

## بررسی عددی و تحلیلی نفوذ پرتابه میله بلند صلب در اهداف فولادی

امین مسلمی پطرودی\*، محمدحسن کامیاب

کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران

\*مسئول مکاتبات: amin.moslemi@gmail.com

### ◀ واژگان کلیدی

مکانیک ضربه  
معادله برنولی  
انبساط حفره کروی  
علوم دریایی  
نفوذ

### ◀ تاریخچه مقاله

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۶/۳۱  
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۴

### ◀ چکیده

پیشرفت سریع علوم دریایی و فناوری نظامی در زمینه تولید انواع سلاح‌های آفندی توسط کشورهای پیشرفته و توان همپایی سایر کشورها موجب شد تا بحث پدافند توسط کشورهای پیشرفته مورد توجه جدی قرار گیرد. استفاده از جاذب‌های ضربه در بدنه کشتی‌ها، مقاوم‌سازی بدنه کشتی در برابر گلوله، سپر خودرو نظامی، مقاوم‌سازی راکتورهای اتمی در برابر حملات و برخورد هواپیما و موشک، این موارد از کاربردهای علم مکانیک ضربه است. عملکرد نفوذ بالستیکی یک پرتابه دارای انرژی جنبشی، بیشتر تحت‌تأثیر تغییر شکل پرتابه در طول فرآیند ضربه قرار خواهد گرفت؛ از جمله عوامل مؤثر رفتار سازه در برابر نفوذ پرتابه‌ها، چگالی و مقاومت آنها است؛ بطوریکه با افزایش این مشخصه‌ها، مقاومت در برابر نفوذ نیز افزایش می‌یابد. در این مقاله، با استفاده از تئوری اصلاح شده معادله برنولی و انبساط حفره کروی در هدف، معادله مومنتوم محوری، مدل تحلیلی نفوذ والکر و اندرسون ارائه شده است. مدل تحلیلی ارائه شده با توجه به فرضیات حاکم بر آن، توافق کاملاً مناسبی با مقادیر تجربی مختلف دارد.

## Numerical and analytical investigation of the penetration of rigid long rod projectile in steel targets

Amin Moslemi Petrudi, Mohammad Hassan Kamyab

*MSc, Faculty of Engineering, Imam Hossein University, Tehran*

### ► Abstract

The rapid advancement of marine science and military technology in the field of production of offensive weapons by developed countries and the ability of other countries to keep step with the issue of defense by developed countries has received serious attention. The use of impact absorbers in ship bodies, ship body reinforcement against bullets, military vehicle bumper, nuclear reactors retrofitting against aircraft and missile collisions are some of the applications of impact mechanics. The ballistic penetration performance of a projectile with kinetic energy will be more affected by the deformation of the projectile during the impact process; Among the effective factors of structural behavior against projectile penetration are their density and resistance; As these characteristics increase, so does the resistance to penetration. In this paper, using the modified theory of Bernoulli equation and expansion of the spherical cavity expansion in the target, the axial momentum equation, the analytical model of Walker and Anderson penetration are presented. The aimed analytical model, according to the available hypotheses, agrees quite well with different experimental values.

### ► Keywords

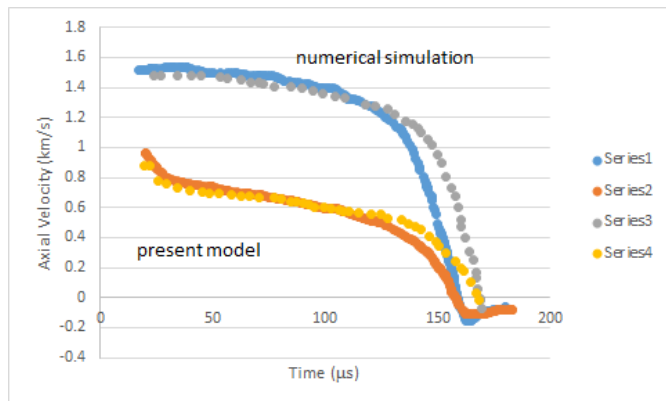
Impact mechanics  
Bernoulli equation  
Spherical cavity expansion  
Marine science  
Penetration

### ► Article history

Received: 21 Sep 2020  
Accepted: 04 Nov 2020

## ۱ مقدمه

با وجود این، پرتابه تا لحظه رسیدن به سرعت صفر به فرسایش ادامه می‌دهد. در شکل ۱ سرعت نفوذ پرتابه نسبت به زمان برای پرتابه ( $\frac{L}{D} = 10$ ) آلیاژ تنگستن که در هدف فولادی نفوذ می‌نماید را نشان می‌دهد.



شکل ۱: سرعت نفوذ پرتابه نسبت به زمان.

برای حالتی که  $Y_p > R_t$  است، یک سرعت بحرانی که با معادله  $\sqrt{\frac{R_t - Y_p}{\rho_p}}$  مشخص می‌گردد وجود دارد و در زیر سرعت، پرتابه به صورت صلب نفوذ می‌نماید. برای این حالت، تنش محوری در سطح مشترک پرتابه-هدف و معادله حرکت، با روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\Sigma = \frac{1}{\rho_p} \rho_t v^2 + R_t, \quad (4)$$

$$\rho_p L_s \frac{dv}{dt} = -\left(\frac{1}{\rho_p} \rho_t v^2 + R_t\right), \quad (5)$$

که در آن  $L_s$  طول قسمت صلب پرتابه می‌باشد. در کارهای بعدی، تیت متوجه شد که یک منطقه پلاستیک در درون پرتابه وجود دارد و می‌بایستی فقط طول قسمت الاستیک پرتابه در کاهش سرعت انتها پرتابه مدنظر قرار گیرد. عباراتی را برای حوزه جریان پلاستیک در پرتابه-هدف یک تخمین را برای این حوزه تدارک دید [۴]. بعلاوه، تیت برای انطباق بهتر مدل با آزمایش‌های تجربی، معادله (۲) را دوباره بصورت  $\rho_p L \frac{dv}{dt} = \sigma_p$  نوشت و  $Y_p = 1/\sqrt{\sigma_p}$  قرار داد که در آن  $\sigma_p$  جریان تنش پرتابه است [۵]. مدل تیت، به وسیله مقایسه با شبیه‌سازی عددی نشان داده شده است که تصویر بطور معقول صحیحی را از سابقه زمانی نفوذ پرتابه میله بلند، بطوریکه در شکل ۱ دیده می‌شود، فراهم می‌آورد. این شکل، سرعت نفوذ (سرعت سطح مشترک پرتابه-هدف) و سرعت انتها را در امتداد خط‌المركز برای یک میله از جنس آلیاژ تنگستن با  $\frac{L}{D} = 10$  ( $L = 8.17 \text{ cm}$ ) که با سرعت برخورد اولیه  $1/5 \text{ km/s}$  به یک هدف فولادی برخورد می‌نماید، نشان می‌دهد. مدل تیت با مقدار اندکی اختلاف، رفتاری شبیه از نظر کیفیت و کمیت با آنچه که از شبیه‌سازی عددی وابسته به زمان بدست می‌آید، را نشان می‌دهد. این اختلافات عبارتند از:

۱. مدل تیت فاز گذرای ابتدای نفوذ را نمی‌تواند تشریح نماید.

۲. دو اختلاف نیز در نزدیکی انتهای نفوذ وجود دارد.

مدل تیت در انتهای نفوذ، کاهش سرعت انتهای پرتابه را دیرتر ولی با سرعت بیشتر پیش‌بینی می‌نماید و همچنین پیش‌بینی می‌نماید که پرتابه تقریباً بطور کامل فرسایش می‌یابد. که این امر بدلیل محدودیت حاصل از مدل است

بررسی پدیده برخورد و نفوذ یک پدیده میان‌رشته‌ای است و بنابراین با پدیده‌های مختلفی از قبیل انتشار امواج الاستیک و پلاستیک، انتقال حرارت و جرم، کار سختی، اصطکاک، جریان هیدرودینامیک، شیوه‌های مختلف شکست، تأثیر هندسه اجسام برخوردکننده، مقاومت و چگالی مواد برخوردکننده سرکار دارد. از طرفی بدلیل عدم دسترسی به برخی از خصوصیات مواد برخوردکننده در آهنگ کرنش‌های بسیار بالا، این پدیده بسیار پیچیده و بغرنج بوده و مسائل و مشکلات فراوانی را به همراه دارد. پارامترهایی همچون جنس، خواص مکانیکی، ضخامت کل، سرعت، تعداد لایه‌ها و نحوه قرارگیری آنها و شرایط تکی هگامی از جمله پارامترهای مهم هدف در فرآیند نفوذ هستند. پارامترهای دیگری از هدف همچون یکنواختی و همگنی هدف نیز بطور بدیهی در فرآیند نفوذ مؤثر هستند. وجود ترک، حفره و یا ناخالصی در هدف باعث ایجاد تمرکز تنش در ناحیه فوق شده و از استحکام هدف بطور جدی می‌کاهد. و در سال ۱۹۶۷ توسط تیت [۱، ۲] و در سال ۱۹۶۶ توسط آکسیوسکی [۳] بطور مستقل، مدلی یک بعدی پیشنهاد شد؛ که برای روند سرعتی که در آن پرتابه حین نفوذ در هدف فرسوده می‌شود، مرجع استاندارد برای نفوذ پرتابه‌های میله بلند در اهداف ضخیم ارائه گردید. در مدل اصلی تیت، پرتابه بجز در ناحیه بسیار کوچکی نزدیک سطح مشترک پرتابه-هدف که در آن فرسایش رخ می‌دهد، صلب فرض می‌گردد. رفتار در این سطح مشترک به وسیله  $\Sigma$  اصلاح معادله برنولی حاصل شده است، کنترل می‌گردد.

$$\Sigma = \frac{1}{\rho_p} \rho_p (v - u)^2 + Y_p = \frac{1}{\rho_p} \rho_t u^2 + R_t. \quad (1)$$

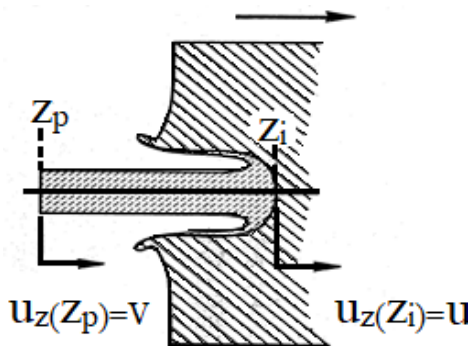
در این معادله  $\rho_p$  و  $\rho_t$  بترتیب چگالی‌های پرتابه و هدف می‌باشند و  $v$  سرعت انتهای پرتابه و  $u$  سرعت نفوذ می‌باشد و  $Y_p$  مقاومت پرتابه و  $R_t$  بعنوان مقاومت هدف، در فرمول‌بندی یک بعدی تعریف می‌شود. بطور فیزیکی، وقوع نفوذ یک بعدی نیست؛ لذا در یک مدل یک بعدی، بایستی برای بیان صدمات جانبی هدف، از چند پارامتر مجازی استفاده گردد. این نقش را  $R_t$  در معادله (۱) بر عهده دارد. (اغلب به عنوان فشار در امتداد خط المركز شناخته می‌شود) که در واقع تنش محوری است، حاصل جمع فشار هیدرودینامیک طی دوره‌ای در ارتباط با مقاومت ماده است. پرتابه بوسیله یک نیروی انتقال یافته از سطح مشترک و در امتداد طول پرتابه، کاهش سرعت می‌دهد. برای حالتی که در آن  $Y_p < R_t$  است، تنشی که پرتابه می‌تواند تحمل نماید  $Y_p$  است. بنابراین کاهش سرعت و نرخ فرسایش (آهنگ زمانی تغییر طول پرتابه) با استفاده از  $L$  طول لحظه‌ای پرتابه با روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\rho_p L \frac{dv}{dt} = -Y_p, \quad (2)$$

$$\frac{dL}{dt} = -(v - u). \quad (3)$$

برای حالت  $Y_p < R_t$  یک سرعت بحرانی وجود دارد که با رابطه  $\sqrt{\frac{R_t - Y_p}{\rho_p}}$  بدست می‌آید و در زیر سرعت بحرانی، نفوذ متوقف می‌گردد.

<sup>1</sup>Tate <sup>2</sup>Alekseevskii



شکل ۲: نفوذ پرتابه در هدف در زمان  $t > 0$  [۷].

اکنون که معادله موازنه مومنتوم را در امتداد خط‌المركز روی پرتابه و هدف و یا  $[z_p(t), +\infty]$  انتگرال‌گیری کرده و با فرض اینکه تغییر چگالی در هر دوی پرتابه و هدف قابل اغماض است، با انتگرال‌گیری معادله (۱۰):

$$\rho_p \int_{z_p}^{z_i} \frac{\partial u_z}{\partial t} dz + \rho_t \int_{z_i}^{+\infty} \frac{\partial u_z}{\partial t} dz + \frac{1}{\gamma} \rho_p u_z^2 \Big|_{z_p}^{z_i} + \frac{1}{\gamma} \rho_t u_z^2 \Big|_{z_i}^{+\infty} - \sigma_{zz} \Big|_{z_p}^{+\infty} - \gamma \int_{z_p}^{+\infty} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = 0 \quad (11)$$

چون ماده هدف، در فواصل زیاد  $z$ ، در وقوع نفوذ نقشی ندارد، لذا:  $u_z(+\infty) = 0$  و  $\sigma_{zz}(+\infty) = 0$  در ضمن چون سطح پشتی پرتابه سطح آزاد است و بدون تنش، بنابراین:  $\sigma_{zz}(z_p) = 0$ . از ترکیب این نتایج به همراه تعاریف معادله (۶) بدست می‌آید:

$$\rho_p \int_{z_p}^{z_i} \frac{\partial u_z}{\partial t} dz + \rho_t \int_{z_i}^{+\infty} \frac{\partial u_z}{\partial t} dz + \frac{1}{\gamma} \rho_p (u^2 - v^2) - \frac{1}{\gamma} \rho_t u^2 - \gamma \int_{z_p}^{+\infty} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = 0 \quad (12)$$

برای انتگرال‌گیری این معادله، فرضیات بیشتری بایستی درباره پروفیل سرعت  $u_z(z)$  و رفتار تنش برشی ایجاد گردند.

### ۳ مدل‌سازی

برای تأسیس و ایجاد یک مدل واقعی‌تر، معمولاً به فیزیک یا مکانیک‌های توسعه یافته‌تری نیاز است. فرضیاتی که در ادامه اتخاذ گشته‌اند، براساس آزمایش‌های بسیار زیادی که از برخورد پرتابه میله بلند، در سرعت‌های مختلف و با مواد مختلف، به صورت شبیه‌سازی عددی انجام شده، استوار گردیده است. این فرضیات عبارتند از:

۱. پروفیل سرعت، در امتداد خط‌المركز پرتابه و هدف معلوم است.
۲. انتهای عقبی پرتابه متناسب با مقاومت تسلیم پرتابه و به وسیله موج الاستیک کاهش سرعت می‌دهد. این امواج از انتهای پرتابه منعکس شده و سبب کاهش سرعت آن می‌شوند. در جلوی پرتابه، انعکاس امواج بجای سطح مشترک پرتابه-هدف، از منطقه پلاستیک انجام می‌گردد.
۳. رفتار برشی در ماده هدف معلوم است. این موضوع مستقل از فرض اول نیست و نشان داده خواهد شد که نتایج کاملاً به این جمله حساس می‌باشند.

نه بدلیل وجود نقص در رابطه کاهش سرعت پرتابه. شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهند، قسمتی از پرتابه که مصرف نشده، در انتهای حفره به وجود آمده از برخورد باقی می‌ماند و این موضوع با آزمایشات تجربی نیز سازگار است. به دلیل آزمایش با مدل تیت و با توجه به اینکه معادله برنولی می‌تواند از موازنه مومنتوم حاصل گردد، معادله مومنتوم محوری با دقت بیشتری مورد استفاده قرار گرفته است. یک سری فرضیات اتخاذ گردیده‌اند که تعدادی از آنها حاصل تحلیل نتایج شبیه‌سازی عددی می‌باشند. با استفاده از این فرضیات، یک مدل نفوذ ایجاد گردیده است که شامل اثرات گذرا می‌باشد [۶]. در این مقاله، با استفاده از تئوری اصلاح شده معادله برنولی و انبساط حفره کروی در هدف، معادله مومنتوم محوری، مدل تحلیلی نفوذ والکر و اندرسون ارائه شده‌است. این مدل جدید، مرحله اولیه و نهایی را که در نفوذ میله بلند دیده می‌شود، مدنظر قرار می‌دهد. چون هدف حفظ سادگی مدل تیت بوده است، لذا مدل ایجاد شده برای کاهش به مدل اصلی تیت، بر روی محدوده معینی، رفتار رضایت‌بخشی را نشان می‌دهد.

### ۲ موازنه مومنتوم

فرض می‌گردد که پرتابه و هدف دارای تقارن محوری بوده و در امتداد محور  $z$  قرار گرفته‌اند. موقعیت سطح مشترک مابین پرتابه-هدف با  $z_i(t)$  نشان داده می‌شود و  $z_i(0) = 0$  در نظر گرفته می‌شود. عقب پرتابه با  $z_p(t)$  نشان داده می‌شود و  $z_p(0) = -L_0$  است که در آن  $L_0$  طول اولیه پرتابه است. سرعت در امتداد خط‌المركز پرتابه و هدف بصورت  $u_z(z)$  نوشته می‌شود. با این تعاریف، سرعت سطح مشترک  $u$  و سرعت عقب پرتابه  $v$  بوسیله روابط زیر داده می‌شوند:

$$u = \frac{dz_i}{dt} = u_z(z_i) \quad (6)$$

$$v = \frac{dz_p}{dt} = u_z(z_p) \quad (7)$$

فرض می‌گردد که هدف نیمه بی‌نهایت است. شکل ۲ نفوذ پرتابه در هدف به همراه علائم مختصات را در زمان  $t > 0$  نمایش می‌دهد. روش اصلی مدل عرضه شده در این سطح، استفاده از موازنه مومنتوم در امتداد محور  $z$  است. مؤلفه  $z$  معادله عمومی مومنتوم اویلری عبارت است از:

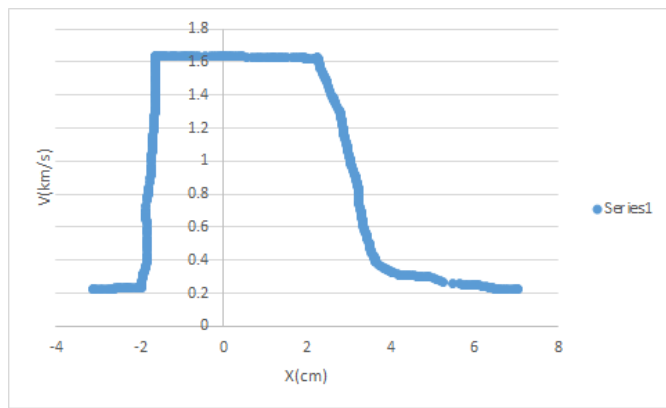
$$\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (8)$$

و به دلیل داشتن تقارن روی محور که در آن  $x = y = 0$  است، خواهیم داشت  $u_x = u_y = 0$ . چون مسیرهای  $x$  و  $y$  معادل هستند، بنابراین:

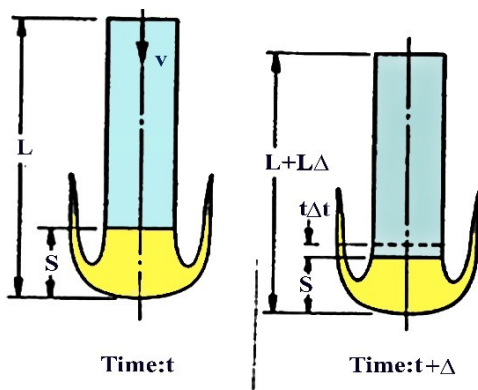
$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \gamma \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \quad (9)$$

که موازنه مومنتوم در امتداد خط‌المركز، بصورت زیر ساده می‌گردد:

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \rho \frac{\partial (u_z)^2}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \gamma \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = 0 \quad (10)$$



شکل ۳: سرعت محوری در امتداد خط‌المركز پرتابه-هدف.



شکل ۴: پرتابه در زمان‌های  $t$  و  $t + \Delta t$ .

رفتار سرعت در هدف از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. چون میدان‌های سرعت در شبیه‌سازی‌های عددی دارای رفتار نیم‌کروی می‌باشند، به همین دلیل از میدان جریان نوشته‌شده در مختصات کروی استفاده می‌شود. با قرار دادن

$$r(z) = z - z_i(t) + R, \quad (16)$$

که در آن  $R$  شعاع حفره می‌باشد، فرم سرعت ذیل در هدف فرض می‌گردد:

$$u_z(z) = \begin{cases} \frac{u}{\alpha^2 - 1} \left[ \left( \frac{\alpha R}{r(z)} \right)^2 - 1 \right], & R \leq r(z) < \alpha R \\ 0, & r(z) \geq \alpha R \end{cases} \quad (17)$$

این پروفیل، در شکل ۳ بصورت خط چین ترسیم گردیده است و همچنین پروفیل سرعت پرتابه با استفاده از معادله (۱۳) نیز رسم شده است. پروفیل فرض شده، یک تشابه را با شبیه‌سازی عددی نمایش می‌دهد. اگرچه هدف نیمه بی‌نهایت فرض شده است ولی پروفیل سرعت فقط روی دامنه محدودی قرارداد. دورترین حوزه در هدف  $z = z_i + (\alpha - 1)R$  می‌باشد. در بعضی موارد ممکن است بعنوان حوزه منطقه پلاستیک درهدف مدنظر قرار گیرد و بنابراین برای مثال مشتق زمانیش معادل سرعت انبساط منطقه پلاستیک باشد. بدست آوردن حوزه و نرخ افزایش منطقه پلاستیک درهدف، پیچیده و مشکل است. در مثال‌ها چندین شیوه مختلف برای تعیین عرضه خواهد شد. دقیقاً به همان صورت که برای پرتابه عمل شد، انتگرال مشتق جزئی سرعت

با عبارات مناسب منتج از فرضیات اول و سوم، معادله مومنتوم محوری می‌تواند برای بدست آوردن یک معادله حرکت، برای تعیین موقعیت سطح مشترک ما بین هدف و پرتابه، انتگرال‌گیری گردد. دومین فرض، معادله‌ای را برای کاهش سرعت انتهای عقبی پرتابه فراهم می‌آورد. این فرضیات، به همراه معادله مومنتوم، به دو مورد دیگر اطلاعات که برای مدل تیت لازم است، یعنی سرعت اولیه سطح مشترک و یک عبارت که شعاع حفره را به سرعت برخورد مربوط نماید، نیازمند است. اولی از معادلات برخورد یک بعدی (سرعت ذره در روابط رانکین-هوگونیوت<sup>۳</sup>) بدست می‌آید و شعاع حفره به صورت تابعی از سرعت برخورد، از داده‌های تجربی حاصل می‌شود. و بالاخره یک شیوه مستقل برای تعیین حوزه جریان پلاستیک در درون ماده هدف مورد نیاز است و حل انبساط حفره<sup>۴</sup> برای تخمین حوزه جریان پلاستیک مورد استفاده قرار می‌گیرد که در بخش مثال‌ها مورد بحث قرار گرفته است.

### ۱.۳ فرض اول. پروفیل سرعت در پرتابه

خط پیوسته در شکل ۳ حاصل از شبیه‌سازی عددی، پروفیل سرعت در امتداد خط‌المركز یک پرتابه میله بلند تنگستنی است که در یک هدف فولادی نیمه بی‌نهایت نفوذ نموده است. سرعت در بیشترین مقدار طول پرتابه، بجز برای یک منطقه کوچکی در نزدیکی سطح مشترک پرتابه-هدف ثابت است. این پروفیل سرعت، به وسیله یک عبارت دوخطی<sup>۵</sup> و یا با دو خط مستقیم تقریب زده خواهد شد و  $s$  حوزه منطقه پلاستیک در امتداد محوری مکانی که سرعت تغییر می‌نماید (با شیب ثابت) است. سرعت در پرتابه می‌تواند به صورت رابطه (۱۳) نوشته شود:

$$u_z(z) = \begin{cases} u - \frac{v-u}{s}(z-z_i), & (z_i - s) \leq z < z_i \\ v, & z_p \leq z < (z_i - s) \end{cases} \quad (13)$$

مشتق جزئی نسبت به زمان این پروفیل سرعت، در معادله (۱۲) مورد نیاز است. از آنجا که  $u, s, z_i(t)$  و فقط به زمان بستگی دارند و چون  $\frac{dz_i(t)}{dt} \equiv u$  است، مشتق جزئی معادله (۱۳) عبارت است از:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}(z) = \begin{cases} \dot{u} - \left( \frac{v-\dot{u}}{s} \right) (z-z_i) - \frac{v-u}{s} u, & (z_i - s) \leq z < z_i \\ \dot{v}, & z_p \leq z < (z_i - s) \end{cases} \quad (14)$$

شکل ۳ پروفیل سرعت محوری در امتداد خط‌المركز پرتابه-هدف بوده و خطوط مقطع از معادلات (۱۳) و (۱۷) بدست آمده‌اند.

در شکل ۴ پرتابه در زمان‌های  $t$  و  $t + \Delta t$  را نشان می‌دهد. نقطه‌ها، مشتق نسبت به زمان را ارائه می‌نمایند و نقطه روی  $\frac{v-u}{s}$  اولین عبارت در جمله دوم در طرف سمت راست معادله (۱۴) بیانگر آن است که تمام جملات نسبت به زمان مشتق‌گیری می‌شوند. معادله (۱۲) به انتگرال‌گیری معادله (۱۴) روی محدوده  $(z_p, z_i)$  نیازمند است.

$$\int_{z_p}^{z_i} \frac{\partial u_z}{\partial t} dz = \dot{v}(L-s) + \dot{u}s + (v-u)u + \left( \frac{v-\dot{u}}{s} \right) \frac{s^2}{2}. \quad (15)$$

<sup>3</sup>Rankine-Hugoniot <sup>4</sup>cavity expansion <sup>5</sup>bilinear

داده شده است. بنابراین تنش موج الاستیک که تنش سیلان پرتابه در خلال جریان فرسایش است، سرعت ذره را به صورت زیر ارائه می‌نماید:

$$cf' = c\epsilon = -c \frac{\sigma_p}{E_p} \quad (25)$$

وقتی که موج الاستیک فشاری از سطح آزاد انتهایی پرتابه منعکس می‌گردد، به همراه موجی به فرم  $-f(z - ct)$  به صورت کششی بازگشت می‌نماید. تغییر در سرعت ذره در سطح عقب پرتابه عبارت است از:

$$\Delta v = -c \frac{\sigma_p}{E_p} - c \frac{\sigma_p}{E_p} = -2c \frac{\sigma_p}{E_p} \quad (26)$$

یعنی تغییر سرعت ذره در سطح آزاد دو برابر سرعت ذره موج است. به دلیل پاسخ غیرخطی ماده، سطح مشترک الاستیک-پلاستیک مرز انعکاسی است. به دلیل غیرخطی بودن ماده، موج الاستیک نمی‌تواند به آسانی روی پاسخ پلاستیک اعمال نفوذ نماید و بعضی از انعکاسات موج الاستیک، وقتیکه موج پلاستیک از انتهای پرتابه بازگشت می‌نماید و به سطح مشترک الاستیک-پلاستیک می‌رسد، اتفاق می‌افتند. بنابراین موج فشاری از سطح مشترک پلاستیک حرکت می‌کند و به صورت یک موج کششی از سطح آزاد انتهایی منعکس می‌گردد و به سطح مشترک پلاستیک یعنی جایی که دوباره به صورت موج فشاری انعکاس می‌یابد بر می‌گردد و این سیکل تکرار می‌شود. زمان حرکت موج، از تقسیم فاصله بر سرعت موج به دست می‌آید. به دلیل فرسایش و تغییر در اندازه منطقه پلاستیک، فاصله برگشت کمتر می‌گردد. اگر زمان یک دور باشد، پس خواهیم داشت:

$$c\Delta t = L - s + L - \int_0^{\Delta t} (v - u)dt - (s + \int_0^{\Delta t} \dot{s}dt) \quad (27)$$

جهت بدست آوردن یک تقریب پیوسته برای کاهش سرعت انتهایی پرتابه، با استفاده از معادلات (۲۶) و (۲۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &\approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ -\frac{c^2 \sigma_p}{E_p(L-s)} \left( 1 + \frac{1}{c\Delta t} \int_0^{\Delta t} (v-u)dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{c\Delta t} \int_0^{\Delta t} \dot{s}dt \right) \right] \\ &= -\frac{\sigma_p}{\rho_p(L-s)} \left[ 1 + \frac{v-u}{c} + \frac{\dot{s}}{c} \right] \quad (28) \end{aligned}$$

معادله (۲۸)، معادله حرکت انتهایی عقبی پرتابه است. اگرچه این معادله، به طول کامل پرتابه وابسته نیست اما به جای آن، به دلیل انعکاس موج از مرز الاستیک-پلاستیک درون پرتابه، به طول کاهش یافته وابسته است. با استفاده از مرز الاستیک و پلاستیک برای انعکاس موج، به جای سطح مشترک پرتابه-هدف، سازگاری بهتری با نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های عددی ایجاد می‌گردد و اینکار برای بدست آوردن نتایج معقول مرحله نهایی نفوذ ضروری است. سرانجام توجه شود که آهنگ فرسایش، آهنگ کاهش سرعت پرتابه را افزایش می‌دهد؛ چون  $L$  با زمان کاهش می‌یابد.

نسبت به زمان روی محدوده  $(z_i, +\infty)$  مورد نیاز است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial t}(z) &= \frac{\dot{u}}{\alpha^2 - 1} \left[ \left( \frac{\alpha R}{r(z)} \right)^2 - 1 \right] + \dot{z}_i \frac{2u(\alpha R)^2}{(\alpha^2 - 1)(r(z))^3} \\ &\quad + \dot{\alpha} \left[ \frac{-2u\alpha}{(\alpha^2 - 1)^2} \left\{ \left( \frac{\alpha R}{r(z)} \right)^2 - 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u}{\alpha^2 - 1} \frac{2R^2\alpha}{(r(z))^2} \right], \quad R \leq r \leq \alpha R \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{+\infty} \frac{\partial u_z}{\partial t} dz &= \int_R^{\alpha R} \frac{\partial u_z}{\partial t} dr \\ &= \dot{u} R \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} + \dot{\alpha} \frac{2Ru}{(\alpha + 1)^2} + u^2 \quad (19) \end{aligned}$$

فرض گردیده که شعاع حفره  $R$  ثابت است.

### ۲.۳ فرض دوم. کاهش سرعت انتهایی پرتابه

همانطور که گفته شد پرتابه توسط امواج الاستیک کاهش سرعت می‌دهد. این امواج الاستیک که در امتداد طول پرتابه حرکت می‌نمایند، بصورت تغییرات کوچک سرعت در پروفیل فرض شده سرعت پرتابه نمایان خواهند گردید. شبیه‌سازی عددی بخوبی این مرحله کاهش سرعت در انتهای پرتابه را نشان می‌دهد شکل ۱ ولی با وجود این، جهت حفظ سادگی مدل، فقط متوسط مومنتم رفتار پرتابه توسط پروفیل سرعت و معادله (۱۳) مد نظر قرار می‌گیرد و معادله دومی برای توصیف کاهش سرعت انتهایی پرتابه نوشته می‌شود. امواج تنش متحرک در طول پرتابه، معادله موج میله را ارضا خواهند کرد که معادله حرکت پرتابه تحت سرعت  $v$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (20)$$

که در آن  $f$  تغییر مکان و  $c$  سرعت موج است و در این حالت سرعت موج الاستیک میله  $\sqrt{\frac{E_p}{\rho_p}}$  می‌باشد. یک موج الاستیک که از جلو به عقب پرتابه حرکت می‌کند، می‌تواند به صورت زیر بیان گردد:

$$f = f(z + ct) \quad (21)$$

و طبق آن، سرعت ذره موج (سرعت واقعی ماده در جبهه موج) و کرنش در موج می‌تواند تعیین گردد:

$$\text{سرعت ذره} = \frac{\partial f}{\partial t} = cf' \quad (22)$$

$$\epsilon = \frac{\partial f}{\partial z} = f' \quad (23)$$

موج تنش، الاستیک است و تنش مربوط به آن از قانون هوک بدست می‌آید.

$$-\sigma_p = E_p \epsilon = E_p f' \quad (24)$$

که در آن  $\sigma_p \geq 0$  مقدار موج تنش در پرتابه است. علامت منفی به دلیل اینکه موج حرکت کننده از سمت عقب پرتابه فشاری می‌باشد قرار



### ۳.۳ فرض سوم. رفتار تنش فرض شده در هدف

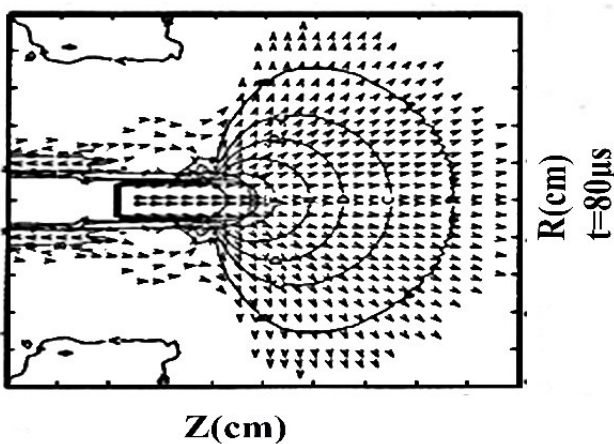
که سپس برای ضرب داخلی آهنگ تغییر فرم می‌دهد:

$$D_{ij}D_{ij} = \frac{3}{4} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2, \quad (35)$$

که در آن، تقارن مابین  $x$  و  $y$  مورد استفاده قرار گرفته است. تنش برشی خاص مورد نظر عبارت است از:

$$s_{xz} = \lambda D_{xz} = \frac{Y_t}{\sqrt{6} D_{ij} D_{ij}} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (36)$$

چون مشتق‌گیری در امتداد خط‌المركز انجام می‌شود، عبارات می‌توانند ساده‌تر گردند. چون  $D_{ij}D_{ij}$  نسبت به  $x$  و  $y$  فرد است. شکل ۵ میدان سرعت در اطراف پرتابه حاصل از شبیه‌سازی عددی را نشان می‌دهد که پرتابه از جنس تنگستن و هدف از جنس فولاد و سرعت برخورد  $1/5 \text{ km/s}$  است.



شکل ۵: میدان سرعت در اطراف پرتابه حاصل از شبیه‌سازی عددی [۷].

مشتق  $D_{ij}$  نسبت به  $x$  در امتداد  $x = 0$  صفر می‌باشد؛ بنابراین:

$$\frac{\partial s_{xz}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{Y_t}{\sqrt{6} D_{ij} D_{ij}} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0}. \quad (37)$$

دوم اینکه در امتداد خط‌المركز  $u_x = 0$  است و بنابراین  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$ . سوم اینکه،  $u_z$  در  $x$  فرد است و بنابراین در امتداد خط‌المركز. چهارم اینکه،  $u_y$  در  $x$  فرد است و بنابراین. این سه مورد آخری، محاسبات  $D_{ij}$  در امتداد خط‌المركز را امکان‌پذیر می‌سازند. سرانجام اگر مرتبه مشتقات جزئی را برای جملات مرکب در معادله (۳۷) عوض کرده و معادله (۳۴) می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به همه این موارد خواهیم داشت:

$$\frac{\partial s_{xz}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\frac{1}{4} Y_t}{\left| \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \Big|_{x=0}. \quad (38)$$

مورد انتظار است که  $\frac{\partial u_z}{\partial z} < 0$  باشد؛ یعنی سرعت میدان جریان در هدف بطور یکنواخت در حین حرکت در هدف و در جهت دور شدن از دماغه پرتابه کاهش یابد. بنابراین مقدار قدرمطلق در مخرج کسر می‌تواند با  $-\frac{\partial u_z}{\partial z}$  جایگزین گردد. بنابراین حاصل می‌شود:

$$\int_R^{\alpha R} \frac{\partial s_{xz}}{\partial x} \Big|_{x=0} dr = \frac{Y_t}{6} \ln \left| \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{r=R}^{r=\alpha R} - \frac{Y_t}{3} \int_R^{\alpha R} \left( \frac{\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}}{\frac{\partial u_z}{\partial z}} \right) \Big|_{x=0} dr, \quad (39)$$

به طور واقعی این قسمت مشکل‌ترین و مهم‌ترین قسمت همه مدل‌های نفوذ است. سؤال اساسی وقتی که بحث به اینجا می‌رسد این است که «هدف در مقابل نفوذ چگونه استقامت می‌نماید؟». ایده‌ای که در اینجا چه اتفاقی رخ می‌دهد، در ادامه ارائه می‌گردد. ابتدا اجازه دهید فرض نماییم که میدان‌های جریان سه بعدی در هدف می‌توانند تعیین شوند. در صورتیکه هدف، به طریقه پلاستیک کامل رفتار نماید، تنش‌ها می‌توانند از قانون فون میسز محاسبه گردند. سپس این تنش‌ها برای محاسبه جملات تنش در معادله (۱۳) بکار خواهند رفت. اقتباس واقعی مشتمل بر دو بخش است:

۱. مشتقی که در یک عبارت برای گرادیان تنش برشی با جملاتی از گرادیان‌های میدان سرعت نتیجه می‌شود.
۲. فرمول‌بندی یک میدان جریان سرعت که ارزیابی مستقیم جملات در گرادیان سرعت را امکان‌پذیر می‌سازد.

### ۴.۳ ارزیابی گرادیان تنش در جملات یک میدان جریان پلاستیک

در ابتدا فرض کرده که میدان جریان جهت محاسبه تنش‌ها برای ما معلوم باشد. در تئوری پلاستیسیته تنش با اثر  $s_{ij}$  در ماده، به صورت زیر داده می‌شود [۸، ۹]:

$$s_{ij} = \lambda D_{ij}, \quad (29)$$

که در آن  $\lambda$  یک ثابت است و

$$D_{ij} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (30)$$

تانسور با اثر آهنگ تغییر شکل است (چون رفتار پلاستیک کامل فرض شده است، به دلیل غیرقابل تراکم بودن، تانسور آهنگ تغییر شکل معادل با قسمت با اثرش است). سطح تسلیم فون میسز با رابطه زیر داده می‌شود:

$$s_{ij} \cdot s_{ij} \equiv 2J_2 = \frac{2}{3} Y_t^2. \quad (31)$$

با داشتن معادلات (۲۹) و (۳۱):

$$s_{ij} \cdot s_{ij} = \lambda^2 D_{ij} D_{ij} = \frac{2}{3} Y_t^2, \quad (32)$$

و این یک عبارت را برای با اثرهای تنش در جملات جریان فراهم می‌کند. یعنی:

$$s_{ij} = \lambda D_{ij} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} Y_t}{D_{ij} D_{ij}} D_{ij} \quad (33)$$

اطلاعات مورد نیاز برای ارزیابی جمله آخر در معادله (۱۲)، مشتق تنش برشی  $s_{xz} = \sigma_{xz}$  در امتداد خط‌المركز  $x = y = 0$  می‌باشد. چون جریان غیرقابل تراکم است، روابط زیر حفظ می‌شوند:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (34)$$

زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{2fz^2}{r^3} + \left( f' + \frac{f}{r} \right) \left( \frac{x}{r} \right)^2 \right] \Big|_{x=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f'xz^2}{r^3} - \frac{2fzx^2}{r^5} \right) \Big|_{x=0} + 2 \left( f' + \frac{f}{r} \right) \frac{1}{r^3} \Big|_{x=0} \\ &= 2 \left( \frac{f'z^2}{r^3} - \frac{2fz^2}{r^5} \right) \Big|_{x=0} + 2 \left( f' + \frac{f}{r} \right) \frac{1}{r^3} \Big|_{x=0} \\ &= 2 \left( \frac{f'}{z^2} - \frac{2f}{z^3} \right) + 2 \left( f' + \frac{f}{z} \right) \frac{1}{z^3} \\ &= \frac{4}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f}{z} \right), \end{aligned} \quad (44)$$

که در آن، از این حقیقت که ارزیابی در امتداد خط  $x = 0$  انجام می‌شود، چندین مرتبه استفاده شده است. بنابراین انتگرال طرف راست انتگرال معادله (۳۹) معادل  $\frac{1}{z}$  است؛ لذا همه انتگرال عبارت است از:

$$\int_R^{\alpha R} \frac{\partial s_{xz}}{\partial x} \Big|_{x=0} dz = \frac{Y_t}{6} \ln \left| \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=\alpha R} - \frac{2Y_t}{3} \ln \alpha. \quad (45)$$

آنچه که درباره این نتایج قابل توجه است، این است که چندین فرض روی میدان جریان، فراهم شده است:

۱. میدان جریان در امتداد محور بطور یکنواخت کاهش می‌یابد.
۲. دارای یک رفتار معین و معقول نیم‌کروی است.

نتایجی که از این فرضیات حاصل می‌گردد این است که جمله برشی در موازنه مومنت فقط به حوزه میدان جریان ( $\alpha$ ) و شیب‌های سرعت در انتهای جلویی و عقبی میدان جریان وابسته است. تأکید کرده که این نتایج، برای یک میدان جریان پلاستیک بوده و خواص میدان جریان، رفتار پلاستیک را منعکس می‌نماید. به عنوان مثال اولین جمله در سمت راست معادله (۴۵) بیان می‌کند که سرعت جریان پلاستیک محوری نمی‌تواند بر محور صفر مماس گردد؛ بنابراین مشتق میدان جریان مجاز به صفر شدن نمی‌باشد. پروفیل سرعت فرض شده در هدف معادله (۳۱) می‌تواند در جملاتی از پتانسیل عرضه گردد معادله (۴۰) و بعلاوه معادله (۳۱) بطور یکنواخت با فاصله از سطح مشترک پرتابه-هدف کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توان میدان جریان سرعت را با میدان جریان تنش برشی پیوند داد. (این اتصال و پیوند ضروری نیست ولی مناسب است و امکان دستیابی به یک المان مستقل فراهم می‌آید). شیب پروفیل سرعت در هدف عبارتست از:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2 \frac{u}{\alpha^2 - 1} \frac{(\alpha R)^2}{z^3}, \quad (46)$$

و با ارزیابی آن در  $z = R$  و  $z = \alpha R$  بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \int_R^{\alpha R} \frac{\partial s_{xz}}{\partial x} \Big|_{x=0} dz &= \frac{Y_t}{6} \ln \frac{1}{\alpha^3} - \frac{2Y_t}{3} \ln \alpha \\ &= -\frac{Y}{6} \ln(\alpha) Y_t \end{aligned} \quad (47)$$

این معادله، رفتار تنش فرض شده را کامل می‌نماید. نتایج نهایی ساده و زیباست و در ضمن حداقل فرضیات در طول مسیر ایجاد گردیده است.

که در آن  $r(z)$  در معادله (۱۶) تعریف گردید. برای ارزیابی انتگرال معادله (۳۹) اطلاعاتی درباره میدان جریان نیاز است.

### ۵.۳ ارزیابی گرادیان‌های میدان جریان پلاستیک

چون دیورژانس کرل<sup>۶</sup> هر میدان برداری صفر است، جریان‌های غیرقابل تراکم می‌توانند از کرل پتانسیل برداری حاصل شوند. چون جریان در اطراف دماغه پرتابه در هدف دارای کیفیت کروی است شکل ۵، برای تولید یک پتانسیل، راحت‌تر است که چنین میادین جریانی، در هندسه کروی ایجاد گردند  $(r, \phi, \theta)$ . بطور خاص، پتانسیلی که نوعی از حرکت ماده را تولید می‌نماید و در محاسبات عددی دیده می‌شود عبارت است از [۱۰]:

$$A = f(r) \sin \theta \hat{e}_\phi. \quad (40)$$

در این معادله و معادلات ذیل، شعاع کروی و  $\theta$  زاویه اندازه‌گیری شده از محور  $z$  می‌باشد. کرل‌گیری از معادله (۴۰)، میدان جریانی به فرم زیر را ارائه می‌نماید:

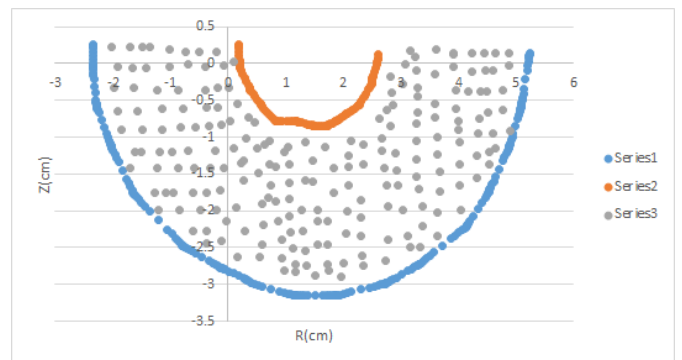
$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \frac{2f}{r} \cos \theta, \\ u_\theta(r, \theta) &= -\frac{1}{2} \frac{d(rf)}{dr} \sin \theta. \end{aligned} \quad (41)$$

میدان سرعت داده‌شده توسط معادله (۴۱) در شکل ۶ نشان داده شده است. با استفاده از  $\sin \theta = \frac{x}{r}$  و  $\cos \theta = \frac{z}{r}$  و  $r = \sqrt{z^2 + x^2}$  مؤلفه  $z$  سرعت به وسیله رابطه زیر داده می‌شود:

$$u_z = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta = \frac{2f}{r} \left( \frac{z}{r} \right)^2 + \left( f' + \frac{f}{r} \right) \left( \frac{x}{r} \right)^2 \quad (42)$$

که اولین مشتق نسبت به  $r$  را نشان می‌دهد و اطلاعات کافی برای کامل کردن جمله انتگرال در سمت راست معادله (۳۹) را فراهم می‌آورد. مخرج کسر جمله عبارت است از:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2fz^2}{z^3} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f}{z} \right). \quad (43)$$



شکل ۶: میدان سرعت از معادله (۴۱) با  $\alpha = 3$  و  $R = 1$  cm.

شکل ۶ میدان سرعت با  $\alpha = 3$  و  $R = 1$  cm را نشان می‌دهد. زیرا وقتی که  $x = 0$  است،  $r = z$  می‌باشد. جمله صورت کسر، به وسیله رابطه

<sup>6</sup>curl

### ۶.۳ حوزه منطقه جریان پلاستیسیته در پرتابه

حوزه جریان پلاستیک در پرتابه، به وسیله طول  $s$  در جلوی پرتابه تعریف می‌شود (اندازه‌گیری شده از سطح مشترک پرتابه-هدف). برای حفظ سادگی از جمله برشی صرف نظر می‌گردد. تلاش برای تعیین حوزه جریان پلاستیک در پرتابه بر اساس مشاهدات زیادی که از شبیه‌سازی‌های عددی و با استفاده از مواد مختلفی انجام شده است و در ادامه ارائه می‌شود، استوار گردیده است. این مشاهدات عبارتند از: شیب پروفیل سرعت در امتداد خط‌المركز در سطح مشترک ماده یکنواخت است - مثلاً شکل ۳. به عبارت دیگر، نه فقط پروفیل سرعت پیوسته است، بلکه مشتق اول آن نیز در امتداد محور پیوسته است. بنابراین اقتباس یک عبارت برای  $s$  و همینطور برای مشتق زمانیش امکان‌پذیر است. شیب پروفیل سرعت فرض شده در هدف در معادله (۴۶) محاسبه شده است. اگر این ارزیابی در سطح مشترک انجام پذیرد و معادل تغییر سرعت در پرتابه تقسیم بر طول  $s$  قرار گیرد خواهیم داشت:

$$\frac{u-v}{s} = -\frac{2}{\alpha^2-1} \frac{u}{R} \alpha^2 \quad (48)$$

معادله (۱۵) به  $s$  و  $\frac{d}{dt}\left(\frac{u-v}{s}\right)$  نیاز دارد. اگر معادله (۴۶) را برحسب  $s$  تنظیم کرده:

$$s = \frac{R}{\alpha^2} \left( \frac{u}{v} - 1 \right) \left( 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \quad (49)$$

و مشتق زمانی عبارت است از:

$$\left( \frac{v}{s} \dot{u} \right) = \frac{4}{(\alpha^2-1)R} \left[ \frac{\alpha^2 \dot{u}}{2} - \frac{u \alpha \dot{\alpha}}{\alpha^2-1} \right] \quad (50)$$

اکنون تمام جملات موجود در مدل محاسبه شده و برای ترکیب شدن آماده هستند.

### ۴ معادله موازنه مومنتوم

جملات بدست آمده در بخش قبلی را در معادله اصلی موازنه مومنتوم معادله (۱۲) جایگزین کرده و خواهیم داشت [۷]:

$$\begin{aligned} & \rho_p \dot{v}(L-s) + \dot{u} \left[ \rho_p s + \rho_t R \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right] \\ & + \rho_p \left( \frac{v}{s} \dot{u} \right) \frac{s^2}{\alpha^2} + \rho_t \dot{\alpha} \frac{2Ru}{(\alpha+1)^2} \\ & = \frac{1}{\alpha^2} \rho_p (v-u)^2 - \left[ \frac{1}{\alpha^2} \rho_t u^2 + \frac{v}{\alpha^2} \ln(\alpha) Y_t \right]. \quad (51) \end{aligned}$$

کاهش سرعت انتها پرتابه به وسیله معادله (۲۸) بدست می‌آید و آهنگ زمانی تغییر طول پرتابه برابر اختلاف مابین سرعت نفوذ و سرعت انتها پرتابه است. این دو معادله به همراه معادله (۵۱) بطور کامل مدل را تعیین می‌نمایند.

$$\dot{v} = -\frac{\sigma_p}{\rho_p(L-s)} \left( 1 + \frac{v-u}{c} + \frac{\dot{s}}{c} \right) \quad (52)$$

$$\dot{L} = -(v-u) \quad (53)$$

در صورتی که دو اندازه  $R$  و  $s$  به سمت صفر میل نمایند، یعنی  $R \rightarrow 0$  و  $s \rightarrow 0$ ، مدول یانگ نیز بتواند بسیار بزرگ گردد بطوری که  $c \rightarrow \infty$  اینصورت معادلات (۵۱) تا (۵۳) به عبارات زیر تبدیل خواهند شد:

$$-\rho_p \dot{v} L + \frac{1}{\alpha^2} \rho_p (v-u)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \rho_t u^2 + \frac{v}{\alpha^2} \ln(\alpha) Y_t, \quad (54)$$

$$\dot{v} = -\frac{\sigma_p}{\rho_p L}, \quad (55)$$

$$\dot{L} = -(v-u). \quad (56)$$

این معادلات همان مدل اصلی تیت می‌باشند و مقاومت هدف به وسیله رابطه زیر داده می‌شود [۱۱]:

$$R_t = \frac{v}{\alpha^2} \ln(\alpha) Y_t. \quad (57)$$

در ضمن توجه شود که  $Y_p$  در مدل تیت با تنش سیلان  $\sigma_p$  پرتابه مشخص می‌شود. تیت تفاوت‌هایی مابین  $Y_p$  در معادلات (۱) و (۲) قائل می‌گردد. در معادله (۲)،  $Y_p$  بصورت  $\sigma_p$  تعیین می‌گردد در حالیکه در معادله (۱)،  $Y_p = 1/\sqrt{\sigma_p}$  می‌باشد. این مدل کم‌ترین مقدار  $R_t$  را که با وسعت منطقه جریان پلاستیک و تنش سیلان  $Y_t$  هدف تغییر می‌نماید، پیش‌گویی می‌کند. یک دیدگاه جایگزین برای دومین و سومین و چهارمین جمله در معادله (۵۱) به همراه جمله  $\frac{v}{\alpha^2} \ln(\alpha) Y_t$  تعریف کننده یک متغیر زمانی  $R_t$  توسط اندرسون و همکارانش پیشنهاد شده است [۱۲].

### ۵ شرایط اولیه برخورد

سرعت اولیه نفوذ  $u$  از شرایط پرش شوک<sup>۷</sup> رانکین-هوگونیوت بدست می‌آید. برای سادگی فرض کرده که هوگونیوت مواد می‌تواند به وسیله یک رابطه خطی مابین سرعت شوک  $u_s$  و سرعت جزئی  $u_p$  بیان شود.

$$u_s = c_0 + k u_p, \quad (58)$$

که در آن  $c_0$  و  $k$  پارامترهای مواد هستند. با برابر گرفتن فشارهای شوک  $p = \rho_0 u_s u_p$  در سطح مشترک پرتابه-هدف و نشان دادن سرعت برخورد اولیه با  $v_0$ ، سرعت نفوذ اولیه بصورت زیر داده می‌شود:

$$u \equiv u_p^t = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$a = k^p - k^t \left( \frac{\rho_0^t}{\rho_0^p} \right), \quad (59)$$

$$b = 2k^p v_0 + c_0^p + c_0^t \left( \frac{\rho_0^t}{\rho_0^p} \right),$$

$$c = c_0^p v_0 + k^p v_0^2.$$

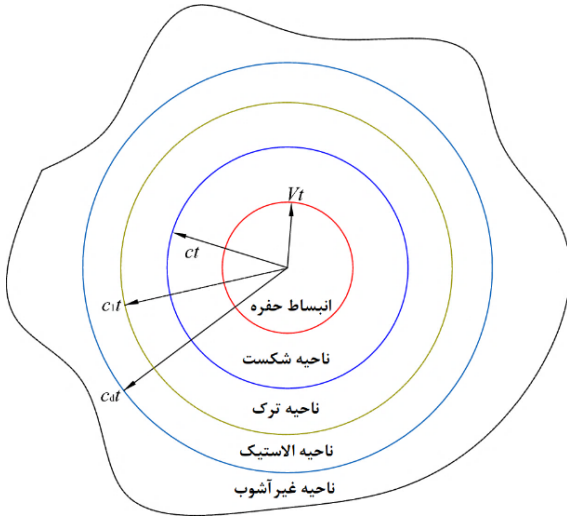
اندیس‌های بالا نشان‌دهنده پارامترهای هدف و پرتابه می‌باشند و اندیس‌های زیر «۰» مقادیر اولیه را نشان می‌دهند. معادله (۵۹) سرعت نفوذ اولیه را برای مدل فراهم می‌آورد. ولی توجه شود که برای نفوذ میله بلند نتایج نهایی حساسیت زیادی به این مقدار اولیه ندارند. یعنی نتایج مدل، همان سرعت حالت شبه پایدار مستقل از سرعت نفوذ اولیه را بدست می‌دهند.

<sup>7</sup>shock jump



## ۱.۵ نفوذ صلب

یک سرعت را برای سطح مشترک مابین منطقه پلاستیک و منطقه الاستیک بیرونی محاسبه می‌نمایند و  $\alpha R$  و  $R$  شعاع منبسط گردیده است. این مسأله در هر دو مختصات استوانه‌ای و کروی مورد آزمایش قرار گرفته است (غیرقابل تراکم) و نتیجه آن عبارتند از:



شکل ۸: هندسه انقباض حفره.

$$\alpha_{cyl} = \left( \frac{\sqrt{3} E_t}{2(1 + \nu_t) Y_t} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (61)$$

$$\alpha_{sph} = \left( \frac{2 E_t}{3 Y_t} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (62)$$

برای  $\nu = 0.3$  اختلاف واقعی این عبارات در توان آنهاست چون  $\frac{\sqrt{3}}{2(1+0.3)} = 0.6661730000 \approx \frac{2}{3}$  است. برای مساله بالا، معادلات فوق بترتیب مقادیر  $11/2$  و  $4/94$  را برای حالت‌های استوانه‌ای و کروی غیرقابل تراکم با استفاده از  $Y_t = 380 \text{ MPa}$  بدست می‌دهند. با توجه به شکل دیده می‌شود که مقدار انقباض استوانه‌ای حفره انطباق بهتری را با داده‌های آزمایش فراهم می‌آورد. مقدار  $\alpha = 8/1$  بهترین پیشگویی را برای انطباق با داده‌های تجربی فراهم می‌آورد. بطوری که در منحنی  $\alpha = 8/1$  می‌تواند دیده شود،  $\alpha$  ثابت عمق نفوذ را بصورت تابعی از سرعت در سرعت‌های بالای  $1 \text{ km/s}$  با مقدار بیشتری پیشگویی می‌نماید. وقتی که اثرات غیرقابل تراکم مدنظر قرار گیرند یک  $\alpha$  وابسته به سرعت، از حل انقباض حفره حاصل می‌شود که عبارت است از:

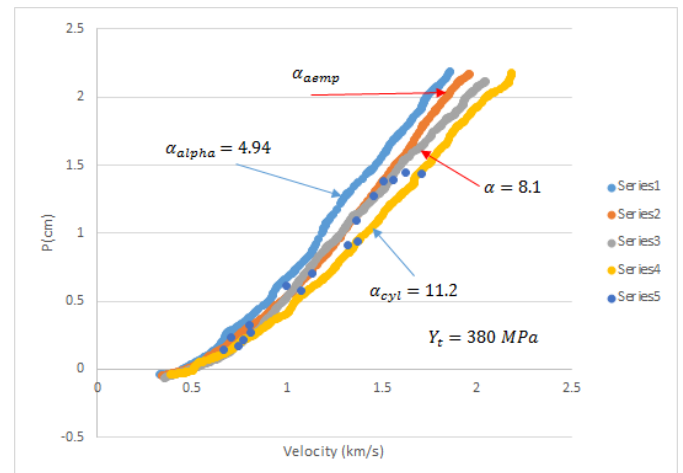
$$\left( 1 + \frac{\rho_t u^2}{Y_t} \right) \sqrt{K_t - \rho_t \alpha^2 u^2} = \left( 1 + \frac{\rho_t \alpha^2 u^2}{2G_t} \right) \sqrt{K_t - \rho_t u^2}, \quad (63)$$

که در آن  $K_t$  و  $G_t$  به ترتیب مدول حجمی و مدول برشی هدف می‌باشند. در منحنی پیوسته شکل ۷ از معادله (۶۳) استفاده  $Y_t = 380 \text{ MPa}$  شده است. سازگاری مابین مقادیر تجربی و مدل بسیار خوب است. تکامل تدریجی  $\alpha$  با زمان برای دو سرعت مختلف برخورد در شکل ۸ نشان داده شده است. وسعت منطقه پلاستیک با زمان رشد می‌کند و این پیشگویی با پیشگویی مدل دو بعدی نفوذ صلب راوید و بادنر<sup>۱۰</sup> سازگار است [۱۵].

اگرچه هدف اصلی مدل، مسائل نفوذ میله‌های بلند فرسایشی است، لیکن آزمایش نفوذ صلب این امکان را فراهم می‌آورد که روی پاسخ هدف و به ویژه روی  $\alpha$  متمرکز شده و برای نفوذ میله صلب،  $v = u$  بوده و معادله (۵۱) به شکل زیر تبدیل می‌گردد:

$$\dot{u} \left[ \rho_p L + \rho_t R \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right] + \rho_t \dot{\alpha} \frac{2Ru}{(\alpha + 1)^2} = - \left[ \frac{1}{2} \rho_t u^2 + \frac{Y}{3} \ln(\alpha) Y_t \right]. \quad (60)$$

بطور واضح می‌تواند دیده شود که مقدار  $\alpha$  حد مدل نفوذ است. شکل ۷ مقایسه نفوذ پرتابه صلب با داده‌های تجربی [۱۳] و مقایسه نفوذ مدل با آزمایش‌های انجام شده توسط فورستال<sup>۸</sup> و همکارانش برای  $\alpha = 4/94, 8/1, 11/2$  را نشان می‌دهد [۱۴]. در این آزمایش‌ها پرتابه‌ای با دماغه نیم‌کروی و از فولاد مارتینزیتی با طول  $74/7$  میلی‌متر و قطر  $7/10$  میلی‌متر به داخل هدف آلومینیومی 6061-T651 شلیک شده است و مقدار تنش سیلان  $Y_t$  هدف آلومینیومی برابر  $380 \text{ MPa}$  در نظر گرفته شده است.



شکل ۷: مقایسه نفوذ پرتابه صلب با داده‌های تجربی.

در ضمن فرض شده است که پرتابه در خلال نفوذ، صلب باقی می‌ماند. جدول ۱ ثابت ماده آلومینیومی و فولاد را نشان می‌دهد.

جدول ۱: خواص ماده آلومینیومی و فولاد [۷].

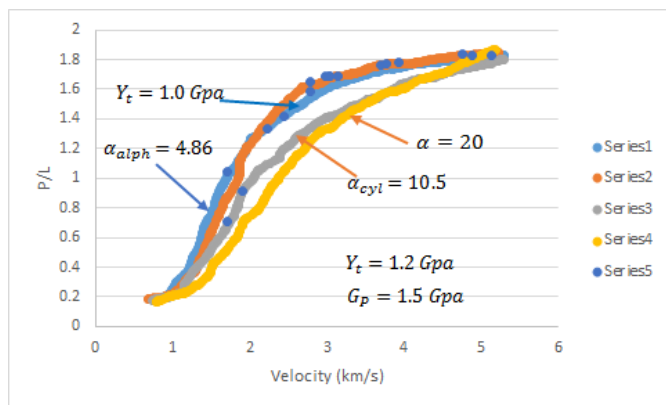
نوع ماده	چگالی (g/cm <sup>3</sup> )	مدول حجمی (GPa)	مدول یانگ (GPa)	مدول برشی (GPa)	سرعت صوت	ثابت k
آلومینیوم (6061-T6)	2.71	72.8	68.9	27.3	5.35	1.34
فولاد	7.85	166.7	206.8	76.9	4.50	1.49
آلیاژ تنگستن	17.3	302.1	327.5	124.1	3.85	1.44

روش انقباض حفره<sup>۹</sup> یک راه برای تخمین مقداری برای  $\alpha$  از طریق استقراء فراهم می‌آورد. شکل ۸ هندسه انقباض حفره را نشان می‌دهد. در این شیوه، یک چاله از شعاع اولیه صفر تحت سرعت ثابتی منبسط می‌شود. این شیوه

<sup>8</sup>Forrestal <sup>9</sup>cavity expansion technique <sup>10</sup>Ravid and Bodner

## ۲.۵ پرتابه‌های میله بلند فرسایشی

مقداری کار سختی، تنش سیلان زره فولادی در کرنش نسبتاً بزرگ مقدار  $Y_t = 1/2 \text{ GPa}$  را نشان می‌دهد. کمترین مقدار  $\alpha$ ، سریع‌ترین افزایش در نفوذ را در محدوده  $0.5 \text{ km/s}$  تا  $2 \text{ km/s}$  به همراه دارد اما برای  $\alpha = 4/86$  (برای افزایش در مقایسه با داده‌های تجربی در سرعت پایین اتفاق می‌افتد). (برای کمترین مقادیر  $\alpha$  افزایش سریع در عمق نفوذ هم‌تراز با سرعت اتفاق می‌افتد). ضمن افزایش مقدار  $\alpha$  مقدار شروع منحنی بسمت راست انتقال می‌یابد و در ضمن کم عمق‌تر می‌گردد. این موضوع تأکیدی است بر نیاز به استفاده از یک  $\alpha$  وابسته به سرعت نفوذ. در واقع اختلاف جدی نفوذ در فولاد سبب گردید تا معادله (۶۳) ایجاد و توسعه داده شود. شکل ۱۱ مقایسه نفوذ نرمالایز با داده‌های تجربی نفوذ فرسایشی را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱: مقایسه نفوذ نرمالایز با داده‌های تجربی نفوذ فرسایشی.

در بعضی از نقاط، آهنگ انبساط حفره از سرعت موج الاستیک کم فشار، بزرگتر است و لذا  $\alpha$  کمتر از ۱ خواهد شد. بنابراین معادله (۶۳) برای افزایش چقرمگی مدول حجمی  $K_t$  با افزایش سرعت نیاز به اصلاح اضافی دارد. بطور فیزیکی، مدول حجمی با تراکم ماده و تراکم ماده به همراه سرعت نفوذ افزایش می‌یابد. برای تخمین اینکه چگونه  $K_t$  با افزایش سرعت نفوذ افزایش می‌یابد، یک عبارت کشف‌کننده را، بصورتی که ارائه شده بکار می‌رود. تحت شرایط کرنش تک محوری، سرعت شوک به سرعت ذره با معادله  $u_s = c_0 + k u_p$  مربوط است که در آن  $c_0$  سرعت صوت حجمی و  $k$  شیب وابسته به آن است. مدول حجمی محیط،  $K$ ، توسط حاصل ضرب چگالی در مربع سرعت صوت حاصل می‌شود؛ یعنی  $K = \rho \cdot c_0^2$ . بنابراین مدول حجمی دینامیک هدف را به سرعت شوک بصورت زیر مربوط می‌نماید:

$$K_t \approx \rho \cdot u_s^2 = K_0 \left( 1 + k \frac{u_p}{c_0} \right)^2 \quad (65)$$

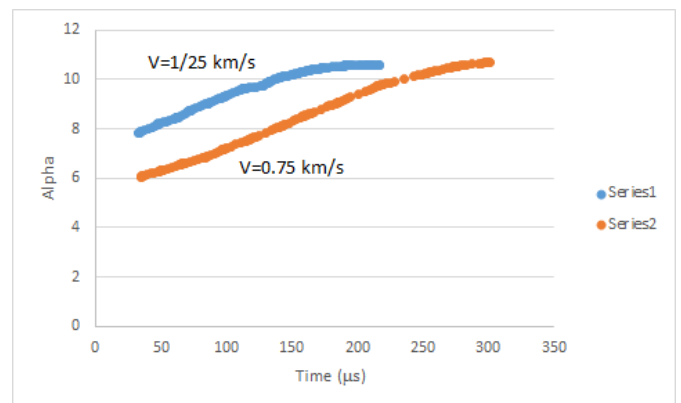
معادله (۶۵) برای برخورد تک‌بعدی است. چون در اینجا از انبساط استوانه‌ای حفره استفاده می‌شود و همگرایی هندسی نشان می‌دهد که معادله (۶۵) بیش از اندازه لازم به سرعت نفوذ وابسته است، بنابراین از ریشه دوم جمله داخل پرانتز استفاده می‌شود:

$$K_t \approx K_0 \left( 1 + k \frac{u_p}{c_0} \right) \quad (66)$$

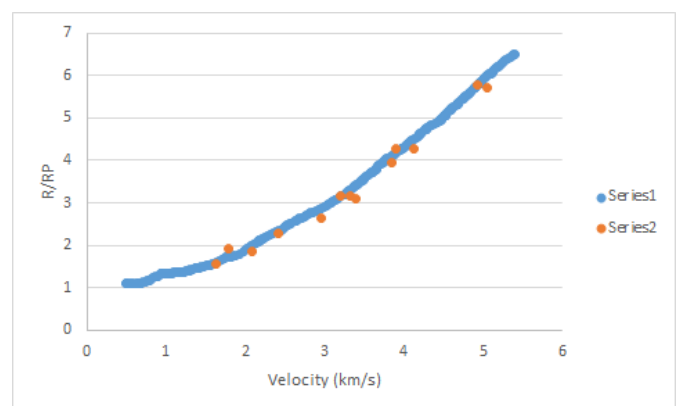
خط پیوسته در شکل ۱۱ استفاده از معادله (۶۳) به همراه معادله (۶۶) را نشان می‌دهد. روی محدوده سرعت، سازگاری نسبتاً خوب است. شکل

فرضی را در نظر گرفته زمانیکه نفوذ پرتابه صلب بوده و قطر حفره معادل قطر پرتابه است. ولی این حالت در مورد جریان فرسایشی وجود ندارد و قطر حفره بصورت تابعی از سرعت برخورد تغییر می‌نماید. شکل ۹ را در نظر بگیرید که در آن شعاع حفره نرمالایز، در مقابل سرعت برخورد، برای میله تنگستنی با  $\frac{L}{D} = \frac{22}{9}$  در هدف فولادی به همراه داده‌های تجربی گرفته شده است. شعاع حفره بصورت خط پیوسته در شکل می‌تواند بوسیله یک منحنی درجه دوم با استفاده از سرعت برخورد برحسب  $\text{km/s}$  تقریب زده شود. شکل ۹ تغییرات  $\alpha$  نسبت به زمان برای نفوذ پرتابه صلب و شکل ۱۰ شعاع حفره نرمالایز نسبت به سرعت برخورد را نشان می‌دهد [۱۶].

$$R = R_p (1 + 0.287v_0 + 0.148v_0^2) \quad (64)$$



شکل ۹: تغییرات  $\alpha$  نسبت به زمان برای نفوذ پرتابه صلب.

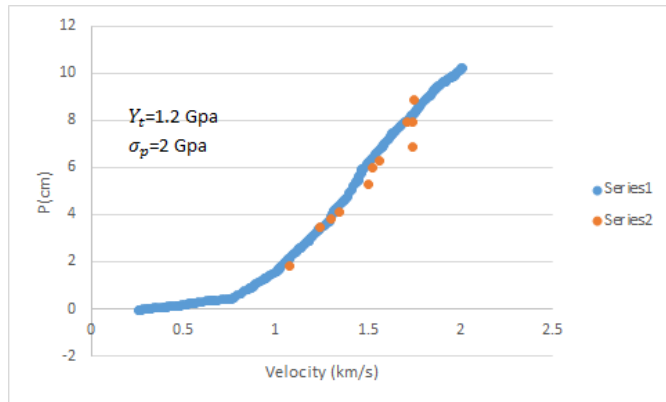


شکل ۱۰: شعاع حفره نرمالایز نسبت به سرعت برخورد.

معادله (۶۴) برای تخمین شعاع حفره  $R$ ، بصورت تابعی از سرعت برخورد، برای میله‌های آلیاژ تنگستنی در زره فولادی مورد استفاده قرار می‌گیرد.  $R$  از سرعت برخورد اولیه محاسبه می‌شود و در سرتاسر محاسبات ثابت نگه داشته می‌شود. داده‌های نفوذ به‌دست‌آمده سیلسبای<sup>۱۱</sup>  $L = 15/58 \text{ cm}$  یا  $L = 12/18 \text{ cm}$  و  $\frac{L}{D} = 22/9$  در شکل ۱۱ ترسیم شده‌اند. مقادیر  $\alpha$  محاسبه شده، به ترتیب برای انبساط کروی و استوانه‌ای حفره (معادلات (۶۱) و (۶۲))  $4/86$  و  $10/5$  می‌باشند. با انجام

<sup>11</sup>Silsby

قدری قوی تر بوده و لذا تنش سیلان دینامیکی آنها تقریباً برابر ۲ GPa در نظر گرفته شده است. بار دیگر برای زره فولادی تنش سیلان ۱/۲ GPa مورد استفاده قرار گرفت و همانطور که دیده می شود پیشگویی مدل تحلیلی در این حالت دارای سازگاری بسیار عالی با داده های تجربی می باشد.



شکل ۱۳: نفوذ نسبت به سرعت برخورد برای پرتابه های فرسایشی.

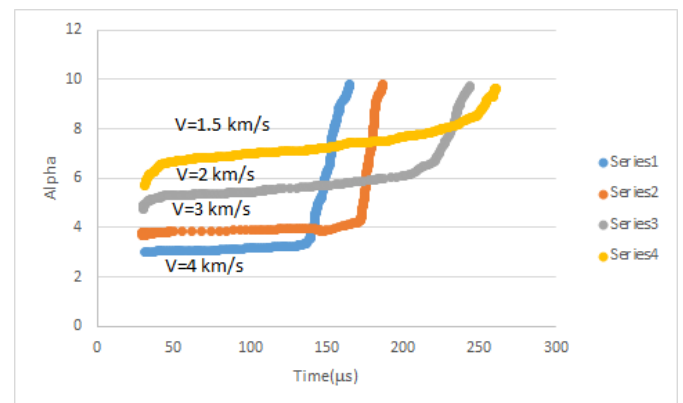
### ۳.۵ نفوذ پرتابه های فولادی و آلیاژ تنگستن در زره فولادی

هوهرلر و استیلپ<sup>۱۲</sup> مجموعه بسیار غنی از داده های تجربی را برای پرتابه های فولادی و آلیاژ تنگستن که به اهداف فولادی با سختی های مختلف<sup>۱۳</sup> (BHN295 و BHN255) برخورد کرده اند و دارای نسبت های منطری مختلفی بوده اند ( $\frac{L}{D} = 1, 10$ ) تهیه نموده اند. پرتابه های آلیاژ تنگستن دارای چگالی  $17 \text{ g/cm}^3$  و  $17/6 \text{ g/cm}^3$  بوده و طبق گزارش، پرتابه های آلیاژ فولاد (C110W1) دارای سختی برینل BHN 230 بوده اند [۱۹]. در ابتدا لازم است که شعاع حفره نرمالایز برحسب سرعت برخورد تشریح گردد. شکل ۱۴ شعاع حفره نرمالایز بر حسب سرعت برخورد را نشان می دهد که نمادهای مختلف در شکل ۱۴، مواد و نسبت منطری های مختلف پرتابه را نشان می دهند. داده های بدست آمده توسط هوهرلر و استیلپ، بر خلاف داده های سیلسبای شکل ۱۰، یک رابطه خطی را مابین شعاع حفره نرمالایز و سرعت برخورد نشان می دهند. درون باند پراکنده داده ها، اختلاف مابین داده های آلیاژ تنگستن و فولاد و یا مابین دو سختی مختلف هدف، تشخیص داده می شود. داده های حفره ناشی از پرتابه های با  $\frac{L}{D} = 1$  مقدار کمی زیر داده های ناشی از پرتابه های با  $\frac{L}{D} = 10$  می باشند، اما بدلیل آنکه در اهداف مهندسی دقت بسیار بالا منظور نظر نیست، لذا فرض کرده که، رابطه مابین سرعت برخورد و شعاع حفره، مستقل از نسبت منطری است. معادله خطی که از طریق روش حداقل مربعات بر داده های  $\frac{L}{D} = 10$  (با فرض اینکه در  $v_0 = 0$  مقدار  $\frac{R}{R_p} = 0$  می باشد) انطباق داده شده است ( $v_0$  برحسب km/s) بصورت زیر است:

$$R = R_p(1/10 + 0.7v_0) \quad (67)$$

شکل ۱۵ عمق نفوذ نرمالایز به سرعت برخورد را برای پرتابه های  $\frac{L}{D} = 10$  که در زره فولادی با دو سختی مختلف نفوذ کرده اند نشان می دهد. برای پرتابه های آلیاژ تنگستن  $\sigma_p = 2/0 \text{ GPa}$  و برای پرتابه های فولادی

۱۲ نشان می دهد که چطور  $\alpha$  با زمان، برای نفوذ فرسایشی، در چهار سرعت برخورد مختلف تغییر می نماید. برخلاف نفوذ صلب که در آن  $\alpha$  بطور پیوسته با زمان افزایش می یابد، تقریباً برای بیشترین مقدار نفوذ ثابت باقی می ماند. در خلال فاز کاهش سرعت نهایی نفوذ، که پرتابه بسمت توقف می رود و  $v$  به  $u$  نزدیک می شود و هر دو مقدار  $u$  و  $v$  بسمت صفر میل می نمایند، مقدار  $\alpha$  بسرعت تغییر می نماید. شکل ۱۲ تغییرات  $\alpha$  نسبت به زمان برای نفوذ فرسایشی [۷] را نشان می دهد. توجه شود که شکل ۱۲ یعنی معادله (۶۳) به همراه معادله (۶۶) بیان می نماید که وسعت منطقه پلاستیک نرمالایز (که با  $\alpha$  نمایش داده شده است). با افزایش سرعت نفوذ کاهش می یابد. این نتیجه، در شبیه سازی عددی مورد تأیید قرار گرفته است.



شکل ۱۲: تغییرات  $\alpha$  نسبت به زمان برای نفوذ فرسایشی.

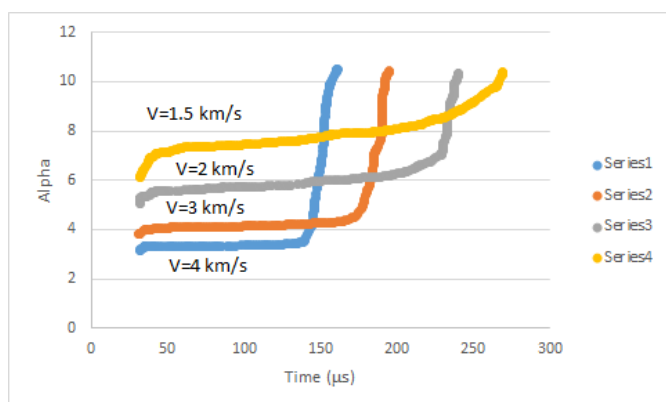
شبیه سازی های عددی نشان می دهند که وسعت فیزیکی منطقه پلاستیک که بصورت  $\alpha R$  نشان داده شده است، با افزایش سرعت نفوذ افزایش می یابد؛ اما شعاع حفره با آهنگی سریع تر از منطقه پلاستیک به واسطه کاهش در  $\alpha$  رشد می نماید. ولی با وجود این، برای حالت های عرضه شده در اینجا، مدل یک  $\alpha R$  (حالت پایدار) تقریباً مستقل از سرعت برخورد را پیشگویی می کند که در آن  $R$  از معادله (۶۴) و  $\alpha$  از معادله (۶۳) حاصل می گردد. هرچند که فرض چگالی تقریباً ثابت هنوز معتبر است، ولی چون اثرات تراکم پذیری در  $\alpha$  انعکاس یافته است، لذا نمی تواند نقش آن در استقامت ماده هدف به نفوذ صرف نظر گردد. کاهش در  $\alpha$  به همراه سرعت، از معادله (۶۳)، به جهت این واقعیت است که علاوه بر مقدار انرژی تلف شده در کار پلاستیک، مقداری از انرژی در تراکم الاستیک ذخیره می شود. اگرچه مقداری از این انرژی الاستیک، در هنگام باربرداری از حالت تراکم، تبدیل به کار پلاستیک می گردد، اما چون این باربرداری، بعداً درحین پروسه نفوذ اتفاق می افتد، لذا نمی تواند در استقامت به نفوذ تأثیر نماید [۱۷]. این موارد تأکیدی هستند بر این نکته که: نیاز است تراکم پذیری هدف برای سرعت های بالاتر برخورد در مدل لحاظ گردند. داده های بدست آمده توسط سیلسبای، در محدوده سرعت عرف سلاح، نسبتاً پراکنده هستند. داده های نفوذ میله های آلیاژ تنگستی  $\frac{L}{D} = 10$  با طول  $17/8 \text{ cm}$  و دارای دماغه نیم کروی که در زره فولادی شلیک شده است [۱۸]. در شکل ۱۳ نفوذ نسبت به سرعت برخورد برای پرتابه های فرسایشی [۷] نشان داده شده است. آلیاژ تنگستن استفاده شده در این آزمایش ها نسبت به آنهايي که توسط سیلسبای مورد استفاده قرار گرفته اند

<sup>12</sup>Hohler and Stilp <sup>13</sup>Brinell hardness

والکر و اندرسون<sup>۱۵</sup> با استفاده از شبیه‌سازی‌های عددی نشان دادند که، قبل از ناپدید شدن اثرات شکل دماغه تقریباً دو برابر قطر پرتابه در نفوذ فرسایشی مصرف می‌گردد [۲۰]. اگرچه در این مطالعات فقط در سرعت‌های برخورد ۱/۵ km/s اثرات شکل دماغه مورد بررسی قرار گرفت ولی نشان داد که دماغه نیم‌کروی آسان‌تر از یک دماغه لب پهن در لحظات اولیه نفوذ می‌نماید. (عمق نفوذ بیشتر در زمان معادل). مدل تحلیلی، در سرعت‌های برخورد پایین، برای پرتابه‌های با  $\frac{L}{D} = 1$  کاملاً خوب عمل می‌نماید. حفره‌های ناشی از برخورد پرتابه‌های با  $\frac{L}{D}$  های کوچک تمایل به شکل نیم‌کروی دارند. بنابراین میدان جریان نیم‌کروی مدل تحلیلی، به عنوان تقریب خوبی برای الگوی جریان برخوردهای  $\frac{L}{D}$  کوچک عمل می‌نماید. مدل برای پرتابه‌های  $\frac{L}{D} = 1$  از جنس فولاد در سرعت‌های برخورد بالاتر تمایل به پیشگویی بیشتر از اندازه نفوذ دارد. انطباق یک منحنی بر داده‌های  $\frac{L}{D} = 1$  برای شعاع حفره بجای  $\frac{L}{D} = 10$  تأثیر اندکی بر روی عمق نفوذ نرمالایز داشته و لذا در مشاهدات تغییری ایجاد نمی‌نماید.

#### ۴.۵ مقایسه سرعت‌ها و طول باقی مانده پرتابه

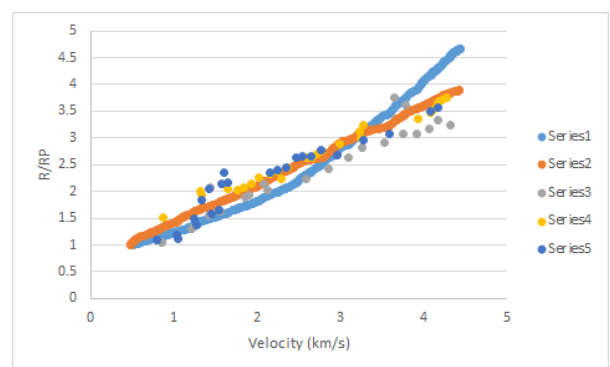
انگیزه اصلی مدل، اتصال پروفیل‌های سرعت دیده شده در هدف و پرتابه بوده است. در صورت عملکرد خوب مدل، سازگاری خوبی با سرعت وابسته به زمان سطح مشترک و سرعت عقب پرتابه مورد انتظار است. این سرعت‌ها برحسب زمان بصورت خط نقطه چین در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. منحنی‌های پیوسته، ناشی از شبیه‌سازی‌های عددی می‌باشند.  $\alpha$  از معادله (۶۳)  $Y_t = 1/15 \text{ GPa}$  و  $\sigma_p = 1/8 \text{ GPa}$  (این اعداد بدین جهت انتخاب شده‌اند که با عمق نفوذ ۷/۱۷ cm حاصل از شبیه‌سازی عددی مقایسه گردند) محاسبه شده است. مدل کنونی تقریب معقولی را برای فاز نفوذ گذرای اولیه فراهم می‌آورد. شکل ۱۷ مقایسه سرعت‌های نوک و انتها پرتابه برحسب عمق نفوذ برای شبیه‌سازی عددی و مدل تحلیلی پرتابه با  $\frac{L}{D} = 10$  از جنس آلیاژ تنگستن بوده که در زره فولادی با سرعت  $v = 1/5 \text{ km/s}$  نفوذ می‌نماید.



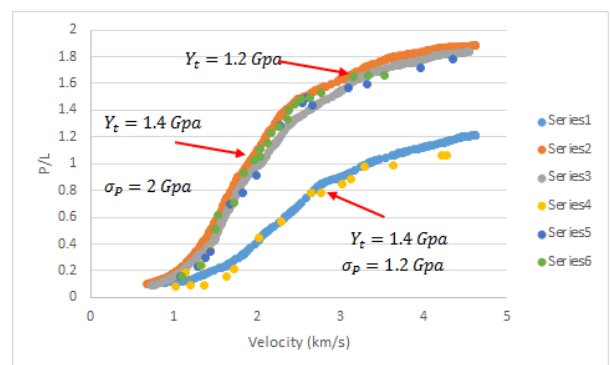
شکل ۱۷: مقایسه سرعت‌های نوک و انتها پرتابه برحسب عمق نفوذ برای شبیه‌سازی عددی و مدل تحلیلی پرتابه با  $\frac{L}{D} = 10$ .

کاهش سرعت نهایی پرتابه مقداری دیرتر در انتهای نفوذ اتفاق می‌افتد، اما کاهش سرعت انتها پرتابه تقریباً دارای شیب صحیحی می‌باشد.

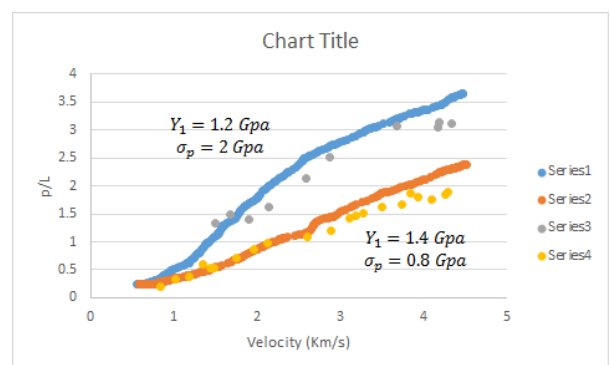
مثلاًها برای زره فولادی با سختی برینل (BHN)  $\sigma_p = 1/2 \text{ GPa}$  و  $Y_t = 1/2 \text{ GPa}$  و 255 (داده‌های نشان داده شده به وسیله مربع‌ها برای زره فولادی با سختی برینل (BHN 255 و  $Y_t = 1/4 \text{ GPa}$ ) می‌باشند. باز هم مقادیر  $Y_t$  و  $\sigma_p$  مقادیر دینامیکی معقولی را برای مواد پرتابه و هدف عرضه می‌نمایند. شکل ۱۶ عمق نفوذ نرمالایز به سرعت برخورد برای پرتابه‌ها و داده‌های مشابهی را برای پرتابه‌های از جنس آلیاژ تنگستن و فولاد با  $\frac{L}{D} = 1$  که در زره فولادی نفوذ می‌نمایند، را نشان می‌دهد. ثابت‌های ماده همانند همان‌هایی هستند که برای حالت  $\frac{L}{D} = 10$  می‌باشند. در همه جا سازگاری ما بین مدل و داده‌های تجربی کاملاً خوب است. برای داده‌های  $\frac{L}{D} = 10$ ، مدل، عمق نفوذ در سرعت‌های پایین ( $v \leq 1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ) را بیشتر از اندازه پیش‌بینی می‌نماید. این انحراف احتمالاً به سبب شکل دماغه لب پهن<sup>۱۴</sup> پرتابه که در آزمایش‌های استفاده شده می‌باشد.



شکل ۱۴: شعاع حفره نرمالایز بر حسب سرعت برخورد.



شکل ۱۵: عمق نفوذ نرمالایز به سرعت برخورد برای پرتابه‌های با  $\frac{L}{D} = 10$ .



شکل ۱۶: عمق نفوذ نرمالایز به سرعت برخورد برای پرتابه‌های با  $\frac{L}{D} = 1$ .

<sup>14</sup>Blunt <sup>15</sup>Walker and Anderson

کاملاً خوب عمل می‌نماید. حفره‌های ناشی از برخورد پرتابه‌های با  $\frac{L}{D}$  های کوچک تمایل به شکل نیم‌کروی دارند.

۶. سرعت‌های برخورد بالاتر تمایل به پیشگویی بیشتر از اندازه نفوذ دارد. انطباق یک منحنی بر داده‌های  $\frac{L}{D} = 1$  برای شعاع حفره بجای  $\frac{L}{D} = 10$  تأثیر اندکی بر روی عمق نفوذ نرمالایز داشته و لذا در مشاهدات تغییری ایجاد نمی‌نماید.

۷. اختلافات موجود در انتهای نفوذ، احتمالاً اغلب به این دلیل بوجود می‌آید که فرض می‌شود آن سوی منطقه پلاستیک در حالت تنش تک محوری است. در نزدیکی انتهای نفوذ مقدار زیادی از پرتابه باقیمانده می‌تواند بصورت پلاستیک جریان یابد و در نتیجه بخش کوچکی از پرتابه که الاستیک است، احتمالاً در یک تنش بسیار پیچیده‌ای می‌باشد. اینکه مدل چگونه فاز نهایی نفوذ را با وجود پیچیدگی بیشتر انجام می‌دهد، به مطالعه بیشتری نیازمند است.

## مراجع

- [1] Tate, A. A theory for the deceleration of long rods after impact. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(6):387-399, 1967.
- [2] Tate, A. Further results in the theory of long rod penetration. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(3):141-150, 1969.
- [3] Alekseevskii, VP. Penetration of a rod into a target at high velocity. *Combustion, explosion and shock waves*, 2(2):63-66, 1966.
- [4] Anderson Jr, Charles E and Walker, James D. An examination of long-rod penetration. *International Journal of Impact Engineering*, 11(4):481-501, 1991.
- [5] Tate, A. Long rod penetration models-part i. a flow field model for high speed long rod penetration. *International Journal of mechanical sciences*, 28(8):535-548, 1986.
- [6] Tate, A. Long rod penetration models-part ii. extensions to the hydrodynamic theory of penetration. *International Journal of mechanical sciences*, 28(9):599-612, 1986.
- [7] Anderson Jr, Charles E, Walker, James D, and Hauver, George E. Target resistance for long-rod penetration into semi-infinite targets. *Nuclear engineering and design*, 138(1):93-104, 1992.
- [8] Tate, A. A theoretical estimate of temperature effects during rod penetration. in *9th Ballistic Symposium*, p. 2, 1986.
- [9] Walker, James D and Anderson Jr, Charles E. A time-dependent model for long-rod penetration. *International Journal of Impact Engineering*, 16(1):19-48, 1995.
- [10] Malvern, Lawrence E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. no. Monograph. 1969.
- [11] Forrestal, MJ, Okajima, K, and Luk, VK. Penetration of 6061-t651 aluminum targets with rigid long rods. *J. Appl. Mech*, 55(4):755-760, 1988.
- [12] Forrestal, M. J., Brar, N. S., and Luk, V. K. Penetration of strain-hardening targets with rigid spherical-nose rods. 1991.

سرعت‌های نوک و انتها پرتابه، برحسب موقعیت دماغه پرتابه (عمق نفوذ) در شبیه‌سازی عددی و مدل تیت و مدل کنونی در شکل ۱۷ نشان داده شده است. بطوریکه قبلاً نیز توضیح داده شد، کاهش سرعت در انتهای نفوذ، بطور تقریبی موازی شبیه‌سازی‌های عددی است. بنظر می‌رسد که در شکل ۱۷ نسبت به شکل ۱ در انتهای نفوذ سازگاری بهتری وجود داشته باشد و دلیل این امر آنست که اساساً عمق نفوذ، وقتیکه پرتابه دارای سرعت نفوذ کم است نمی‌تواند تغییر نماید. توجه شود که سرعت نفوذ مدل کنونی مقدار اندکی زیر مقدار شبیه‌سازی عددی در هر دو شکل ۱ و ۱۷ قرار می‌گیرد و این موضوع لازمه این نیاز است که بمنظور مقایسه باید عمق نفوذ کلی یکسان باشد. از طرف دیگر با استفاده‌کردن از  $Y_t = 1/20 \text{ GPa}$  و  $\sigma_p = 1/8 \text{ GPa}$  سرعت‌های نفوذ حالت پایدار مدل با مقادیر شبیه‌سازی عددی سازگاری دارد اما پرتابه cm ۷/۴ (بجای ۷/۱ cm با ۳٪ اختلاف) نفوذ می‌نماید. با مراجعه دوباره به شکل‌های ۱ و ۱۷ ممکن است این فکر پیش آید که، افزایش اندک سرعت اولیه نفوذ در مدل، سبب افزایش اندکی در سرعت نفوذ شود و لذا سازگاری بهتری با شبیه‌سازی عددی فراهم آید، ولی باید توجه کرد که سرعت نفوذ از مرحله گذرای اولیه ناشی می‌گردد و تقریباً برابر سرعت نفوذ حالت شبه پایدار است. این موضوع به این دلیل که فیزیک مدل (مثلاً چگالی‌ها و مقاومت‌های پرتابه و هدف و سرعت اولیه برخورد) ضرورتاً شرایط جریان شبه پایدار را دیکته می‌نماید مورد انتظار است. سرانجام مدل کنونی یک پرتابه باقی مانده محدود را در انتهای نفوذ پیش بینی می‌نماید، اگرچه میله در سرعت برخورد یکسان بیشتر از آنچه که در آزمایش‌ها دیده شده‌است، مصرف شده‌است. مدل تقریباً ۰/۴ cm طول باقی مانده را در انتهای حفره پیشگویی می‌نماید و این تقریباً نصف مقدار مشاهده‌شده در آزمایش‌های تجربی است. این موضوع می‌تواند با مدل تیت که پیشگویی می‌نماید تقریباً تمام طول پرتابه مصرف می‌شود مغایر باشد [۲۱، ۲۲].

## ۶ نتیجه‌گیری

مدل تحلیلی ارائه‌شده با توجه به فرضیات حاکم بر آن، توافق کاملاً مناسبی با مقادیر تجربی مختلف و مدل نفوذ پرتابه فرسایشی و صلب دارد.

۱. عوامل مؤثر رفتار سازه در برابر نفوذ پرتابه‌ها، چگالی و مقاومت آنها است؛ بطوریکه با افزایش این مشخصه‌ها، مقاومت در برابر نفوذ نیز افزایش می‌یابد.
۲. برای تعیین و تخمین حوزه جریان پلاستیک در درون ماده هدف از حل انبساط حفره کروی و استوانه‌ای مورد استفاده قرار گرفته است.
۳. برای کمترین مقادیر  $\alpha$  افزایش سریع در عمق نفوذ هم‌تراز با سرعت اتفاق می‌افتد.
۴. وسعت فیزیکی منطقه پلاستیک که بصورت  $\alpha R$  نشان داده شده است، با افزایش سرعت نفوذ افزایش می‌یابد؛ اما شعاع حفره با آهنگی سریع‌تر از منطقه پلاستیک به واسطه کاهش در  $\alpha$  رشد می‌نماید.
۵. دماغه نیم‌کروی آسان‌تر از یک دماغه لب پهن در لحظات اولیه نفوذ می‌نماید و در سرعت‌های برخورد پایین، برای پرتابه‌های  $\frac{L}{D} = 1$



- [19] Anderson Jr, Charles E, Morris, Bruce L, and Littlefield, David L. A penetration mechanics database. tech. rep., Southwest Research Inst San Antonio TX, 1992.
- [20] Walker, James D and Anderson Jr, Charles E. The influence of initial nose shape in eroding penetration. *International journal of impact engineering*, 15(2):139-148, 1994.
- [21] Moslemi Petrudi, A, Vahedi, Kh, Kamyab, MH, and Petrudi, Moslemi. Numerical and experimental study of oblique penetration of a blunt projectile into ceramic-aluminum target. *Modares Mechanical Engineering*, 19(5):1253-1263, 2019.
- [22] Moslemi Petrudi, Amin, Vahedi, Khodadad, Rahmani, Masoud, and Moslemi Petrudi, MohammadAli. Numerical and analytical simulation of ballistic projectile penetration due to high velocity impact on ceramic target. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 14(54):226-248, Sep 2020.
- [13] Forrestal, M. J. and Luk, V. K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid. 1988.
- [14] Forrestal, M. J., Luk, V. K., and Brar, N. S. Perforation of aluminum armor plates with conical-nose projectiles. *Mechanics of Materials*, 10(1-2):97-105, 1990.
- [15] Ravid, M and Bodner, SR. Dynamic perforation of viscoplastic plates by rigid projectiles. *International Journal of Engineering Science*, 21(6):577-591, 1983.
- [16] Silsby, GF. Penetration of semi-infinite steel targets by tungsten rods at 1.3 to 4.5 km/s. in *Proceeding of the Eighth International Symposium on Ballistics*, 1984.
- [17] Anderson Jr, Charles E, Littlefield, David L, and Walker, James D. Long-rod penetration, target resistance, and hypervelocity impact. *International Journal of Impact Engineering*, 14(1-4):1-12, 1993.
- [18] Anderson Jr, Charles E and Morris, Bruce L. The ballistic performance of confined  $Al_2O_3$  ceramic tiles. *International Journal of Impact Engineering*, 12(2):167-187, 1992.