

## مطالعه روش‌های انتخاب نقاط مرجع در آنالیز مودال محیطی

سحر طاهریان<sup>۱</sup>، محمدمهدی خطیبی<sup>۲</sup> و\*<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان<sup>۲</sup> استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

\*مسئول مکاتبات: mmkhatibi@semnan.ac.ir

## چکیده

## واژگان کلیدی

نقاط مرجع  
موقعیت بهینه  
آنالیز مودال محیطی  
مشخصات دینامیکی  
آزمایش مودال

## تاریخچه مقاله

تاریخ دریافت ۱۳۹۶/۰۴/۲۵

تاریخ پذیرش ۱۳۹۸/۰۴/۲۲

آزمایش مودال روشی مناسب برای تخمین مشخصات دینامیکی سازه می‌باشد. با این حال در سازه‌های بزرگ به علت عدم امکان تحریک و یا اندازه‌گیری نیروها، انجام آزمایش مودال دشوار یا غیرممکن می‌باشد. آزمایش مودال محیطی یکی از روش‌هایی است که می‌تواند این مشکل را برطرف کند. در این نوع آزمایش، سازه توسط بارهای طبیعی تحریک می‌شود. با این حال، این نوع آزمایش نیز با مشکلاتی مواجه است. یکی از مشکلات مهم آزمایش مودال محیطی عدم امکان اندازه‌گیری همزمان در تمام نقاط است که ناشی از محدودیت در تعداد شتاب‌سنج‌ها و کانال‌های اندازه‌گیری است، بنابراین سازه باید در چندین مرحله مورد آزمایش قرار گیرد. برای ارتباط بین مراحل اندازه‌گیری، باید نقاطی به عنوان مرجع انتخاب شوند. عدم انتخاب صحیح نقاط مرجع موجب بروز خطا در نتایج خواهد شد، از این رو، انتخاب صحیح این نقاط، حائز اهمیت فراوان است؛ در این مقاله ضمن بررسی روش‌های انتخاب نقاط مرجع، مزایا و معایب این روش‌ها به تفصیل بیان می‌گردد.

## ۱ مقدمه

نیروهایی ممکن است باعث ایجاد خرابی محلی در سازه و یا بروز رفتار غیر خطی گردد. از طرف دیگر عواملی مانند باد، امواج صوتی و تردد خودروها نیز موجب ایجاد نویز در آزمایش خواهند شد [۴].

وجود چنین مشکلاتی موجب شد تا محققان روش‌های آنالیز مودال جدیدی را برای بدست آوردن پارامترهای مودال، بر مبنای اندازه‌گیری فقط پاسخ، ارائه دهند. این روش‌ها آنالیز مودال محیطی<sup>۲</sup> نامیده می‌شوند. در آنالیز مودال محیطی سازه بصورت مصنوعی تحریک نمی‌شود بلکه توسط بارهای محیطی تحریک می‌گردد [۵]. این روش مزایای فراوانی نسبت به آنالیز مودال تجربی دارد؛ که می‌توان به پایین بودن هزینه به دلیل عدم نیاز به تجهیزات پیچیده تحریک و شرایط مرزی شبیه‌سازی شده اشاره کرد. از آنالیز مودال محیطی نه تنها برای طراحی دینامیکی و کنترل سازه، بلکه در نظارت بر سلامتی سازه‌ها<sup>۵</sup> و تشخیص خرابی هم استفاده می‌شود. در سازه‌های بزرگ به دلیل محدودیت در تعداد شتاب‌سنج‌ها و یا تعداد کانال‌های اندازه‌گیری، امکان اندازه‌گیری همزمان پاسخ سازه در تمام نقاط وجود ندارد [۶]. بنابراین سازه باید در چندین مرحله مورد آزمایش قرار گیرد. برای برقراری ارتباط بین مراحل مختلف آزمایش، لازم است نقاطی به عنوان مرجع انتخاب شوند [۶]. از آنجا که عدم انتخاب صحیح نقاط مرجع<sup>۶</sup> موجب بروز خطا در نتایج خواهد شد و یا امکان دستیابی به نتایج صحیح را غیرممکن می‌سازد، از این رو، انتخاب صحیح این نقاط حائز اهمیت فراوان است. بنابراین در این مقاله به بررسی روش‌های انتخاب نقاط مرجع، پرداخته می‌شود.

امروزه طراحی سازه‌های بزرگ از اهمیت بسزایی برخوردار است. طراحی سازه‌ها باید به گونه‌ای انجام شود که علاوه بر مقاومت بالا، دارای وزن کم و انعطاف‌پذیری بالایی باشند. به منظور طراحی و تعمیر و نگهداری سازه‌ها، تحلیل دینامیکی آن‌ها حائز اهمیت است. یکی از روش‌های تحلیل دینامیکی، روش اجزای محدود است. اما این روش به دلیل وجود خطا در مدل کردن جزئیات سازه، خطای حاصل از فرضیات نامناسب و نیز عدم اطلاع دقیق از خواص سازه، معمولاً در موارد عملی با خطا همراه است. آنالیز مودال یکی دیگر از روش‌های تحلیل دینامیکی سازه است که نتایج حاصل از آن، دقت قابل توجهی دارد [۱]. این روش به منظور تعیین خواص ذاتی سیستم (فرکانس طبیعی، نسبت میرایی و شکل مود) مورد استفاده قرار می‌گیرد که از آن‌ها برای ایجاد یک مدل ریاضی از رفتار دینامیکی سیستم استفاده می‌شود. این مدل، مدل مودال و اطلاعات آن، داده‌های مودال نامیده می‌شود [۲].

روش‌های آنالیز مودال تجربی<sup>۱</sup> بر مبنای اندازه‌گیری ورودی-خروجی، به تخمین پارامترهای مودال می‌پردازند که می‌توان به روش انتخاب قله<sup>۲</sup> و کمترین مربعات<sup>۳</sup> اشاره کرد [۳]. اما استفاده از این روش‌ها در سازه‌های بزرگ امکان‌پذیر نیست، زیرا در سازه‌های پیچیده امکان تحریک یا اندازه‌گیری نیروهای تحریک، دشوار و یا غیرممکن خواهد بود. همچنین برای تحریک مصنوعی این‌گونه سازه‌ها، باید نیروی بسیار زیادی بکار گرفته شود تا تمامی موده‌های سازه در محدوده فرکانسی مدنظر تحریک شوند. البته اعمال چنین

<sup>1</sup>Experimental Modal Analysis (EMA) <sup>2</sup>peak picking <sup>3</sup>least square method <sup>4</sup>Operational Modal Analysis (OMA) <sup>5</sup>structural health monitoring <sup>6</sup>reference coordinate <sup>7</sup>correlation

خواهد شد اما اگر مقدار ED یک باشد حس گر باید در پیکربندی نهائی حفظ شود. با این روند موقعیت‌هایی که سهم ناچیزی دارند شناسایی شده و از پارامتر مودال  $\Phi_s$  حذف می‌شوند. مزیت اصلی این روش حجم محاسباتی اندک آن است. اما از سوی دیگر نمی‌تواند تعداد حس‌گرهای مورد نیاز را برای تشخیص شکل مودها در حضور عدم قطعیت مودال، نویز، چگالی مودال بالا و خرابی حس‌گر تخمین بزند [۸].

۲.۱.۲: لی و همکارانش نیز در سال ۲۰۰۷ روش مستقل مؤثر را با بیان دیگری از روابط ارائه دادند [۸]. روش آن‌ها از آنالیز حساسیت پارامترهای تخمین زده شده، سرچشمه می‌گیرد و سپس به حداکثرسازی ماتریس اطلاعات فیشر می‌رسد و با فرآیندی مشابه، به انتخاب حس‌گرها می‌پردازد.

۳.۱.۲: روش دیگری از نوع مستقل مؤثر در سال ۲۰۱۴ توسط تریگوئرو و همکارانش ارائه شده است [۹]. مبنای این روش بر اساس ماتریس اطلاعات فیشر است. نقطه شروع این روش با ماتریس مودال است که شامل همه مودهای مدل اجزای محدود است. تمامی درجات آزادی استفاده شده در مدل اجزای محدود در سازه‌های واقعی قابل اندازه‌گیری نیستند که می‌تواند ناشی از محدودیت‌های فیزیکی باشد. بنابراین، درجات آزادی متناظر با چرخش‌ها و مختصات که قابل اندازه‌گیری نیستند از ماتریس مودال حذف می‌گردد. به طور مشابه، تمامی شکل مودها هم نمی‌توانند بصورت تجربی اندازه‌گیری شوند. از این رو، فقط چندین شکل مود برای تشخیص بهینه انتخاب می‌شوند. در آخر، ردیف‌های متناظر با درجات آزادی قابل اندازه‌گیری و ستون‌های متناظر با شکل مودها در ماتریس مودال باقی می‌مانند. ماتریس اطلاعات فیشر بصورت رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$FIM = \Phi^T \Phi, \quad (4)$$

اگر درمیان ماتریس اطلاعات فیشر صفر شود، ستون‌های ماتریس مودال به طور مثال، شکل مودها، وابسته خطی خواهند بود. بنابراین، هدف روش، انتخاب بهترین درجات آزادی برای قرارگیری حس‌گرها است که در آن‌ها درمیان ماتریس اطلاعات فیشر حداکثر باشد.

## ۲.۲ روش بهینه سازی انرژی جنبشی<sup>۱۰</sup>

این روش توسط هتو و همکارانش در سال ۱۹۹۷ به عنوان یک روش اصلاح شده مستقل مؤثر مطرح شد [۱۰]. در این روش توزیع انرژی جنبشی در سیستم طبق رابطه (۵) محاسبه می‌گردد:

$$KE = \Phi^T M \Phi, \quad (5)$$

که  $\Phi$  بردار شکل مود اندازه‌گیری شده و  $M$  ماتریس جرم می‌باشد. بعد از تجزیه ماتریس جرم به فاکتورهای چلسکی بالا و پایین مثلثی، ماتریس انرژی جنبشی را می‌توان بصورت رابطه (۶) تعریف کرد:

$$KE = \Psi^T \Psi, \quad (6)$$

که در آن  $\Psi = U\Phi$  و  $M = UL$  است.  $U$  و  $L$  نشان‌دهنده فاکتورهای چلسکی بالا و پایین مثلثی می‌باشند.

برخی از روش‌های مورد بررسی نظیر معیار نقطه تغییر شکل مرجع بهینه (ODRP)، معیار انتخاب مختصات مرجع (RCSC)، روش نقطه محرک بهینه (ODP)، روش مستقل مؤثر تکامل یافته و روش همبستگی<sup>۷</sup> به طور مستقیم در انتخاب نقاط مرجع بکار گرفته شده‌اند. اما سایر روش‌هایی که در مقاله اشاره خواهند شد، صرفاً در انتخاب نقاط اندازه‌گیری در آزمایش مودال استفاده شده‌اند. اما به دلیل مشابهت تئوری این روش‌ها، با روش‌هایی که برای انتخاب نقاط مرجع استفاده شده‌اند، می‌توان از آن‌ها نیز در انتخاب نقاط مرجع استفاده کرد. به همین دلیل تمامی روش‌ها مورد بررسی قرار گرفته و مزایا و معایب آن‌ها به تفصیل بیان شده است.

## ۲ روش‌های انتخاب نقاط مرجع

### ۱.۲ روش مستقل مؤثر<sup>۸</sup>

۱.۱.۲: روش مستقل مؤثر در سال ۱۹۹۱ توسط کمر ارائه شد [۷]. این روش برای انتخاب موقعیت حس‌گرها از یک مجموعه بزرگ‌تری از نقاط، ارائه شده است. موقعیت حس‌گرهای موردنظر طبق سهم آن‌ها از استقلال خطی پارامترهای مودال موردنظر طبقه‌بندی می‌شوند. چیدمان نهایی حس‌گرها درمیان ماتریس اطلاعات فیشر<sup>۹</sup> را به حداکثر می‌رساند. برای پیاده‌سازی این روش، ابتدا مجموعه‌ای از حس‌گرها انتخاب می‌شود. این مجموعه باید مقادیر انرژی جنبشی کافی (رابطه (۱)) را در هریک از شکل مودها داشته باشد:

$$KE_{in} = \Phi_{in} \sum_j m_{ij} \Phi_{jn}, \quad (1)$$

که  $KE_{in}$  انرژی جنبشی  $i$  امین درجه آزادی در شکل مود  $n$  ام و  $\Phi_{in}$ ،  $i$  امین عنصر در مود  $n$  ام است.  $m_{ij}$ ،  $i$  امین ردیف و  $j$  امین ستون از ماتریس جرم مدل اجزای محدود و  $\Phi_{jn}$ ،  $j$  امین عنصر در مود  $n$  ام است.

برای انتخاب نقاط مناسب، باید بردار ED را محاسبه نمود. این بردار براساس ماتریس FE که در رابطه (۲) آمده است، محاسبه می‌شود.

$$FE = [\Phi_s \Psi] \otimes [\Phi_s \Psi] \lambda^{-1} \quad (2)$$

که  $\otimes$  نشان‌دهنده ضرب عنصر در عنصر،  $\Psi$  بردار ویژه،  $\lambda$  مقدار ویژه و  $\Phi_s$  ماتریس شکل مودهای اجزای محدود موردنظر است، که درجات آزادی آن بر اساس موقعیت سنسورها می‌باشد.

بر این اساس بردار ED طبق رابطه (۳) بدست می‌آید:

$$ED = \left[ \sum_{j=1}^k FE_{1j}; \sum_{j=1}^k FE_{2j}; \dots; \sum_{j=1}^k FE_{sj} \right]^T, \quad (3)$$

که  $FE_{ij}$ ،  $j$  امین عنصر در  $i$  امین ردیف ماتریس FE است. بردار ED می‌تواند برای رتبه‌بندی حس‌گرها استفاده شود. بدین صورت که اگر در یکی از درجات آزادی، مقدار ED صفر باشد حس‌گر مربوطه حذف

<sup>8</sup>Effective Independent method (EI) <sup>9</sup>Fisher Information Matrix (FIM) <sup>10</sup>Kinetic Energy Optimization Technique (EOT)

(رابطه (۹)):

$$ODP(i) = \prod_{r=1}^k |\Phi_{i,r}| \quad (9)$$

با استفاده از پارامتر ODP و حذف مقادیر کم، موقعیت حس‌گرهای مدنظر به تعداد موردنظر کاهش پیدا می‌کند.

## ۵.۲ روش موقعیت حس‌گر ترتیبی<sup>۱۳</sup>

روش موقعیت حس‌گر ترتیبی در سال ۲۰۱۱ توسط هوآبی و همکارانش ارائه شده است [۱۲]. این روش موقعیت اولیه حس‌گرها را توسط فاکتورگیری QR مشخص کرده و سپس با استفاده از به حداقل رساندن عناصر غیرقطری در معیار اطمینان مودال، مقادیر حس‌گرها را تخمین می‌زند. بردار پاسخ سازه که می‌تواند به عنوان ترکیبی از  $N$  مود بیان شود در رابطه (۱۰) با  $y_s$  نشان داده شده است:

$$y_s = \Phi q + \omega = \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i + \omega, \quad (10)$$

که  $\Phi$  ماتریس شکل مود مدل اجزای محدود،  $q$  نشان‌دهنده بردار پاسخ،  $\Phi_i$ ،  $i$  امین مود،  $N$  تعداد مودها،  $n$  تعداد حس‌گرها و  $\omega$  نشان‌دهنده بردار نویز حس‌گر است. تخمین کواریانس خطا بصورت رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود:

$$P = E [(q - \hat{q})(q - \hat{q})^T] = \left[ \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \Phi^T \Phi \right]^{-1} = \sigma^2 Q^{-1} \quad (11)$$

$E$  نشان‌دهنده امید ریاضی،  $\hat{q}$  تخمین‌زننده مؤثر بدون خطا و  $Q$  ماتریس اطلاعات فیشر است. انتخاب بهترین موقعیت حس‌گرها با به حداکثر رساندن دترمینان ماتریس اطلاعات فیشر صورت می‌گیرد. حداکثر شدن دترمینان ماتریس اطلاعات فیشر متناسب با حداکثر شدن نرم ماتریس فیشر است. کمترین نرم طیفی را برای این امر پیشنهاد داده است (رابطه (۱۲)).

$$\|Q\| = \|\Phi^T \Phi\| = \|\Phi_s^T\|^2 \quad (12)$$

حداکثر شدن ماتریس  $\Phi_s^T$  منجر به حداقل شدن  $p$  و در نتیجه بهترین حالت  $q$  خواهد شد.

فرض کنید زیرمجموعه‌ای از موقعیت‌های موردنظر متناظر با شکل مودهای حاصل از مدل اجزای محدود  $\Phi$  موجود باشد، که  $\Phi \in R^{n \times N}$ ،  $N < n$  و  $r(\Phi) = N$ ، با فاکتورگیری QR از ماتریس  $\Phi^T$ ، مجموعه اولیه از موقعیت حس‌گرها از رابطه (۱۳) بدست می‌آید.

$$\Phi^T E = QR = Q \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R_{nN} \end{bmatrix} \quad (13)$$

که  $E \in R^{n \times n}$  نشان‌دهنده ماتریس جایگشت است و  $|R_{11}| > |R_{22}| > \dots > |R_{NN}|$  است. برای تخمین تعداد حس‌گرهای بهینه از الگوریتم موقعیت حس‌گر ترتیبی استفاده شده

بطور مشابه، انرژی بهینه با حذف مجموعه‌ای از حس‌گرهایی که کمترین سهم در بین تمامی حس‌گرها را داشته‌اند بدست می‌آید. در روش بهینه‌سازی انرژی جنبشی هدف پیدا کردن پیکربندی است که در آن انرژی جنبشی حداکثر باشد. بنابراین با استفاده از روشی مشابه با روش مستقل مؤثر، سهم هر یک از حس‌گرهای باقی‌مانده توسط بردار EOT با استفاده از رابطه (۷) محاسبه می‌شود:

$$EOT = \sum_{i=1, \dots, m} \left[ \bar{\Psi} \psi \Lambda^{-1/2} \right]^2, \quad (7)$$

که  $\bar{\Psi}$ ، شکل مود کاهش‌یافته و  $\psi$ ، بردار ویژه و مقادیر ویژه، ماتریس انرژی جنبشی کاهش‌یافته است.

موقعیت‌هایی با کم‌ترین سهم از بردار EOT، حذف خواهند شد و متعاقباً سهم حس‌گرهای حذف شده از ماتریس انرژی جنبشی نیز کاهش می‌یابد. سپس وضعیت مرتبه ماتریس انرژی جدید بررسی می‌شود. اگر حذف حس‌گر باعث بروز مشکل مرتبه باشد، موقعیت حس‌گر موجود در آن نقطه نمی‌تواند حذف گردد، اما اگر حذف حس‌گر باعث بروز مشکل مرتبه نباشد، آنگاه امکان حذف حس‌گر در آن موقعیت وجود دارد و فرآیند تا رسیدن به تعداد حس‌گرهای موردنظر ادامه پیدا می‌کند. بنابراین، هر یک از بردارهای EOT مشخص‌کننده سهم هر یک از حس‌گرها در انرژی اندازه‌گیری شده است. در تئوری، تعداد حس‌گرهای نهایی برابر با تعداد مودهای موردنظر است. با این‌حال، مرتبه اضافی به دلیل وجود نویز افزایش پیدا کرده و بیش از  $N$  حس‌گر برای تشخیص  $N$  مود مستقل مورد نیاز است.

## ۳.۲ روش انرژی جنبشی مودال<sup>۱۱</sup>

روش انرژی جنبشی در سال ۲۰۰۷ توسط لی و همکارانش ارائه شده است [۸]. در این روش رتبه‌بندی تمامی موقعیت‌های موردنظر توسط شاخص  $MKE$  (رابطه (۸)) صورت می‌گیرد.

$$MKE_{pq} = \Phi_{pq} \sum_{s=1} M_{ps} \Phi_{sq} \quad (8)$$

که  $MKE_{qp}$  انرژی جنبشی متناسب با  $p$  امین درجه آزادی در  $q$  امین مود مد نظر،  $\Phi_{qp}$ ،  $p$  امین جزء متناظر با  $q$  امین شکل مود،  $M_{ps}$  عنصر ردیف  $p$  ام و ستون  $s$  ام ماتریس جرم،  $\Phi_{qs}$ ،  $s$  امین درجه آزادی مود  $q$  ام است. موقعیت‌های حس‌گر با بیشترین مقادیر  $MKE$  به عنوان مجموعه حس‌گر اندازه‌گیری انتخاب خواهند شد.

## ۴.۲ روش نقطه محرک بهینه<sup>۱۲</sup>

این روش در سال ۲۰۱۱ توسط گوندس ارائه شده است [۱۱]. در این روش به منظور شناسایی نقاط گره در شکل مودها، ثابت‌های مودال در تمامی درجات آزادی در هم ضرب شده و نتیجه به عنوان ضریبی به نام ODP بیان می‌شود

<sup>11</sup>Modal Kinetic Energy (MKE)    <sup>12</sup>Optimum Driving Point (ODP)    <sup>13</sup>Sequential Sensor Placement (SSP)

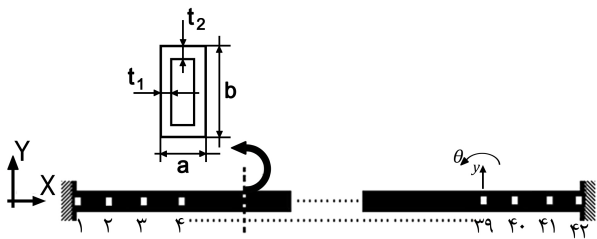
۲. ارزیابی تعداد حسگر لازم برای کاهش، با توجه به نقاطی که در مودهای مختلف مشارکت دارند.
۳. گروه‌هایی از موقعیت حسگرها که سهم‌های مشابهی در مودها داشته باشند شناسایی و بهترین گروه انتخاب خواهد شد.

### ۷.۲ معیار نقطه تغییر شکل مرجع بهینه<sup>۱۹</sup>

روشی جدید برای انتخاب نقاط مرجع توسط خطیبی و همکارانش در سال ۲۰۱۱ مطرح شده است [۱۴]. اساس این روش، حداکثر جابه‌جایی برای تمامی مودهای موجود در محدوده است. برای برآورد جابه‌جایی نقاط مورد نیاز در سازه، از مدل اجزای محدود استفاده شده است. این روش مشابه با معیار استفاده شده در آزمایش‌های مودال برای انتخاب بهترین نقاط برای تحریک سازه است و بصورت رابطه (۱۴) تعریف شده است.

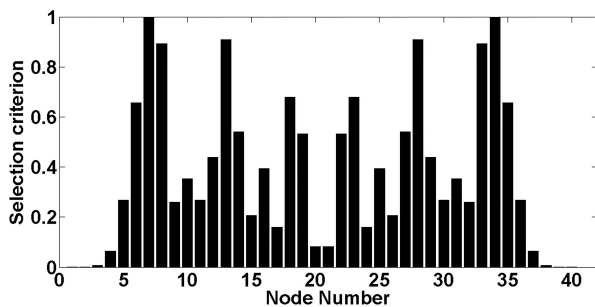
$$ODRP_{(j)} = \prod_{r=1}^m \|\Phi_{j,r}\| \quad (14)$$

که  $\Phi$  ماتریس شکل مود اجزای محدود،  $j$  شاخص درجه آزادی،  $r$  شاخص مود و  $m$  تعداد مودها است. با استفاده از این معیار، نقاط مرجع براساس شکل مودهای اجزای محدود بدست می‌آید. کانال مرجع انتخاب شده بیشینه جابه‌جایی را در تمامی مودهای موردنظر خواهد داشت و این امر موجب کمینه شدن تاثیر نویز خواهد شد. در مطالعه آن‌ها، یک تیر دو سر گیردار بصورت عددی مدل و روش پیشنهادی بر روی آن پیاده شده است (شکل ۱).



شکل ۱: شکل شماتیک تیر دو سر گیردار [۱۴].

مدل تیر نشان داده شده در شکل ۱، به ۴۱ المان و ۴۲ گره تقسیم شده است. نقاط مرجع باید به کمک شاخص پیشنهادی تعیین شوند. بدین ترتیب مقدار شاخص پیشنهادی طبق رابطه (۱۴) در تمام درجات آزادی جابه‌جایی محاسبه شده و مقدار آن بصورت نرمال شده، در شکل ۲ ارائه شده است.



شکل ۲: ضرب ODRP برای درجات آزادی مختلف [۱۴].

است.  $\Phi(m \times N)$  و  $\Phi(\hat{m} \times N)$  به ترتیب ماتریس شکل مود برای انتخاب مجموعه حسگر اولیه و درجات آزادی باقی‌مانده است که  $m$  تعداد درجات آزادی مجموعه حسگر موجود و  $\hat{m}$  تعداد درجات آزادی باقی‌مانده از انتخاب است و  $N$  تعداد مودها است. موقعیت اولین حسگر، به عنوان مکانی که بیشترین کاهش را در حداکثر عنصر غیر قطری ماتریس معیار اطمینان مودال<sup>۱۴</sup> دارد، انتخاب می‌شود. هنگامی که ردیف  $k$  از ماتریس  $\hat{\Phi}$  به  $\Phi$  اضافه می‌شود، معیار اطمینان مودال با اضافه شدن درجه آزادی  $k$  بین  $i$  و  $j$  محاسبه خواهد شد.

بعد از اضافه شدن حسگر به مجموعه اولیه، ماتریس  $\Phi$ ،  $\hat{\Phi}$  و معیار اطمینان مودال باید برای بازتاب این تغییرات بروزرسانی شوند. با توجه به موقعیت بهینه<sup>۱۵</sup> اولین حسگر، موقعیت حسگر دوم هم به عنوان یکی از موقعیت‌هایی که بیشترین کاهش در حداکثر عنصر غیر قطری ماتریس معیار اطمینان مودال را دارد، در حالت بهینه محاسبه شود. این فرآیند تا رسیدن به تعداد  $N_c$  حسگر ادامه پیدا می‌کند. الگوریتم فوق الگوریتم موقعیت حسگر ترتیبی پیشرو<sup>۱۶</sup> نامیده می‌شود. الگوریتم موقعیت حسگرهای ترتیبی می‌تواند برای مرتبه‌های قبلی هم استفاده شود. این روش با  $N_d$  محل حسگر شروع شده و با حذف متوالی حسگر در هر زمان از موقعیت‌های موجود ادامه پیدا می‌کند. این روش موقعیت حسگر ترتیبی پسرو<sup>۱۷</sup> نامیده می‌شود.

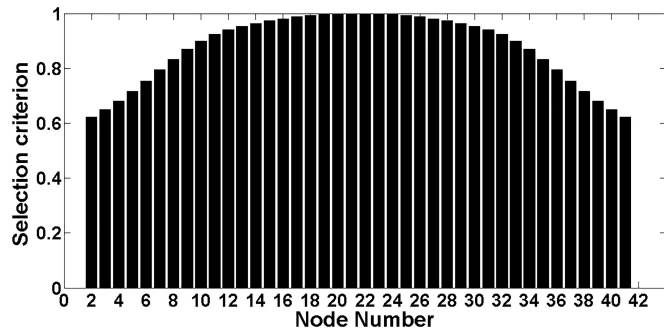
اگرچه روش موقعیت حسگر ترتیبی می‌تواند موقعیت‌بندی حسگرها را مشخص کند اما قرارگیری حسگرها در موقعیت بهینه نخواهد بود، زیرا موقعیت‌ها در یک روند تکراری مشخص می‌شوند [۱۲].

### ۶.۲ سهم مودال در انرژی خروجی<sup>۱۸</sup>

روش سهم مودال در انرژی خروجی در سال ۲۰۱۱ توسط دیناس و همکارانش ارائه شد [۱۳]. زمانی که در یک سیستم اثری از شرایط اولیه در پاسخ نباشد، تمامی انرژی خروجی، متناسب با ماتریس مشاهده‌پذیری و حالت اولیه است. در این روش، سهم مستقل حالت جابه‌جایی مودال و حالت سرعت مودال در یک مود به عنوان سهم آن مود در نظر گرفته می‌شود. برای هر نوع از پاسخ‌های اندازه‌گیری شده، سهم هر مود در انرژی خروجی متناسب با  $\{\Psi_i\}^T \{\Psi_i\}$  خواهد بود که  $\{\Psi\}$  نشان‌دهنده<sup>۱۸</sup>  $i$  امین بردار شکل مود است که شامل عناصر متناظر با درجات آزادی انتخاب شده است. سهم هر مود که در این روش اشاره شده است مشابه با سهم مودها در روش مستقل مؤثر است. برای ارزیابی محل حسگرها، سهم مودال برای مودها بصورت جداگانه در درجات آزادی، بر اساس سهم مودال در انرژی خروجی محاسبه و متعاقباً موقعیت‌ها برای شکل مودهای موردنظر با توجه به پروفیل سهم آن‌ها تشخیص داده می‌شوند. گام‌های اساسی در تشخیص موقعیت حسگرها، به ترتیب عبارتند از:

۱. تعیین تعداد حسگرها بطور جداگانه با توجه به مودهای مدنظر با در نظر گرفتن اولویت شناسایی مودها.

<sup>14</sup>Modal Assurance Criterion (MAC) <sup>15</sup>optimal location <sup>16</sup>Forward Sequential Sensor Placement (FSSP) <sup>17</sup>Backward Sequential Sensor Placement (BSSP) <sup>18</sup>Modal Contribution in Output Energy (MCOE) <sup>19</sup>Optimum Deflection Reference Points (ODRP)



شکل ۳: ضریب همبستگی برای درجات آزادی مختلف [۱۴].

جدول ۲: نحوه قرارگیری شتابسنجها بر روی تیر تحت بررسی در آزمایش شبیه‌سازی شده - شاخص همبستگی

شماره مرحله	نقاط مرجع	نقاط دارای شتابسنج متحرک
۱	۲۳، ۲۲، ۲۱، ۲۰	۹، ۸، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱
۲	۲۳، ۲۲، ۲۱، ۲۰	۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۱۸، ۱۷، ۱۶، ۱۵
۳	۲۳، ۲۲، ۲۱، ۲۰	۲۷، ۲۶، ۲۵، ۲۴، ۱۹، ۳۱، ۳۰، ۲۹، ۲۸
۴	۲۳، ۲۲، ۲۱، ۲۰	۳۶، ۳۵، ۳۴، ۳۳، ۳۲، ۴۰، ۳۹، ۳۸، ۳۷

## ۹.۲ روش مستقل مؤثر تکامل یافته

ترکیبی از دو روش مستقل مؤثر و روش انرژی جنبشی به عنوان روش مستقل مؤثر تکامل یافته در سال ۲۰۱۴ توسط سرپرست و همکارانش ارائه شده است [۱۷]. در این روش ماتریس اطلاعات طبق رابطه (۱۷) بدست می‌آید.

$$Q = \Phi^T \Phi \quad (17)$$

به این ترتیب ماتریس  $E$  که عناصر قطری آن شامل سهم مودال هر درجه آزادی می‌باشد، از رابطه (۱۸) محاسبه می‌شود.

$$E = \Phi Q^{-1} \Phi^T \quad (18)$$

روش پیشنهادی برای انتخاب نقاط مرجع، علاوه بر سهم هر درجه آزادی در استقلال خطی شکل مودهای مورد نظر، انرژی جنبشی مودال هر درجه آزادی را نیز در نظر می‌گیرد. بنابراین برای محاسبه انرژی جنبشی مودال هر درجه آزادی  $i$ ام از رابطه (۱۹) استفاده می‌شود.

$$e_j = \sum_{r=1}^m \frac{\Phi_{jr}^2}{W_r^2} \quad (19)$$

که  $W_r$  فرکانس طبیعی مود  $r$ ام،  $m$  تعداد مود مدنظر و  $\Phi_{jr}$  عنصر  $j$ ام از شکل مود  $r$ ام است.

در نهایت  $E^*$  بردار موقعیت مستقل مؤثر تکامل یافته می‌باشد که از رابطه (۲۰) بدست می‌آید.

$$E^* = \text{diag}(E) \otimes e_j \quad (20)$$

چهار نقطه که بیشترین مقدار شاخص پیشنهادی را دارند، به عنوان مرجع انتخاب شده‌اند. در نتیجه در آزمایش شبیه‌سازی شده، چهار نقطه شتابسنج ثابت دارند که همان نقاط مرجع می‌باشند و سایر نقاط دارای شتابسنج متحرک می‌باشند. شماره این نقاط در هر مرحله از آزمایش شبیه‌سازی شده در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱: نحوه قرارگیری شتابسنجها بر روی تیر تحت بررسی در آزمایش شبیه‌سازی شده - شاخص ODRP

شماره مرحله	نقاط مرجع	نقاط دارای شتابسنج متحرک
۱	۳۴، ۲۸، ۱۳، ۷	۱۰، ۹، ۸، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱
۲	۳۴، ۲۸، ۱۳، ۷	۱۷، ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۲، ۱۱، ۲۰، ۱۹، ۱۸
۳	۳۴، ۲۸، ۱۳، ۷	۲۶، ۲۵، ۲۴، ۲۳، ۲۲، ۲۱، ۳۰، ۲۹، ۲۷
۴	۳۴، ۲۸، ۱۳، ۷	۳۷، ۳۶، ۳۵، ۳۳، ۳۲، ۳۱، ۴۰، ۳۹، ۳۸

## ۸.۲ معیار همبستگی<sup>۲۰</sup>

معیار دیگری برای انتخاب نقاط مرجع به عنوان همبستگی شناخته شده که محققین مختلف به آن اشاره کرده‌اند [۱۴-۱۶]. در این روش، همبستگی بین سیگنال موقعیت‌های مختلف محاسبه می‌شود و موقعیت‌هایی که بیشترین همبستگی را دارند به عنوان مرجع انتخاب می‌شوند. ضریب همبستگی<sup>۲۱</sup> با استفاده از رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود.

$$C_{ij}^2 = \frac{E \left[ (y_i(t) \cdot y_j(t))^t \right]}{E [(y_i(t) \cdot y_i(t))] \cdot E [(y_j(t) \cdot y_j(t))]} \quad (15)$$

سیس شاخص  $B_i$  با میانگین‌گیری ضرایب همبستگی در هر موقعیت، از رابطه (۱۶) به دست می‌آید.

$$B_i = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij} \quad i \neq j \quad (16)$$

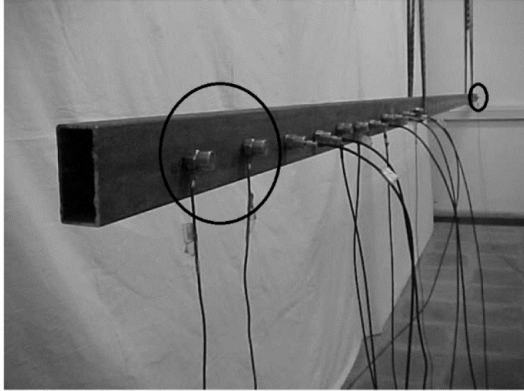
با توجه به رابطه (۱۶)، موقعیت‌هایی با بیشترین مقادیر  $B_i$  به عنوان مرجع انتخاب می‌شوند. این معیار برای انتخاب نقاط مرجع در محیط‌های نویزی مناسب است ولی فقط تا ۱۵٪ در برابر نویز مقاومت می‌کند [۱۴].

نمونه‌ای از انتخاب نقاط مرجع در یک تیر با استفاده از روش همبستگی توسط خطیبی و همکارانش بر روی تیر شکل ۱، انجام شده است [۱۴]. در این مطالعه، نقاط مرجع به کمک شاخص پیشنهادی همبستگی تعیین شده‌اند. نمودار نرمال شده این شاخص در شکل ۳ ارائه شده است.

در بین تمامی نقاط، چهار نقطه‌ای که بیشترین مقدار شاخص پیشنهادی را دارند، به عنوان مرجع انتخاب شده‌اند. در نتیجه در آزمایش شبیه‌سازی شده، چهار نقطه شتابسنج ثابت دارند که همان نقاط مرجع می‌باشند و سایر نقاط دارای شتابسنج متحرک می‌باشند. شماره این نقاط در هر مرحله از آزمایش شبیه‌سازی شده در جدول ۲ آمده است.

<sup>20</sup>Correlation criteria    <sup>21</sup>Correlation coefficient

بصورت عددی و تجربی صورت گرفته است. در بخش تجربی، یک قوطی فلزی ۴/۵ متری، تحت مطالعه قرار گرفته است و با استفاده از مدل المان محدود، روش بر روی آن پیاده و شاخص RCSC برای قوطی محاسبه شده است. براساس این شاخص نقاط مشخص شده در شکل ۵، به عنوان نقاط مرجع انتخاب شده اند.



شکل ۵: قوطی فلزی تحت آزمایش مودال محیطی (نقاط مرجع در شکل مشخص شده است) [۱۸].

## ۱۱.۲ روش مستقل مؤثر فرکانسی<sup>۲۳</sup>

روش مستقل مؤثر فرکانسی یک روش حوزه فرکانس است که توسط راتو و همکارانش در سال ۲۰۱۴ ارائه شده است [۱۹]. این روش ترکیبی از تجزیه و تحلیل مولفه‌های اصلی<sup>۲۴</sup> و الگوریتم مستقل مؤثر است. بر اساس الگوریتم قرارگیری حس‌گرها در روش ذکر شده، تابع پاسخ فرکانسی را می‌توان به فرم مسئله تخمین حالت نوشت (رابطه (۲۲)):

$$H = \Psi \bar{V} + N, \quad (22)$$

که  $\bar{V} = sV$  و نشان‌دهنده پاسخ فرکانسی در جهات اصلی دینامیکی و  $N$  ماتریس نویز سفید گوسی است.

در این روش ماتریس اطلاعات فیشر بصورت رابطه (۲۳) نوشته می‌شود:

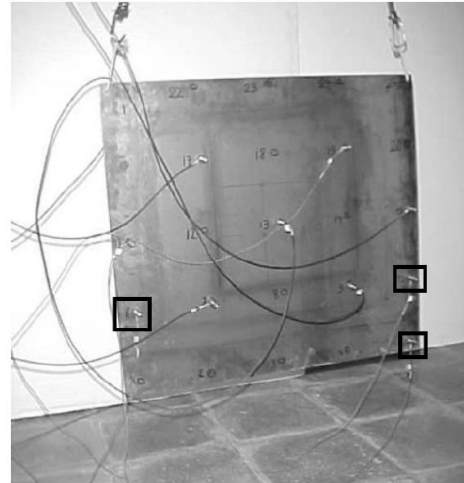
$$Q = \Psi_c^* W \Psi_c, \quad (23)$$

که \* نشان‌دهنده ترانپوز مزدوج مختلط،  $\Psi_c$  جهات اصلی فعال در مجموعه حس‌گرهای موردنظر و  $W$  ماتریس وزن است. در این روش  $W$  ماتریس یکه و حداکثر دترمینان ماتریس اطلاعات به عنوان معیار قرارگیری حس‌گر در نظر گرفته می‌شود؛ زیرا به حداکثر رسیدن توان سیگنال و استقلال در جهات اصلی مدنظر است. مشابه با روش مستقل مؤثر، روش مطرح شده هم بر اساس یک روند تکراری برای کاهش موقعیت حس‌گرها ارائه شده است که کمترین تاثیر را در مقادیر دترمینان ماتریس اطلاعات می‌گذارد. مقدار  $FEfi$  متناظر با  $i$  امین حس‌گر طبق رابطه (۲۴) بدست می‌آید.

$$FEfi = \Psi_i Q^{-1} \Psi_i^T \quad (24)$$

درجات آزادی با بالاترین مقدار  $E^*$  به عنوان نقاط مرجع انتخاب می‌شوند. به منظور درک بیشتر روش ارائه شده، بخشی از نتایج تجربی ارائه شده در مرجع [۱۷]، در ادامه بیان می‌شود.

در مرجع [۱۷]، جهت بررسی روش مستقل مؤثر تکامل یافته، مطالعه بصورت عددی و تجربی صورت گرفته است. در بخش تجربی، یک صفحه فلزی، تحت مطالعه قرار گرفته است و با استفاده از مدل‌سازی المان محدود، روش بر روی آن پیاده و شاخص  $E^*$  برای ورق محاسبه شده است. براساس این شاخص نقاط مشخص شده در شکل ۴، به عنوان نقاط مرجع انتخاب شده‌اند.



شکل ۴: ورق تحت آزمایش (نقاط مرجع در شکل مشخص شده است) [۱۷].

## ۱۰.۲ معیار انتخاب مختصات مرجع<sup>۲۲</sup>

روش جدیدی برای انتخاب نقاط مرجع به کمک روش مستقل مؤثر توسط خطیبی و همکارانش در سال ۲۰۱۴ مطرح شده است [۱۸]. در این روش شاخصی به نام معیار انتخاب نقاط مرجع پیشنهاد می‌شود که درجات آزادی دارای سهم بیشتر در پاسخ سازه را به عنوان نقاط مرجع انتخاب می‌کند. شاخص پیشنهادی، برای هر درجه آزادی طبق رابطه (۲۱) محاسبه می‌شود.

$$RCSC = \text{diag}([E]) \quad (21)$$

$$[E] = [\Phi]_{N \times m} [F^{-1}] [\Phi]_{N \times m}^T$$

که  $[\Phi]_{N \times m}$  ماتریس شکل‌مود اجزای محدود،  $N$  تعداد درجات آزادی و  $m$  تعداد مودهای مدنظر و ماتریس  $[F]$  ماتریس اطلاعات فیشر است.

عناصر قطری ماتریس  $E$  که همان شاخص انتخاب نقاط مرجع است، سهم هر درجه آزادی متناظر را در مرتبه کلی ماتریس شکل مود  $[\Phi]_{N \times m}$ ، مشخص می‌کند. بنابراین عناصر دارای مقادیر بیشتر، سهم بیشتری در ایجاد پاسخ سازه خواهند داشت و همه مودهای موردنظر را شامل می‌شوند. در نتیجه درجات آزادی متناظر با این عناصر، برای انتخاب به عنوان مرجع مناسب خواهند بود.

در مرجع [۱۸] جهت بررسی روش انتخاب مختصات مرجع، مطالعه

ماتریس معیار اطمینان مودال به عنوان هدف بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند. المان‌های غیرقطری این ماتریس بیان‌کننده ارتباط بین بردارهای شکل مود است. المان‌ها دارای ارزش ۰ و ۱ هستند و بنابراین تشخیص مود  $i$ ام و  $j$ ام به سادگی امکان‌پذیر است. اگر مقدار المان غیر قطری کوچک باشد؛ این امر نشان‌دهنده فرارگیری مناسب حس‌گرها می‌باشد.

#### ۴ بحث و نتیجه‌گیری

در سازه‌های بزرگ به دلیل محدودیت‌های موجود، اندازه‌گیری همزمان پاسخ سازه در تمامی نقاط امکان‌پذیر نیست؛ بنابراین سازه باید در چندین مرحله مورد آزمایش قرار بگیرد. برای برقراری ارتباط بین مراحل مختلف در آزمایش، لازم است نقاطی به عنوان مرجع انتخاب شوند. از این رو انتخاب صحیح نقاط مرجع، حائز اهمیت فراوانی است. در این مقاله روش‌های انتخاب نقاط مرجع در آزمایش مودال محیطی مورد مطالعه قرار گرفته است. برخی از روش‌های مورد بررسی نظیر معیار بهینه نقطه تغییر شکل مرجع (ODRP)، معیار انتخاب مختصات مرجع (RCSC)، روش نقطه محرک بهینه (ODP و ODRP)، روش مستقل مؤثر تکامل یافته و روش همبستگی (Correlation) به طور مستقیم در انتخاب نقاط مرجع به کار گرفته شده‌اند. اما سایر روش‌هایی که در مقاله اشاره شد، صرفاً در انتخاب نقاط اندازه‌گیری در آزمایش مودال استفاده شده‌اند؛ ولی به دلیل مشابهت تئوری این روش‌ها، با روش‌هایی که برای انتخاب نقاط مرجع استفاده شده‌اند، می‌توان از آن‌ها در انتخاب نقاط مرجع نیز استفاده کرد. از این رو تمامی روش‌ها در مقاله ذکر و بررسی شده‌اند. به منظور بررسی بهتر و مقایسه مناسب‌تر روش‌های مورد مطالعه، مزایا و معایب روش‌ها در جدول‌های ۳ و ۴ بیان شده است.

جدول ۳: مزایا و معایب روش‌های مورد مطالعه

نام روش	مزایا و معایب
مستقل مؤثر (EI)	حجم محاسباتی اندک، عدم امکان تعیین تعداد حس‌گرهای مورد نیاز برای تشخیص شکل مودها، عدم امکان بکارگیری در محدوده فرکانس متوسط و بالا، درجات آزادی انتخاب شده لزوماً دارای انرژی جنبشی بالا نیستند.
بهینه‌سازی انرژی جنبشی (EOT)	حجم محاسباتی اندک، نتایج بهتر نسبت به روش EI بدلیل بهینه‌سازی انرژی جنبشی، عدم امکان تعیین تعداد حس‌گرهای مورد نیاز برای تشخیص شکل مودها.
روش انرژی جنبشی مودال (MKE)	افزایش نسبت سیگنال به نویز، امکان انتخاب موقعیت‌هایی با دامنه حرکتی مناسب.
نقطه تغییر شکل مرجع بهینه (ODRP)، نقطه محرک بهینه (ODP)	تحمل نویز در سیگنال تا میزان ۲۵٪، احتمال بروز خطا در انتخاب نقاط بدلیل استفاده از مدل المان محدود.
موقعیت حس‌گر ترتیبی (SSP)	انتخاب موقعیت حس‌گرها بر اساس به حداقل رساندن عناصر غیرقطری در معیار اطمینان مودال، موقعیت‌ها لزوماً در موقعیت بهینه قرار نمی‌گیرند.
سهم مودال در انرژی خروجی (MCOE)	تشخیص موقعیت حس‌گرها برای شکل مودهای متعدد.

FEfi عددی بین ۰ و ۱ است. حس‌گرهایی با مقادیر صفر که هیچ تاثیری در درمیان ماتریس اطلاعات ندارند حذف خواهند شد؛ درحالی‌که حس‌گرهای با مقادیر ۱ در استقلال شکل مودهای موردنظر، حیاتی بوده و نمی‌توانند حذف شوند. حس‌گرها طی یک روند تکراری حذف می‌شوند تا به تعداد مطلوب برسند. در مجموعه حس‌گرهای نهایی، برای اطمینان از استقلال، تعداد حس‌گرها باید حداقل با تعداد مودهای هدف برابر باشند. ماتریس اطلاعات جدید و شاخص FEfi جدید بعد از هر بار حذف حس‌گر از مجموعه موردنظر، باید مجدداً محاسبه شوند.

#### ۳ روش مستقل مؤثر- نقاط محرک باقی مانده ۲۵

روش مستقل مؤثر- نقاط محرک باقی‌مانده که برپایه روش مستقل مؤثر است، توسط چانگ و همکارانش در سال ۲۰۱۴ مطرح شده است [۲۰]. در این روش، برخلاف روش مستقل مؤثر، که در آن امکان انتخاب موقعیت‌هایی از حس‌گر با محتوای انرژی پایین وجود دارد، روش مستقل مؤثر- نقاط محرک باقی مانده بر روی حس‌گرهایی در مناطقی با سطح انرژی بالا تمرکز می‌کند. در این روش شاخصی به نام EI - DPR تعریف می‌شود (رابطه (۲۵)) و موقعیت حس‌گرهایی با کمترین مقدار شاخص از مجموعه حس‌گرهای موردنظر حذف می‌شوند:

$$EI - DPR = ([\Phi\Psi] \otimes [\Phi\Psi] \cdot \lambda^{-1} \cdot \iota) \otimes DPR, \quad (25)$$

که  $\lambda$  و  $\Psi$  به ترتیب مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس اطلاعات فشر هستند و  $\iota$  بردار ستونی متشکل از  $m$  مقدار واحد، برای جمع تمامی سهم‌های کسری متناظر با شکل مودها در هر یک از موقعیت‌های حس‌گر است. عنصر DPR نیز طبق رابطه (۲۶) بدست می‌آید.

$$DPR_i = \sum_{j=1}^m \frac{\Phi_{ij}^2}{w_j} \quad (26)$$

$i$ ،  $\Phi_{ij}$ ،  $i$  امین موقعیت از  $j$  امین مود و  $w_j$  هم  $j$  امین فرکانس طبیعی است.

#### ۱.۳ روش معیار اطمینان مودال اصلاح شده - الگوریتم

##### ژنتیک بهبود یافته ۲۶

این روش در سال ۲۰۱۴ توسط هی و همکارانش، برای رفع نقص الگوریتم ژنتیک سنتی ارائه شده است [۲۱]. الگوریتم ژنتیک سنتی دارای یک نقص است و آن این است که فاکتورهای لقاح و جهش در تمامی مدت سیکل تکرار ثابت هستند، که این نقص می‌تواند سرعت تکامل و توانایی تحقیقاتی این روش را کم کند. بنابراین روش جدیدی برای حل این موضوع ارائه شده است. در روش برنامه نویسی سنتی، تعداد ژن‌های با ارزش ۱ می‌تواند در فرآیندهای جهش و یا لقاح تغییر پیدا کند، که منجر به فرارگیری دو یا چند حس‌گر در یک موقعیت می‌شود. بنابراین از روش برنامه نویسی با ساختار دوگانه ۲۷ استفاده شده است. همچنین در این روش، المان‌های غیرقطری

<sup>25</sup>Effective Independence - Driving Point Residue (EI-DPR) <sup>26</sup>Modified Modal Assurance Criterion-Improved Adaptive Genetic Algorithm (IA-GA-MMAC) <sup>27</sup>Dual-structure coding method

جدول ۴: ادامه جدول ۳.

مزایا و معایب	نام روش
تحميل نوبز در سيگنال تا ميزان ۱۵٪، نيازمنند انجام آزمايش اوليه در سازه، انتخاب نقاط مرجع بر اساس داده‌های آزمايش نه مدل عددی، عدم کارایی مناسب در صورت تغيير شرايط آزمايش اصلی با آزمايش اوليه.	همبستگی (Correlation)
نقاط مرجع انتخابی همزمان دارای بیشترین نقش در استقلال خطی شکل مودها و انرژی جنبشی بالا می‌باشند؛ همچنین روش عملکرد مناسبی در برابر نوبز دارد.	مستقل مؤثر تکامل یافته
تحميل نوبز در سيگنال تا ميزان ۲۰٪، احتمال بروز خطا در انتخاب نقاط بدليل استفاده از مدل المان محدود.	انتخاب مختصات مرجع (RCSC)
امکان به‌کارگیری در تمامی محدوده‌های فرکانسی اعم از محدوده فرکانسی پایین و متوسط.	روش مستقل مؤثر فرکانسی (FEfi)
مشابه روش مستقل مؤثر با امکان انتخاب حس‌گرهایی با سطح انرژی بالا.	مستقل مؤثر- نقاط محرک باقی مانده (EFI-DPR)
انتخاب نقاطی با سطح انرژی مودال بالا، دارای سرعت محاسباتی بیشتر.	معیار اطمینان مودال اصلاح شده - الگوریتم ژنتیک بهبودیافته (IAGA-MMAC)

مراجع

- [10] Heo, G., Wang, M.L., and Satpathi, D. Optimal transducer placement for health monitoring of long span bridge. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 16(7):495 – 502, 1997.
- [11] Bakir, Pelin. Evaluation of optimal sensor placement techniques for parameter identification in buildings. *Mathematical & Computational Applications*, 16, 08 2011.
- [12] Yi, Ting-Hua, Li, Hong-Nan, and Gu, Ming. Optimal sensor placement for structural health monitoring based on multiple optimization strategies. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 20(7):881–900, 2011.
- [13] Debnath, N., Dutta, A., and Deb, S.K. Placement of sensors in operational modal analysis for truss bridges. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 31:196 – 216, 2012.
- [14] Khatibi, M.M., Ashory, M.R., Sarparast, Hoda, and Malekjafarian, Abdollah. Selection of reference points based on optimum deflections in operational modal testing. 01 2011.
- [15] Reynders, Edwin and Roeck, Guido De. Reference-based combined deterministic–stochastic subspace identification for experimental and operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(3):617 – 637, 2008.
- [16] Fan, Jiangling, Zhang, Zhiyi, and Hua, Hongxing. Data processing in subspace identification and modal parameter identification of an arch bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(4):1674 – 1689, 2007.
- [۱۷] سرپرست، هدی، آشوری، محمدرضا، و خطیبی، محمدمهدی. روشی جدید برای انتخاب نقاط مرجع در آزمايش مودال محیطی سازه‌ها. *مهندسی مکانیک مدرس*، ۱۴(۳)، ۱۳۹۳.
- [۱۸] خطیبی، محمدمهدی و آشوری، محمدرضا. انتخاب نقاط مرجع به کمک روش موقعیت مستقل مؤثر در آزمايش مودال محیطی سازه‌ها. *مهندسی مکانیک مدرس*، ۱۴(۴)، ۱۳۹۳.
- [19] Rao, A. Rama Mohan, Lakshmi, K., and Krishnakumar, S. A generalized optimal sensor placement technique for structural health monitoring and system identification. *Procedia Engineering*, 86:529 – 538, 2014. Structural Integrity.
- [20] Chang, Minwoo and Pakzad, Shamim N. Optimal sensor placement for modal identification of bridge systems considering number of sensing nodes. *Journal of Bridge Engineering*, 19(6):04014019, 2014.
- [21] He, Can, Xing, Jianchun, Li, Juelong, Yang, Qiliang, Wang, Ronghao, and Zhang, Xun. A new optimal sensor placement strategy based on modified modal assurance criterion and improved adaptive genetic algorithm for structural health monitoring. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 03 2015.
- [۱] سرپرست، هدی، آشوری، محمد رضا، و خطیبی، محمد مهدی. هنر اندازه گیری و مدل سازی در آزمايش مودال و مشکلات آن (بخش اول). *مجله علمی صوت و ارتعاش*، ۱۱(۱):۵۹-۶۸، ۱۳۹۱.
- [2] Fu, Zhi-Fang and He, Jimin. *Modal analysis*. Elsevier, 2001.
- [3] Ewins, D. J. *Modal Testing: Theory, Practice, and Application*. Wiley, 2000.
- [4] Hanson, D. *Operational modal analysis and model updating with a cyclostationary input*. Ph.D. thesis, University of New South Wales, 2006.
- [5] Cauberghe, Bart. Applied frequency-domain system identification in the field of experimental and operational modal analysis. *Praca doktorska, VUB, Brussel*, 2004.
- [6] Peeters, Bart. *System identification and damage detection in civil engineering*. Ph.D. thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2000.
- [7] Kammer, Daniel C. Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14(2):251–259, 1991.
- [8] Li, D.S., Li, H.N., and Fritzen, C.P. The connection between effective independence and modal kinetic energy methods for sensor placement. *Journal of Sound and Vibration*, 305(4):945 – 955, 2007.
- [9] Castro-Triguero, Rafael, Rodríguez-León, M Teresa, Macías, Enrique García, Sevilla, Rafael Gallego, Sánchez, José Sánchez, and Vázquez, Enrique. Optimal sensor placement methodology for operational modal system identification of a hyperbolic paraboloidal fabric. in *7th European Workshop on Structural Health Monitoring (EWSHM 2014)*, 2014.