند. اثرات افزایش سفتی پره های دوار را با استفاده از مجموعه ای ترکیبی از تغییر شکل ها محوری و شعاعی در نظر گرفتند. آنها پاسخ های دینامیکی غیرخطی سیستم روتور-پره بر حسب فرکانس های طبیعی برای حرکت چرخشی بررسی کردند. ایزا و همکاران [۱۵] یک روش تحلیلی جدید را با استفاده از ترکیب دینامیک چند جسمی و المان

محورهای دوار در بسیاری از ماشین آلات از جمله موتورهای هوایی و توربین های بخار که همگی دارای ساختار دورانی هستند، مورد استفاده قرار می گیرند. با توجه به اهمیت محورهای دوار در صنعت و کاربرد گسترده آن ها، پیش بینی سرعت های بحرانی و فرکانس های طبیعی آن ضروری می باشد. بدین منظور باید فرآیند تحلیل عددی در طول مراحل طراحی، ساخت و عملیات انجام گیرد. تاریخچه مطالعات رفتار دینامیکی محورهای دوار به نیمه قرن نوزدهم بر می گردد، زمانی که لزوم بررسی سرعت های دورانی بالا در ماشین آلات صنعتی مطرح شد. چپو و چن [۱] ارتعاشات روتور به همراه دیسک و پره، با یک تا سه دیسک دارای دو تا شش پره را مورد مطالعه قرار دادند. آنها معادلات حرکت را با استفاده از روش لاگرانژ و روش مودهای فرضی بدست آوردند. خطی و همکاران [۲] با استفاده از روش اصلاح سفتی و جرم، شکل مودهای بدست آمده از روش تحلیل مودال محیطی را میزان کردند. آنها به منظور بررسی دقیق این روش از سه نمونه مطالعاتی بهره بردند. ابتدا روش اصلاح جرم و سفتی را برای یک تیر یک سر گیردار که به صورت تئوری مدل شده بود پیاده کردند و توانستند شکل مودهای اول تیر را میزان کنند. همچنین آنها این روش را با دو آزمون تجربی اجرا کردند. آزمون اول مربوط به تیر یک سر گیردار و آزمون دوم مربوط به یک صفحه یک سر گیردار بود. لو و همکاران [۳] به بررسی یک سیستم روتور صلب با یاتاقان های دارای روانکاری پرداختند. کویین [۴] ارتعاشات غیرخطی یک روتور جفکات را تحت نابالانسی های چرخشی بررسی کرد. یابونو و همکاران [۵] تشدیدهای اولیه یک روتور جفکات افقی را مطالعه کردند. آنها تاثیر عوامل غیرخطی ناشی از نیروی بازگرداننده و گرانش را بررسی کردند. جورجیادس [۶] به تحلیل دینامیکی یک محور با سرعت زاویه ای متغیر پرداخت. محمودی و همکاران [۷] اثر تغییر شکل های بزرگ بر روی ارتعاشات یک محور دوار که از سرعت بحرانی خود عبور می کند را بررسی کردند. وانگ و ژیانگ [۸] به صورت عددی و تجربی مشخصه های ارتعاشی یک روتور که شامل دو شفت را با در نظر گرفتن عیب های ناهم محوری و نامیزانی جرمی مورد مطالعه قرار دادند. وانگ و گنگ [۹] رفتار دینامیکی دو روتور که دارای ناهم محور و جرم نامیزانی بودند، را مورد تحلیل قرار دادند. این دو روتور که به یکدیگر متصل اند با ۶ درجه آزادی مدل شدند. به عنوان نتیجه، فرکانس $2x$ در ناهم محوری موازی و $2x$ ، $4x$ و $6x$ در نامحوری زاویه ای مشاهده شده اند. رکن آبادی و همکاران [۱۰] یک مدل

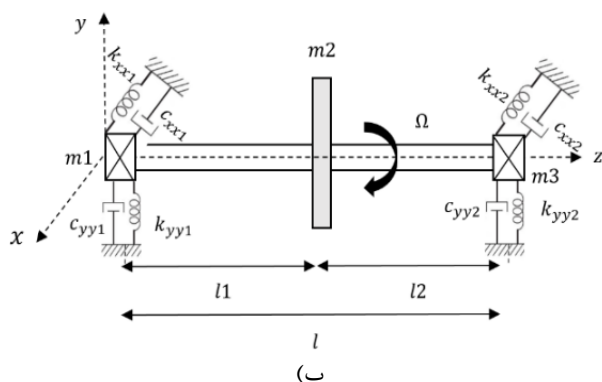
ریلی و آزمون تجربی مقایسه می‌شود. همچنین پاسخ فرکانسی سیستم تحت نابالانسی دیسک رسم شده و تاثیر پارامتر فاصله نابالانسی و موقعیت قرار دیسک بررسی می‌شود.

۲- استخراج معادلات

در این بخش مشخصات فیزیکی و معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از روش لاگرانژ استخراج می‌شود. در شکل (۱) تصویر واقعی دستگاه آزمون آزمایشگاهی و شماتیک مدلسازی آن نشان داده شده است که دارای یک دیسک در مرکز شفت و دو یاتاقان غلتشی در هر دو انتهای آن می‌باشد، $E, I, e, I_T, I_P, m_2, l_1$ ، l_2 و l به ترتیب مدول یانگ، گشتاور دوم سطح، فاصله نابالانسی، گشتاور لختی حول محورهای عرضی X و Y ، گشتاور لختی حول محور Z ، جرم دیسک، فاصله یاتاقان سمت راست تا مرکز دیسک، فاصله مرکز دیسک تا یاتاقان سمت چپ و طول کل شفت می‌باشند.



(الف)



(ب)

شکل ۱ (الف) سیستم آزمون آزمایشگاهی و (ب) مدلسازی

شفت انعطاف پذیر و دیسک صلب فرض شده و زاویه شیب شفت در هر دو یاتاقان برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. هر یک از یاتاقان‌ها دارای سفتی و میرایی در دو جهت X و Y و جرم

محدود به منظور شبیه سازی ارتعاش جانبی و پیچشی یک سیستم روتور ارائه دادند. این روش پیشنهادی می‌تواند ارتعاش جانبی و پیچشی و همچنین سایر ویژگی‌های ارتعاش تک روتور را تحت سرعت‌های چرخشی و خروج از مرکز مختلف شبیه‌سازی و تحلیل کند. الصالح و همکاران [۱۶] ارتعاشات جانبی یک سیستم روتور جفکات دارای نامیزانی که در چندین شرایط نامیزانی کار می‌کند، را به صورت تئوری و تجربی مورد مطالعه قرار دادند. جیا و همکاران [۱۷] سیستم روتور جفکات را با استفاده از یک مدل غیر احتمالی برای توصیف پارامترهای نامشخص بررسی کردند. با معرفی تابع بسط چبیشف، روش محدب چبیشف را مطرح کردند. سپس از این روش به منظور محاسبه پاسخ روتور، زمانی که جرم و سفتی یاتاقان‌ها به ترتیب پارامترهای نامشخص هستند، استفاده کردند. نتایج عددی و تجربی آنها نشان داد که روش پیشنهادی برای کمی کردن پارامترهای نامشخص سیستم روتور جفکات معتبر و مؤثر می‌باشد [۱۷]. وی و همکاران [۱۸] یک مدل دینامیکی آب بندی شده روتور برآش عمودی جفکات را توسعه دادند. آن‌ها تاثیرات پارامترهای ساختاری و عملیاتی مانند سرعت دورانی، جرم روتور، فاصله نصب آب بندی‌ها و میرایی سیستم را بر رفتار دینامیکی غیرخطی سیستم عمودی تحلیل کردند. نتایج نشان داد که دامنه یک سیستم روتور عمودی کمتر از یک سیستم روتور افقی می‌باشد و همچنین کاهش جرم روتور باعث افزایش پایداری سیستم روتور می‌شود. رکن آبادی و همکاران [۱۹] یک مدل جدید به منظور بررسی شتاب زاویه‌ای روتور غیرخطی که از سرعت‌های بحرانی در شرایط عملیاتی غیر ثابت عبور می‌کند، توسعه دادند. روتور به صورت الاستیک و با لحاظ کردن اثرات اینرسی غیرخطی و انعطاف پذیری یاتاقان‌ها مدل گردید. معادلات غیرخطی حرکت با استفاده از روش لاگرانژ به دست آمده و با روش المان محدود حل شد. آن‌ها اثرات پارامترهایی مانند خروج از مرکز شفت، میرایی و سفتی تکیه‌گاه‌ها بر افزایش سرعت زاویه‌ای روتور در عبور از سرعت بحرانی در نظر گرفتند. نتایج به دست آمده نشان داد که مقدار کمی خروج از مرکز می‌تواند از ورود به محدوده سرعت بحرانی الاستیک روتور جلوگیری کند.

در این مقاله یک نمونه آزمایشگاهی روتور به همراه دیسک و دو یاتاقان در هر دو انتهای آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیستم به صورت یک مدل تحلیلی جفکات هشت درجه آزادی مدلسازی شده و با استفاده از روش لاگرانژ معادلات حاکم بر آن استخراج می‌شود. فرکانس‌های طبیعی، نمودار کمپبل و اولین سرعت بحرانی بدست آمده و نتایج با حل المان محدود، تقریبی

در رابطه (۴) مشاهده می‌شود اثرات ژيروسکوپی لحاظ شده اند. به علت وجود میرایی در یاتاقان ها و جرم نابالانسی، رابطه انرژی اتلافی (۷) و نیروهای ناپایستار (۸) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$D.F = \frac{1}{2} [c_{xx1}\dot{x}_1^2 + c_{xx3}\dot{x}_3^2 + c_{yy1}\dot{y}_1^2 + c_{yy3}\dot{y}_3^2] \quad (7)$$

$$\partial W = m_2 e \Omega^2 \cos(\Omega t) \partial x_2 + m_2 e \Omega^2 \sin(\Omega t) \partial y_2 \quad (8)$$

که در روابط بالا $\dot{x}_1, \dot{x}_3, \dot{y}_1, \dot{y}_3$ به ترتیب سرعت تغییر مکان در جهت X ، سرعت تغییر مکان در جهت Y و سرعت دورانی در جهت X و Y می‌باشد و $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\theta}_x$ و $\ddot{\theta}_y$ به ترتیب شتاب در جهت X ، شتاب در جهت Y و شتاب دورانی در جهت X و Y می‌باشد. در ادامه با قرار دادن روابط انرژی کرنشی، جنبشی، اتلافی و نیروهای ناپایستار در معادله لاگرانژ زیر، معادلات حاکم بر سیستم بدست می‌آید:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j ; j = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

که در آن $L = T - V$ تابع لاگرانژ، q_j درجات آزادی سیستم و $Q_j = \frac{\partial W}{\partial q_j}$ نیروی غیر پایستار می‌باشند. پس داریم:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 c_{xx1} + x_1 \left(k_{xx1} + \frac{12EI}{l_1^3} \right) - \frac{12EI}{l_1^3} x_2 + \frac{6EI}{l_1^2} \theta_y = 0 \quad (10)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + \dot{y}_1 c_{yy1} + y_1 \left(k_{yy1} + \frac{12EI}{l_1^3} \right) - \frac{12EI}{l_1^3} y_2 - \frac{6EI}{l_1^2} \theta_x = 0 \quad (11)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + x_2 \left(\frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3} \right) 12EI - x_3 \frac{12EI}{l_2^3} - x_1 \frac{12EI}{l_1^3} + \theta_y \left(\frac{1}{l_2^2} - \frac{1}{l_1^2} \right) 6EI = m_2 \Omega^2 e \cos(\Omega t) \quad (12)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 \left(\frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3} \right) 12EI - y_3 \frac{12EI}{l_2^3} - y_1 \frac{12EI}{l_1^3} + \theta_x \left(\frac{1}{l_2^2} - \frac{1}{l_1^2} \right) 6EI = m_2 \Omega^2 e \sin(\Omega t) \quad (13)$$

$$I_T \ddot{\theta}_x + I_p \Omega \dot{\theta}_y + \theta_x \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) 4EI - y_1 \frac{6EI}{l_1^2} + y_3 \frac{6EI}{l_2^2} + y_2 \left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) 6EI = 0 \quad (14)$$

$$I_T \ddot{\theta}_y + I_p \Omega \dot{\theta}_x + \theta_y \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) 4EI + x_1 \frac{6EI}{l_1^2} - x_3 \frac{6EI}{l_2^2} + x_2 \left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) 6EI = 0 \quad (15)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + \dot{x}_3 c_{xx3} + x_3 \left(k_{xx3} + \frac{12EI}{l_3^3} \right) - \frac{12EI}{l_3^3} x_2 - \frac{6EI}{l_2^2} \theta_y = 0 \quad (16)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + \dot{y}_3 c_{yy3} + y_3 \left(k_{yy3} + \frac{12EI}{l_3^3} \right) - \frac{12EI}{l_3^3} y_2 + \frac{6EI}{l_2^2} \theta_x = 0 \quad (17)$$

m_1 و m_3 هستند. $x_1, y_1, x_2, y_2, \theta_x, \theta_y, x_3$ و y_3 به ترتیب تغییر شکل یاتاقان یک در راستای X و Y ، تغییر شکل دیسک در راستای X و Y ، زاویه چرخشی دیسک حول محور X و Y ، تغییر شکل یاتاقان دوم در راستای X و Y می‌باشند که بیانگر مدل هشت درجه آزادی جفکات است و Ω سرعت دورانی محور می‌باشد. $c_{yy3}, c_{xx3}, k_{yy3}, k_{xx3}, c_{yy1}, c_{xx1}, k_{yy1}, k_{xx1}$ به ترتیب مقدار سفتی و میرایی یاتاقان ها هستند.

به منظور استخراج معادلات سیستم با استفاده از روش لاگرانژ، باید روابط انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و انرژی اتلافی بدست آیند. انرژی کرنشی سیستم شامل دو بخش V_1 (سفتی یاتاقان‌ها) و V_2 (شفط ارتجاعی) می‌باشد که با استفاده از مقادیر گشتاور M_{yz} و M_{xz} و متناسب با شرایط مرزی بدست می‌آید [۲۰].

$$V_1 = \frac{1}{2} [k_{xx1}x_1^2 + k_{xx3}x_3^2 + k_{yy1}y_1^2 + k_{yy3}y_3^2] \quad (1)$$

$$V_2 = \int_0^l \frac{M_{xz}^2 + M_{yz}^2}{2EI} dz . M_{xz} = EIX'' . M_{yz} = EIY'' \quad (2)$$

که در آن مقادیر X'' و Y'' با استفاده از چهار شرط مرزی انتقالی و زاویه شیب در دو بازه $z = 0: l_1$ و $z = l_1: l$ بدست آمده و از مجموع انرژی کرنشی یاتاقان ها و شفط انعطاف پذیر، مقدار انرژی کرنشی کل سیستم بدست می‌آید.

$$V = \frac{2EI}{l_1^3} [l_1^2 \theta_x^2 + l_1^2 \theta_y^2 + 3l_1 x_1 \theta_y - 3l_1 x_2 \theta_y - 3l_1 y_1 \theta_x + 3l_1 y_2 \theta_x + 3x_1^2 - 6x_1 x_2 + 3x_2^2 + 3y_1^2 - 6y_1 y_2 + 3y_2^2] + \frac{2EI}{l_2^3} [\theta_x^2 l_2^2 + \theta_y^2 l_2^2 + 3l_2 x_2 \theta_y - 3l_2 x_3 \theta_y - 3l_2 y_2 \theta_x + 3l_2 y_3 \theta_x - 6x_2 x_3 + 3x_3^2 + 3y_2^2 - 6y_2 y_3 + 3y_3^2 + \frac{1}{2} [k_{xx1}x_1^2 + k_{xx3}x_3^2 + k_{yy1}y_1^2 + k_{yy3}y_3^2]] \quad (3)$$

همچنین انرژی جنبشی سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_T (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + \frac{1}{2} I_p (\omega_1^2 - 2\omega_1 \theta_x \dot{\theta}_y) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) \quad (4)$$

که در آن I_T و I_p به ترتیب ممان اینرسی عرضی و قطبی دیسک می‌باشد و از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$I_T = \frac{1}{4} m_2 R^2 \quad (5)$$

$$I_p = \frac{1}{2} m_2 R^2 \quad (6)$$

۳- نتایج حاصل از حل تحلیلی، عددی و آزمون تجربی

جدول (۲) مقادیر فرکانس طبیعی بدست آمده از حل تحلیلی و حل المان محدود را نشان می‌دهد. درصد خطای سه فرکانس طبیعی اول بدست آمده از هر دو روش کمتر از ۱۵ درصد به دست آمده است. شکل (۲)، بیانگر چهار شکل مود اول سیستم بوده که حالت‌های خمش و پیچش شفت را نشان می‌دهد. جدول (۳) بیانگر اولین سرعت بحرانی بدست آمده از روش‌های تحلیلی، المان محدود و روش تقریبی ریلی می‌باشد که درصد خطای آن‌ها نسبت به مقدار تجربی کمتر از ۱۵ درصد است.

به منظور بررسی نقاط تشدید در نمونه مورد نظر، نمودار کمپیل در محدوده سرعت دورانی صفر تا ۴۰۰ دور بر دقیقه با مرتبه تحریک موتور در شکل (۳) رسم شده است. محل تقاطع خط تحریک شیب دار با خطوط افقی، نقاط تشدید و سرعت‌های بحرانی را نشان می‌دهند. جدول (۴) بیان کننده سرعت‌های بحرانی و فرکانس متناظر با آن‌ها می‌باشد، همچنین قابل ذکر است که فرکانس‌های پسر و پیشرو^۱ در سرعت‌های کمتر از ۳۰۰ دور بر دقیقه بر هم منطبق هستند. یکی از پارامترهای مورد بررسی در سیستم، موقعیت قرارگیری دیسک روی شفت می‌باشد که جابجایی آن می‌تواند روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها تاثیر گذار باشد. این پارامتر با تغییرات طول l_1 (فاصله مرکز دیسک تا یاتاقان اول) در سه موقعیت ۳۱۰ (مرکز شفت)، ۴۱۰ و ۵۱۰ میلی‌متر در جدول (۵) نشان شده است.

شکل (۴)، نمودار کمپیل مربوط به تغییرات طول l_1 را در سه شکل مود اول نشان می‌دهد. طبق شکل (۴) و جدول (۵)، با افزایش فاصله مرکز دیسک تا یاتاقان اول، فرکانس شکل مود اول افزایش و فرکانس شکل مود دوم و سوم کاهش می‌یابد و باعث تغییرات سرعت‌های بحرانی و نواحی تشدید می‌شود. این روند افزایشی/کاهشی فرکانس در سه شکل مود اول به علت نوع شکل مود می‌باشد.

جدول ۲ مقایسه فرکانس‌های طبیعی سیستم در حل تحلیلی و حل المان محدود

فرکانس (هرتز)	مود اول	مود دوم	مود سوم
حل تحلیلی	۲۰/۵۸	۱۶۲/۴۵	۳۵۷/۴۵
حل المان محدود	۲۰/۳۷	۱۴۷/۸۴	۳۲۰/۷
درصد خطا	٪ ۱۰/۲۴	٪ ۹/۴۵	٪ ۱۰/۳

با جداسازی ماتریس‌های جرم $[M]$ ، سفتی $[K]$ ، میرایی $[C]$ و نیروهای نابالانسی $[F]$ ، در معادلات (۱۰) الی (۱۷)، معادله کلی سیستم به شکل ماتریسی $[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = [F]$ بدست می‌آید.

به منظور یافتن فرکانس‌های طبیعی سیستم، از معادله (۱۸) استفاده می‌شود:

$$\det\{-\Omega^2[M] + i\Omega[C] + [K]\} = 0 \quad (18)$$

مقادیر پارامترهای مورد استفاده در محاسبه عددی برای یاتاقان و پارامترهای هندسی و داده‌های دیسک در جدول (۱) آمده است که در آن m_2 جرم دیسک، ρ چگالی، R شعاع دیسک، r شعاع محور، E مدول یانگ، l_1 و l_2 فاصله یاتاقان راست تا مرکز دیسک و فاصله یاتاقان چپ تا مرکز دیسک، k_{xx} ، c_{yy} و k_{yy} به ترتیب سفتی و میرایی یاتاقان‌های ۱ و ۲ در راستای X و Y ، ω سرعت دورانی سیستم می‌باشد.

به منظور ساده‌سازی مسئله، مقدار سفتی و میرایی یاتاقان‌ها در صفحه X و Y یکسان هستند و دیسک در مرکز شفت قرار گرفته است. پس از جایگذاری مشخصات سیستم و حل معادلات، فرکانس‌های طبیعی و نمودار کمپیل بدست می‌آیند. حل تحلیلی معادلات در نرم‌افزار متلب و حل المان محدود در نرم‌افزار انسیس ورک پنج انجام شده و نتایج حاصل مقایسه می‌شوند. مدل شبیه‌سازی شده در انسیس دارای ۳۵۰ المان و ۱۶۷۷۷ گره می‌باشد.

جدول ۱ مشخصات دستگاه آزمایشگاهی محور دوار

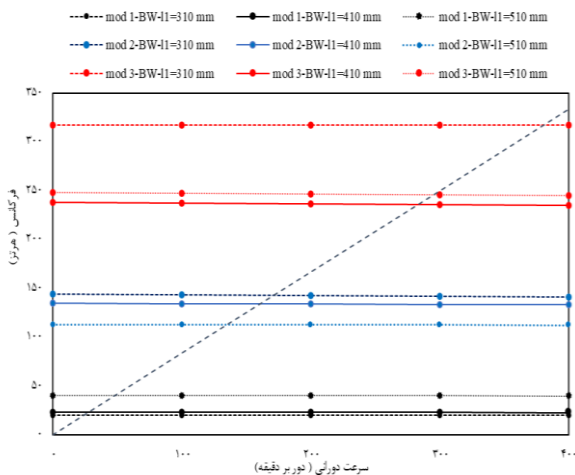
پارامتر	مقدار	واحد
m_2	۰/۷۸۵۰	(kg)
چگالی	۷۸۵۰	kg/m^3
شعاع دیسک	۴۰	mm
شعاع شافت	۶/۳۳	mm
مدول یانگ	۲۰۵	GPa
طول سمت چپ دیسک	۳۱۰	mm
طول سمت راست دیسک	۳۱۰	mm
$k_{xx1} = k_{xx3}$	۵۰۰۰	kN/m
$k_{yy1} = k_{yy3}$	۵۰۰۰	kN/m
$c_{xx1} = c_{xx3}$	۵۰۰	$k.s/m$
$c_{yy1} = c_{yy3}$	۵۰۰	$k.s/m$
سرعت دورانی	۴۰۰-۰	rpm

² Forward

¹ Backward

جدول ۴ فرکانس های بحرانی سیستم بر حسب هرتز

شکل مود	سرعت بحرانی (دور بر دقیقه)	فرکانس (هرتز)
اول	۲۴/۴۲	۲۰/۳۶
دوم	۱۷۱/۳۵	۱۴۵
سوم	۳۸۱	۳۱۷/۴



شکل ۴ نمودار کمپبل در بازه سرعت دورانی صفر تا ۴۰۰ دور بر دقیقه

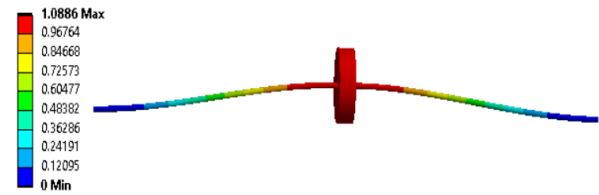
جدول ۵ بررسی اثر موقعیت قرارگیری دیسک روی شفت بر سرعت بحرانی سیستم بر حسب هرتز

شکل مود سوم پسرو	شکل مود دوم پسرو	شکل مود اول پسرو	طول سمت چپ (mm)
۳۱۷/۵	۱۴۸/۴۱	۲۰/۳۵۴	۳۱۰
۲۴۸/۱۵	۱۳۴/۳۷	۲۳/۵۵	۴۱۰
۲۳۷/۰۹	۱۱۳	۴۰/۳۱۳	۵۱۰

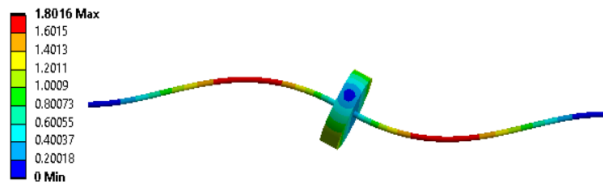
۴- پاسخ فرکانسی سیستم تحت اثر نابالانسی دیسک

به منظور بررسی خصوصیات دینامیکی روتور و بررسی سرعت بحرانی محاسبه شده از نمودارهای کمپبل، پاسخ فرکانسی تحت نابالانسی در محیط هارمونیک آنالیز بررسی می‌شود. شکل (۵) نمودار پاسخ فرکانسی در فواصل مختلف نابالانسی را نشان می‌دهد. با افزایش فاصله نابالانسی نسبت به مرکز دیسک، دامنه جابجایی در اولین قله تشدید، افزایش می‌یابد.

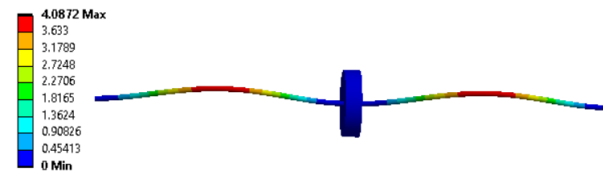
شکل (۶) بیانگر اثر موقعیت قرارگیری مرکز دیسک در فواصل ۳۱۰، ۴۱۰ و ۵۱۰ میلی‌متر نسبت به یاتاقان اول با فاصله نابالانسی ۰/۱ میلی‌متر می‌باشد. با جابجایی دیسک به سمت یاتاقان دوم، دامنه جابجایی تشدید افزایش و شیفت فرکانسی مثبت ایجاد می‌شود. شکل (۷) تغییرات جرم نابالانسی بر پاسخ



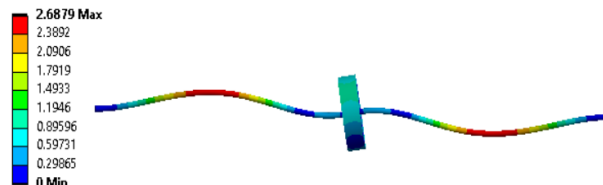
الف) شکل مود اول



ب) شکل مود دوم



ج) شکل مود سوم

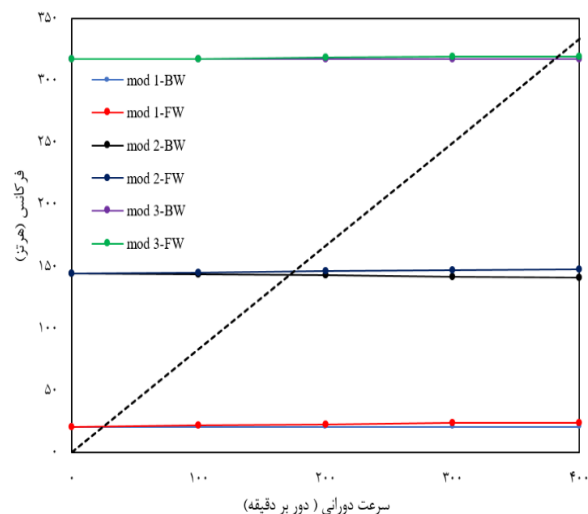


د) شکل مود چهارم

شکل ۲ مدهای سیستم در چهار فرکانس اول

جدول ۳ مقایسه اولین سرعت بحرانی سیستم بر حسب هرتز

سرعت بحرانی	آزمون تجربی	حل تقریبی	حل المان محدود	حل تحلیلی	درصد خطا
	۱۷	۲۰/۶	۲۰/۳۶	۲۰/۵۸	۱۵٪



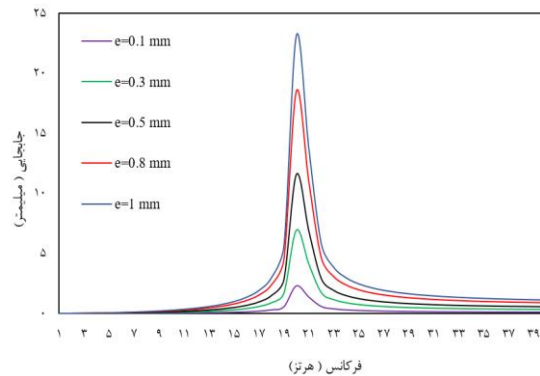
شکل ۳ نمودار کمپبل در بازه سرعت دورانی صفر تا ۴۰۰ دور بر دقیقه

مقایسه شد. حل تحلیلی سیستم مورد نظر به صورت جفکات هشت درجه آزادی مدل سازی شده و معادلات حاکم بر آن با استفاده از روش لاگرانژ استخراج گردید. نتایج بدست آمده از حل تحلیلی با نتایج حل المان محدود مقایسه شده و درصد خطا در مقادیر فرکانس های طبیعی اول تا سوم کمتر از ۱۵ درصد می باشد. به منظور پیش بینی سرعت های بحرانی، نمودار کمپیل در بازه صفر تا ۴۰۰ دور بر دقیقه رسم گردیده و سه نقطه احتمالی تشدید تشخیص داده شد. اولین سرعت بحرانی سیستم در هر دو روش حل تحلیلی و عددی در مقایسه با مقدار تجربی آن دارای خطای کمتر از ۱۵ درصد می باشد که با توجه به عوامل خارجی و خطاهای آزمایشگاهی موجود، معقول می باشد. در ادامه پاسخ فرکانسی سیستم تحت فواصل نابالانسی مختلف و جرم نابالانسی مشخص بدست آمد، که بیانگر آن است که با افزایش فاصله نابالانسی، دامنه جابجایی در اولین قله تشدید بدون تغییر در مقدار فرکانس مربوطه روند افزایشی دارد. همچنین فاصله بیشتر دیسک از مرکز شفت باعث افزایش دامنه جابجایی و فرکانس پیک تشدید می شود. یکی دیگر از نتایج بدست آمده تاثیر جرم نابالانسی بر پاسخ فرکانسی سیستم می باشد که با افزایش آن دامنه جابجایی تشدید نیز افزایش می یابد.

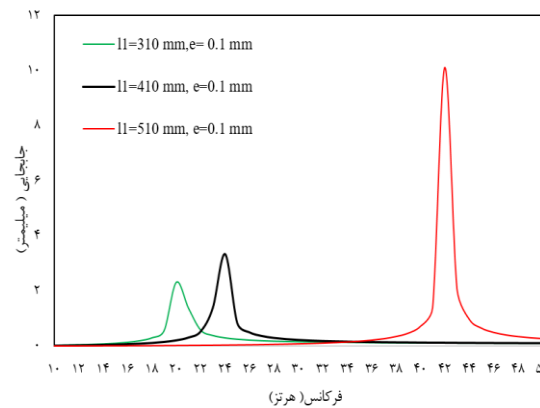
۶- مراجع

- [1] Y.J. Chiu and D.Z. Chen, "The coupled vibration in a rotating multi-disk rotor system," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, no. 1, pp. 1-10, 2011. doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.10.001.
- [2] M. Khatibi, M. Ashory, A. Malekjafarian, and R. Brincker, "Mass-stiffness change method for scaling of operational mode shapes," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 26, pp. 34-59, 2012. doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.07.012.
- [3] Y. Lu, Y. Zhang, X. Shi, W. Wang, and L. Yu, "Nonlinear dynamic analysis of a rotor system with fixed-tilting-pad self-acting gas-lubricated bearings support," *Nonlinear Dynamics*, vol. 69, pp. 877-890, 2012. doi.org/10.1007/s11071-011-0310-1.
- [4] D.D. Quinn, "Resonant dynamics in a rotordynamic system with nonlinear inertial coupling and shaft anisotropy," *Nonlinear Dynamics*, vol. 57, pp. 623-633, 2009. doi.org/10.1007/s11071-009-9502-3.
- [5] H. Yabuno, T. Kashimura, T. Inoue, and Y. Ishida, "Nonlinear normal modes and primary resonance of horizontally supported Jeffcott rotor," *Nonlinear Dynamics*, vol. 66, no. 3, pp. 377-387, 2011. doi.org/10.1007/s11071-011-0011-9.

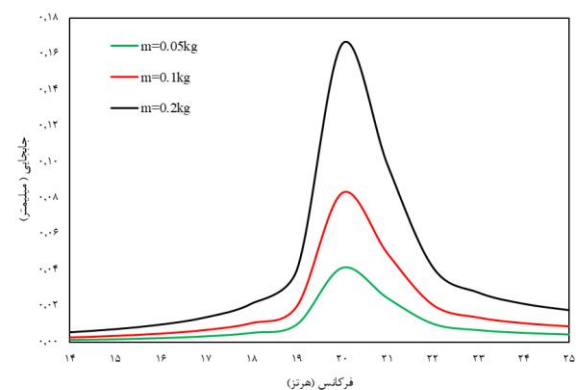
فرکانسی را نشان می دهد، با افزایش جرم نابالانسی در فاصله مشخص ۰/۳ میلیمتر میزان دامنه جابجایی تشدید افزایش می یابد.



شکل ۵ بررسی اثر فاصله نابالانسی در پاسخ فرکانسی سیستم



شکل ۶ بررسی اثر موقعیت قرارگیری دیسک بر پاسخ فرکانسی سیستم در فاصله نابالانسی ۰/۱ میلیمتر



شکل ۷ بررسی اثر جرم نابالانسی در پاسخ فرکانسی سیستم

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، حل تحلیلی، عددی و تجربی یک سیستم آزمایشگاهی روتور مورد بررسی قرار گرفته و نتایج آنها با یکدیگر

- industry, 1400. <https://civilica.com/doc/1238214>. [In Persian].
- [13] W. Cruz, N. Arzola, and O. Araque, "Modeling and experimental validation of the vibration in an unbalance multi-stage rotor," *Journal of Mechanical Engineering and Sciences*, vol. 13, no. 3, pp. 5703-5716, 2019. doi.org/10.15282/jmes.13.3.2019.30.0456.
- [14] J. Kim, J.-G. Hong, and J. Chung, "Nonlinear dynamic modeling and response analysis of a rotor-blade system with whirling motion," *Nonlinear Dynamics*, vol. 98, no. 2, pp. 953-970, 2019. doi.org/10.1007/s11071-019-05238-5.
- [15] A. I. Eisa, L. Shusen, and W. M. Helal, "Study on the lateral and torsional vibration of single rotor-system using an integrated multi-body dynamics and finite element analysis," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 12, no. 10, p. 1687814020968336, 2020. doi.org/10.1177/1687814020968336.
- [16] A. Alsaleh, H. M. Sedighi, and H. M. Ouakad, "Experimental and theoretical investigations of the lateral vibrations of an unbalanced Jeffcott rotor," *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, vol. 14, pp. 1024-1032, 2020. doi.org/10.1007/s11709-020-0647-y.
- [17] Z. Jia, Y. Yang, Q. Zheng, and W. Deng, "Dynamic analysis of Jeffcott rotor under uncertainty based on Chebyshev convex method," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 167, p. 108603, 2022. doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108603.
- [18] Y. Wei, X. Ran, T. Sun, S. Liu, H. Zhang, and D. Zhao, "Dynamic characteristics analysis of a vertical Jeffcott rotor-brush seal system," *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, vol. 45, no. 3, pp. 245-254, 2022. doi.org/10.1080/02533839.2022.2034049.
- [19] M. Rokn-Abadi, S. Amirzadegan, R. Firouzabadi, and M. A. Kouchakzadeh, "Nonlinear modeling of a misaligned rotor under non-stationary operating conditions," *Journal of Vibration and Control*, p.10775463231174269, 2023. doi.org/10.1177/10775463231174269.
- [20] M. L. Adams, *Rotating machinery vibration: from analysis to troubleshooting*. CRC Press, 2009.
- [6] F. Georgiades, "Nonlinear dynamics of a spinning shaft with non-constant rotating speed," *Nonlinear Dynamics*, vol. 93, no. 1, pp. 89-118, 2018. doi.org/10.1007/s11071-017-3888-0.
- [7] A. Mahmoudi, S. Hosseini, and M. Zamanian, "Nonstationary analysis of nonlinear rotating shafts passing through critical speed excited by a nonideal energy source," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 232, no. 4, pp. 572-584, 2018. doi.org/10.1177/0954406216684364.
- [8] N. Wang and D. Jiang, "Vibration response characteristics of a dual-rotor with unbalance-misalignment coupling faults: Theoretical analysis and experimental study," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 125, pp. 207-219, 2018. doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.03.009.
- [9] H. Wang and J. Gong, "Dynamic analysis of coupling misalignment and unbalance coupled faults," *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, vol. 38, no. 2, pp. 363-376, 2019. doi.org/10.1177/1461348418821582.
- [10] M. Roknabadi, p. Amirzadegan, F. Mehralian, R. A. Dehghani Firouzabadi, M. A. Kochzadeh, and M. R. Mousavi, "Investigation of high-order nonlinear rotor vibrations with an ideal source under non-steady working conditions," presented at the 29th annual international conference of the Iranian Society of Mechanical Engineers and the 8th conference of the thermal power plant industry, 1400. <https://civilica.com/doc/1238500>. [In Persian].
- [11] H. Jamshidi, A. A. Jafari, and N. Mohammadi, "Nonlinear analysis of asymmetric rotor vibrations with misaligned coupling using Timoshenko beam model," 1400. <https://civilica.com/doc/1282198>. [In Persian].
- [12] P. Amirzadegan, M. Roknabadi, and R. A. Dehghani Firouzabadi, "Investigation of nonlinear vibrations of a flexible rotor when passing through the critical speeds of rigid and bending modes," presented at the 29th annual international conference of the Iranian Mechanical Engineers Association and the 8th conference of the thermal power plant