

مدلسازی دینامیک پرواز ۶ درجه آزادی یک هواپیما با استفاده از ضرایب آیرودینامیکی تونل باد

رامین مهدی پور^{۱*}، مهدی افشاریان^۲، علی غفاری^۳، سلمان اخوت^۴

^۱استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تفرش

^۲دانش‌آموخته کارشناسی مهندسی مکانیک، دانشگاه تفرش

^۳دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

^۴سازمان پژوهش‌های ایران

*مسئول مکاتبات: ramime56@yahoo.com

چکیده

واژگان کلیدی

معادلات پرواز
شبیه‌سازی پرواز
تحلیل عددی پرواز
دینامیک پرواز
معادلات آیرودینامیکی

تاریخچه مقاله

تاریخ دریافت ۱۳۹۶/۱۰/۱۷

تاریخ پذیرش ۱۳۹۷/۰۷/۲۸

در این مقاله با استفاده از معادلات حاکم بر وسایل پرنده درون جوی، نتایج آزمایشات تونل باد برای هواپیمای مدل، و شرایط تشابه پارامترهای مختلف هواپیما با مدل آن، به ارائه الگوریتم مناسب برای حل عددی معادلات دینامیک پرواز ۶ درجه آزادی پرداخته شده است. سپس با به کارگیری روابط برای هواپیمای F-16، نتایج تحلیل پرواز هواپیما به فرم نمودارهای ارتفاع پرواز، زاویه حمله، عدد ماخ، زاویه سرش جانبی و مسیر پرواز بر حسب زمان برای دو مورد حالت پایه و تغییر زاویه ۱۰ درجه‌ای سکان بالادهنده ارائه شده و تغییرات نسبت به مورد پایه گزارش شده است. تغییر زاویه سکان موجب افزایش ۸۰ متری ارتفاع، کاهش ۱ درصدی زاویه حمله، کاهش ۰/۰۲ عدد ماخ و عدم تغییر زاویه سرش و مسیر پرواز هواپیما می‌شود. با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله، علاوه بر بررسی پارامترهای پرواز هواپیما به قابلیت مانورپذیری هواپیما و کنترل پرواز نیز پرداخته شده است. به این صورت که زوایای سکان بالادهنده، سکان عقب و یا شهرهای چپ و راست، تغییر داده شده و تاثیر آن بر دینامیک پرواز مشاهده و جهت کنترل پارامترهای پرواز و مانورپذیری هواپیما استفاده می‌شود.

۱ مقدمه

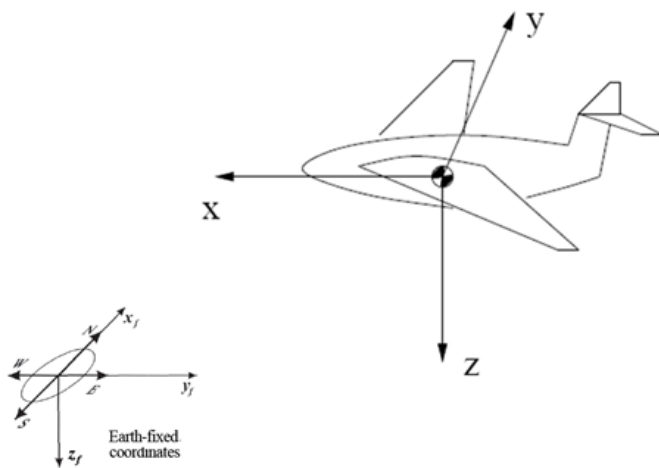
است که قبل از ساخت نمونه کامل بدون نیاز به صرف هزینه‌های بالا، با استفاده از تحلیل مدل در رایانه به نتایج مفیدی دست پیدا کرد، که به کمک آنها می‌توان خصوصیات وسیله پرنده، از جمله کنترل‌پذیری و خصوصیات نامطلوب آن را تخمین زده و یا پیش‌بینی نمود. به عنوان مثال، در مرجع [۶]، به حل معادلات کامل سه بعدی هواپیما با یک مدل آیرودینامیکی خطی توسط نرم افزار متلب و بخش توابع سیستم کنترل متلب پرداخته شده است. در مرجع [۷]، مدلسازی ناپایای مشخصه‌های آیرودینامیکی هواپیماهای قابل مانور ارائه شده است. تعدادی روش متفاوت خطی کردن مدلسازی شامل توابع انتقال آیرودینامیکی، مدل‌های فضا حالت، پاسخ‌های نشانگر و تشابه آنها نشان داده شده است.

در مرجع [۸]، به بررسی رفتار یک هواپیمای قابل انعطاف در میدان جریان توربولانس به کمک معادلات حاکم و حل آنها به کمک روش‌های عددی پرداخته شده است. در مرجع [۹]، به ارزیابی پایداری استاتیکی و دینامیکی بال هواپیمای بدون سرنشین با استفاده از نرم‌افزار Tornado پرداخته شده است. معادلات آیرودینامیک طولی و جانبی در شرایط جریان غیر قابل تراکم و متقارن حل شده است.

در مرجع [۱۰]، هدف بیان مشخصه‌های دینامیک پرواز و بهبود عملکرد پروازی هواپیماهای بزرگ مقیاس است. توسعه یک مدل دینامیکی (با استفاده از معادلات دینامیک پرواز ۶ درجه آزادی) و ارزیابی پایداری

با توجه به هزینه‌های بالای ساخت و آزمایش وسایل پرنده، امکان‌سنجی و تست ایده‌های جدید قبل از عملی کردن روند ساخت، الزام‌آور است چرا که در صورت پیش بینی نادرست یا طراحی غلط، خسارات سنگینی را متحمل خواهد نمود. مدل ریاضی برای پرواز با سرعت بالا در مقالات تحقیقی سال ۱۹۶۰ بیان شده است [۱]. در سال ۱۹۷۰، معادلات حرکت هواپیما و صورت خطی شده آن معرفی شدند [۲]. در سال ۱۹۹۵، معادلات دینامیک پرواز هواپیما در جهات جانبی و مدل‌های پایداری دینامیکی ارائه شد [۳]. توسعه مدل‌های دینامیک پرواز برای شرایط مختلف از سال ۱۹۶۰ تا کنون همچنان ادامه دارد تا آنجا که در سال ۲۰۱۳ با توجه به پیچیدگی مدلسازی دینامیک پرواز هواپیمای هاپیرسونیک از نقطه نظر معادلات لاگرانژ بر اساس قانون اول دینامیک، این معادلات برای شرایط هاپیرسونیک توسعه داده شده است [۴]. به عنوان نمونه‌ای دیگر در سال ۲۰۱۴، دینامیک پرواز هواپیمای متا که از ترکیب چند هواپیمای کوچک ایجاد شده است، ارائه شده است [۵]. بدون شک ارتقا کامپیوترها و افزایش استفاده از آنها، تاثیر بسزایی در حرکت به سمت استخراج معادلات دینامیک پرواز هواپیما در شرایط مختلف و حل آنها داشته است.

امروزه پیشرفت علوم کامپیوتر و نرم‌افزارها این امکان را به وجود آورده

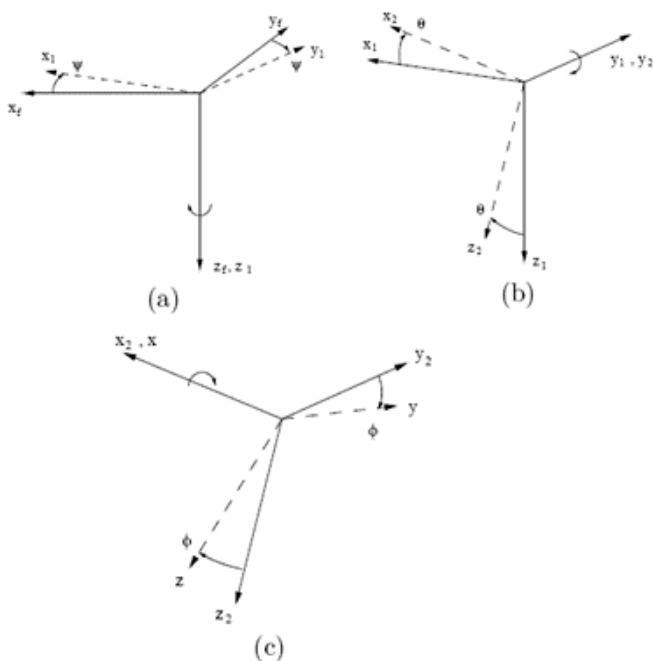


شکل ۱: جهت‌دهی دستگاه مختصات بدنه نسبت به زمین

۲.۲. زوایای اولر (θ, φ, ψ)

این زوایا به صورت زیر با ایجاد دوران نسبت به سه محور مختصات، وضعیت مختصات بدنه را مشخص می‌کند [۱۸، ۲۰].

- ۱- یک دوران مثبت حول محور Z_f به اندازه زاویه ψ برای ساختن دستگاه (x_1, y_1, z_1) (شکل ۲ قسمت a)
- ۲- یک دوران مثبت حول محور y_1 به اندازه زاویه θ برای ساختن دستگاه (x_2, y_2, z_2) (شکل ۲ قسمت b)
- ۳- یک دوران مثبت حول محور x_2 به اندازه زاویه φ برای ساختن دستگاه (x, y, z) (شکل ۲ قسمت c)



شکل ۲: زوایای اولر θ, φ, ψ [۱۸]

با استفاده از فرمول ۱ می‌توانیم سرعت هواپیما را نسبت به نقطه مرجع زمینی در سه جهت مختلف حساب کنیم. در این ماتریس U, V, W سرعت هواپیما در مختصاتی که هم جهت با دستگاه مختصات بدنه است، ولی

پرواز در شرایط ناپایا در این مقاله انجام شده است. در مرجع [۱۱]، اعوجاج ایجاد شده با تغییر شرایط مانور هواپیمای F-16 بررسی شده است و شبیه‌سازی‌ها به کمک استفاده از محاسبه گر معادلات دیفرانسیل جزئی، COMSOL انجام شده است. در مرجع [۱۲]، دینامیک پرواز هواپیماهای با دنباله V شکل به کمک قانون مکانیک نیوتن و معادلات مومنتم اوایلر استخراج شده است. از آنجا که حل معادلات حاصل به صورت تحلیلی پیچیده بوده لذا با تکنیک‌هایی معادلات حرکت خطی سازی شده و سپس توسط نرم افزار متلب حل شده‌اند و با نتایج شبیه‌سازی عددی مقایسه شده که دقت خوب تقریب‌ها را نشان می‌دهد.

جهت اعتبارسنجی تحلیل عددی به وسیله روش‌های عددی نیاز است تا یک مدل کوچکتر از وسیله پرنده ساخته شده و در تونل باد مورد آزمایش قرار گیرد. استفاده از تجهیزات پیچیده اندازه‌گیری جریان و ابزارهای تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از آنها، در تونل‌های باد، امکان مطالعه جریان در لایه مرزی و خارج از آن را میسر کرده است و به کمک آنها می‌توان بسیاری از خصوصیات پرنده را شناسایی کرد [۱۳]. به عنوان نمونه در مرجع [۱۴]، مشخصه‌های کنترل و پایداری هواپیمای مقیاس کوچک توسط آزمایشات تونل باد تعیین شده است. مشخصه‌های حرکت هواپیما اندازه‌گیری شده و تکنیک‌های تخمین پارامترها جهت استخراج مدل ریاضی دینامیک پرواز هواپیما به کار رفته‌اند.

در مرجع [۱۵]، از داده‌های تست تونل باد، جهت توسعه یک مدل ساده و بهبود یافته برای هواپیما استفاده شده است.

در مرجع [۱۶]، پارامترهای پرواز در جهات جانبی یک هواپیمای سبک به کمک داده‌های تست تونل باد تخمین زده شده و از طریق مقایسه با پاسخ‌های شبیه‌سازی، اعتبار سنجی شده است. در این مقاله، ابتدا به بیان معادلات دیفرانسیل حاکم بر دینامیک پرواز وسایل پرنده درون‌جوی پرداخته شده است. سپس با استفاده از ضرایب پایداری هواپیمای F-16 که از روی تست مدل کوچکتر آن در تونل باد بدست آمده است (بر اساس آزمایشات انجام شده در سازمان فضایی ناسا [۱۷]) به ارائه روشی برای حل عددی معادلات ناپایا و غیرخطی حاکم بدون خطی‌سازی در نرم افزار متلب پرداخته شده است. نتایج حاصل از حل معادلات برای حالت گذرا و به فرم نمودارهای تغییر ارتفاع، زاویه حمله، عدد ماخ، زاویه سرش جانبی و مسیر پرواز بر حسب زمان برای دو حالت پرواز عادی و پرواز با تغییر زاویه سکان بالادهنده ارائه و مقایسه شده است. همچنین با روش ارائه شده در این مقاله، نحوه کنترل پرواز و قابلیت مانورپذیری هواپیما قابل بررسی و مشاهده است.

۲ معادلات حرکت و نیروهای وارد بر هواپیما

۱.۲ دستگاه‌های مختصات

برای بیان معادلات حرکت هواپیما از سه دستگاه مختصات مختلف شامل دستگاه مختصات زمین، دستگاه مختصات بدنه هواپیما و دستگاه مختصات باد استفاده می‌شود که اطلاعات تکمیلی در مورد ماهیت و جهت مختصات قراردادی هر کدام از این دستگاه‌ها در مراجع [۱۸، ۱۹] است. در شکل ۱، جهت‌دهی دستگاه مختصات بدنه نسبت به زمین نشان داده شده است.

۱.۴.۲ نیروها و گشتاورهای ناشی از پیشرانش هواپیما

در هواپیما نیروی پیشرانش در راستای بدنه قرار ندارد بلکه برای صرفه جویی در مصرف سوخت این نیرو در راستای مسیر پروازی وارد میشود، مولفه‌های نیرو و گشتاور پیشرانش به ترتیب در فرمول‌های ۵ و ۶ آورده شده است [۱، ۲۰].

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}_b^{Thrust} = T \begin{Bmatrix} \cos(\alpha)_{T_0} \\ \circ \\ \sin(\alpha)_{T_0} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_b^{Thrust} = T \begin{Bmatrix} \circ \\ z_T \cos(\alpha)_{T_0} + x_T \sin(\alpha)_{T_0} \\ \circ \end{Bmatrix} \quad (6)$$

نیروی پیشرانش، α_T زاویه خط اثر نیروی پیشرانش با محور X دستگاه مختصات بدنه، X_T و Z_T مولفه‌های بازوی گشتاور نقطه اثر نیرو تراست است.

۲.۴.۲ نیروها و گشتاورهای ناشی از وزن هواپیما

چون مبدا دستگاه مختصات بدنه در محل مرکز جرم آن واقع شده است، لذا وزن هواپیما در این دستگاه تنها مولفه نیرویی داشته و گشتاوری اعمال نمی‌کند. با معلوم بودن وضعیت دستگاه مختصات بدنه در دستگاه مختصات اینرسی، می‌توان نیروی وزن هواپیما را که در دستگاه مختصات اینرسی بردار (W, \circ, \circ) است، در دستگاه مختصات بدنه به صورت فرمول ۷ بیان کرد.

$$\begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{Bmatrix}_b = T \begin{Bmatrix} -\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

۳.۴.۲ نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی

به دلیل حرکت هواپیما درون سیال هوا، نیروهای فشاری و مماسی از طرف هوا بر سطح هواپیما وارد می‌شود. این نیروها و گشتاورها بر اساس ویژگی‌های جریان هوا (مانند چگالی، سرعت، عدد ماخ)، زاویه برخورد آن با هواپیما (α, β) ، عدد رینولدز؛ به صورت ضرایبی برای هواپیما بیان می‌شوند. گشتاورهای آیرودینامیکی نیز حول نقطه مرکز جرم اندازه‌گیری می‌شوند. ضرایب نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی هواپیما، به دو دسته استاتیکی و دینامیکی تقسیم می‌شوند. ضرایب استاتیکی مربوط به حالتی اند که هواپیما نسبت به جریان هوا هیچگونه سرعت زاویه‌ای ندارد. در حالی که ضرایب دینامیکی، یا به اصطلاح مشتقات پایداری، در شرایطی اندازه‌گیری می‌شوند که هواپیما در جریان هوا، همراه با نرخ‌های زاویه‌ای است. به صورت کلی نیروهای آیرودینامیکی به صورت فرمول ۸ و گشتاورهای آیرودینامیکی در غالب فرمول ۹ بیان می‌شوند [۱، ۱۹].

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}_b^{Aerodynam} = -\frac{1}{4} \rho V^2 S_w \begin{Bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{Bmatrix} \quad (8)$$

که در آن، ρ چگالی جریان هوا، V سرعت جریان هوا، S_w مساحت بال هواپیما، C_X ضریب درگ هواپیما، C_Y ضریب نیروی جانبی هواپیما و C_Z ضریب لیفت هواپیما می‌باشد.

در نقطه مرجع فیکس شده است. با توجه به اینکه در ماتریس انتقال از دستگاه مختصات بدنه به دستگاه مختصات اینرسی، زوایای اولر وجود دارند، برای تعیین این ماتریس لازم است زوایای اولر نیز محاسبه شوند. با انتقال سرعت‌های زاویه‌ای هواپیما، از دستگاه مختصات بدنه به دستگاه مختصات اینرسی، نرخ‌های زوایای اولر حاصل می‌شوند. فرمول ۲ که در کنار معادله گشتاورها (فرمول ۳) تشکیل دستگاه معادلات ۶ مجهولی می‌دهند.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{z}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & A & C \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & B & D \\ -\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که در آن،

$$A = \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\varphi) - \cos(\phi)\sin(\varphi)$$

$$B = \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\phi)\cos(\varphi)$$

$$C = \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\phi)\sin(\varphi)$$

$$D = \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\phi)\cos(\varphi)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi}_f \\ \dot{\theta}_f \\ \dot{\varphi}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \frac{\sin(\phi)\sin(\theta)}{\cos(\theta)} & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ \circ & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \circ & \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & \circ & -I_{xz} \\ \circ & I_{yy} & -\sin(\phi) \\ -I_{zx} & \circ & I_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} M_x - (I_{zz} - I_{yy})qr + I_{xz}pq \\ M_y - (I_{xx} - I_{zz})pr + I_{xz}(p^2 - r^2) \\ M_x - (I_{yy} - I_{xx})pq - I_{xz}qr \end{Bmatrix} \quad (3)$$

۳.۲ زوایای α, β

نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی، که بر اساس راستای سرعت هواپیما تعریف می‌شوند، در دستگاه مختصات باد نوشته می‌شوند و در آن ساده‌ترین شکل ممکن را دارند. این کمیت‌ها در این دستگاه اندازه‌گیری و سپس به دستگاه مختصات بدنه منتقل می‌شوند. فرمول ۴ رابطه بین دستگاه مختصات بدنه و باد را مشخص می‌کند. α ، زاویه حمله و β ، زاویه سرش جانبی نام دارند.

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}_s = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & \circ \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}_w \quad (4)$$

۴.۲ نیروها و گشتاورهای وارد بر هواپیما

به طور کلی در پرواز درون جوی سه نوع نیرو و گشتاور بر پرنده وارد می‌شود، که عبارتند از نیرو و گشتاور خروجی از موتور، آیرودینامیکی و جاذبه زمین [۱].

$$C_m = C_m(\alpha, \delta_e) + C_{mq}(\alpha)\tilde{q} + C_z(X_{cgref} - X_{cg}) \quad (14)$$

$$C_n = C_n(\alpha, \delta_e) + C_{np}(\alpha)\tilde{q} - C_{nr}(\alpha)\tilde{r} + C_{n\delta_a}(\alpha, \beta)\delta_a + C_{n\delta_r}(\alpha, \beta)\delta_r - C_y(X_{cgref} - X_{cg})\left(\frac{\tilde{c}}{b}\right) \quad (15)$$

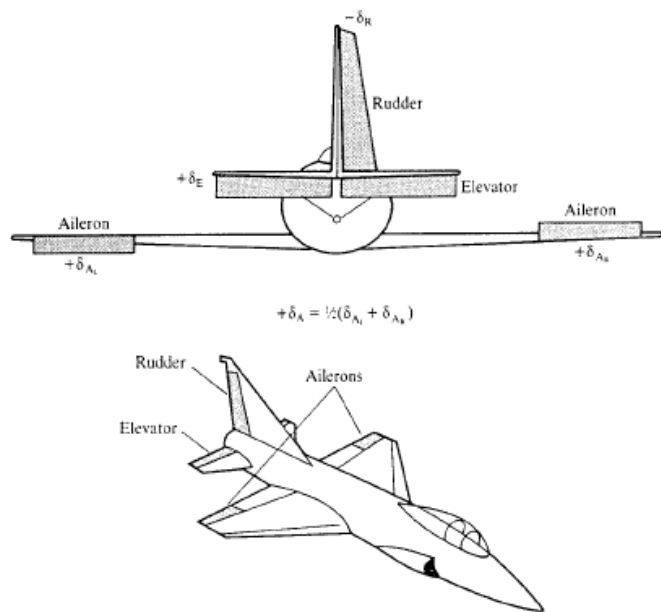
که در این فرمول‌ها،

$$\tilde{p} = \frac{pb}{2V} \quad \tilde{q} = \frac{qc}{2V} \quad \tilde{r} = \frac{rb}{2V}$$

مقادیر سایر پارامترها در ضماّم آورده شده است.

۴ سکان‌های هدایتی

در هواپیما سه سکان هدایتی با نام‌های سکان عقب، سکان بالا دهنده و شهپره‌های راست و چپ وجود دارد که در شکل ۴ مکان این سکان‌ها و جهت مثبت چرخش آنها مشاهده می‌شود. این سکان‌ها وظیفه پایدار کننده و هدایت هواپیما را به عهده دارند. تغییرات این باله‌ها و همچنین تغییرات زوایای حمله و سرش جانبی نیز دارای محدوده تغییراتی هستند که در جدول ۱ ذکر گردیده است.



شکل ۴: محل قرارگیری باله‌های هدایتی و نحوه چرخش آنها

$$\delta_a = \frac{1}{2}(\delta_{La} + \delta_{Ra})$$

جدول ۱: محدوده تغییرات متغیرهای هدایتی F-16

متغیر	حد پایین	حد بالا
α	-۰/۱۷۴۵ رادیان -۱۰ درجه	۰/۷۸۵۴ رادیان ۴۵ درجه
β	-۰/۵۲۳۶ رادیان -۳۰ درجه	۰/۵۲۳۶ رادیان ۳۰ درجه
δ_e	-۰/۴۳۶۳ رادیان -۲۵ درجه	۰/۴۳۶۳ رادیان ۲۵ درجه
δ_a	-۰/۳۷۵۲ رادیان -۲۱/۵ درجه	۰/۳۷۵۲ رادیان ۲۱/۵ درجه
δ_r	-۰/۵۲۳۶ رادیان -۳۰ درجه	۰/۵۲۳۶ رادیان ۳۰ درجه

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_b^{Aerodynamia} = \frac{1}{4} \rho V^2 S_w \begin{Bmatrix} b_w C_l \\ \tilde{c}_w C_m \\ b_w C_n \end{Bmatrix} \quad (9)$$

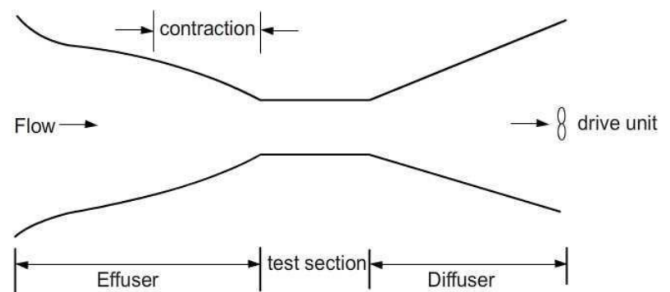
که در آن، b_w طول دهانه بال هواپیما، \tilde{c}_w وتر متوسط آیرودینامیکی بال، C_l ضریب گشتاور آیرودینامیکی هواپیما حول محور X دستگاه مختصات باد، C_m ضریب گشتاور آیرودینامیکی هواپیما حول محور Y دستگاه مختصات باد و C_n ضریب گشتاور آیرودینامیکی هواپیما حول محور Z دستگاه مختصات باد است.

۳ ضرایب آیرودینامیکی

ضرایب آیرودینامیکی یک هواپیما، از داده‌های آزمایش مدل کوچکتر آن در تونل باد بدست می‌آید.

تونل باد مادون صوت از نوع مدار باز برای مدل مقیاس ۱/۱۶ هواپیمای F-16 که با عدد ماخ نسبتاً کم (کمتر از ۰/۶) پرواز می‌کند و بدون دنده فرود و محموله خارجی بوده، استفاده شده است.

شماتیک تونل باد مذکور در شکل ۳ نشان داده شده است. ابعاد مقطع آزمون به صورت $۲/۹۸ \times ۱ \times ۱/۸۳$ متر بوده (به ترتیب طول، عرض و ارتفاع) و فن از نوع سرعت متغیر با قابلیت تغییر سرعت بین ۰ تا ۶۰ متر بر ثانیه بوده و طول کلی مدار ۱۶/۲ متر است.



شکل ۳: شماتیک تونل باد مادون صوت

در تونل باد رابطه بین این ضرایب با زوایای جریان باد (α, β) سرعت‌های زاویه‌ای هواپیما (p, q, r) و باله‌های کنترلی $(\delta_r, \delta_a, \delta_e)$ مشخص می‌شود. داده‌های حاصل از تونل باد برای مدل مقیاس ۱/۱۶ هواپیمای F-16 که در سازمان فضایی ناسا [۱۷، ۱۸] انجام شده است، به صورت فرمول‌های ۱۰-۱۵ است.

$$C_x = C_x(\alpha, \delta_e) + C_{xq}(\alpha)\tilde{q} \quad (10)$$

$$C_y = C_y(\beta, \delta_a, \delta_r) + C_{yp}(\alpha)\tilde{p} + C_{yr}(\alpha) \quad (11)$$

$$C_z = C_z(\alpha, \beta, \delta_e) + C_{zq}(\alpha)\tilde{q} \quad (12)$$

$$C_l = C_l(\alpha, \beta) + C_{lp}(\alpha)\tilde{p} + C_{lr}(\alpha)\tilde{r} + C_{l\delta_a}(\alpha, \beta)\delta_a + C_{l\delta_r}(\alpha, \beta)\delta_r \quad (13)$$

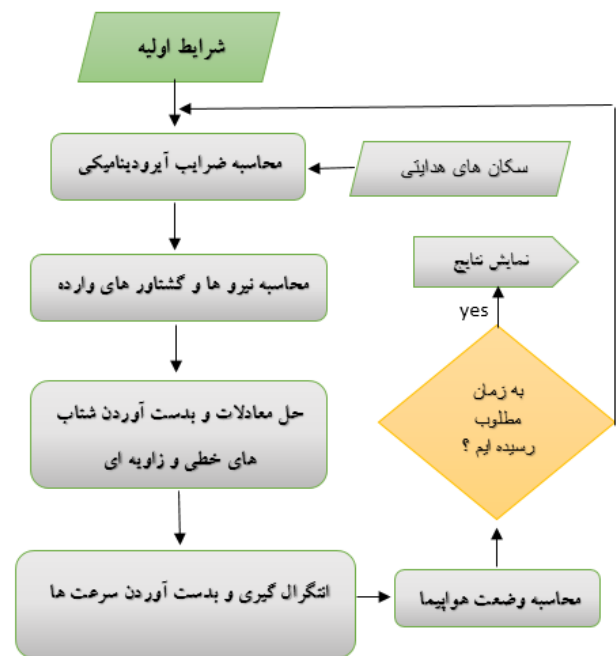
۵ شرایط تشابه نیروها در هواپیما و مدل آن

برای بررسی نیروهای وارد بر یک وسیله به کمک مدل آن، باید ضریب تشابه همه پارامترها موجود باشد. با استفاده از آنالیز ابعادی، می‌توان مقادیر این ضرایب را به دست آورد. این ضرایب در جدول ۵ ضماّم ذکر شده است [۱۳].

۶ حل معادلات با استفاده از متلب

برای تحلیل وضعیت هواپیما در زمان‌های مختلف باید معادلات مذکور در بخش‌های قبل را بطور همزمان حل نمود. برای حل این معادلات، شرایطی را به عنوان شرایط ورودی هواپیما در نظر گرفته، سپس با تقسیم زمان به بازه‌های زمانی کوچک برای هر بازه زمانی، معادلات حل می‌شود. وضعیت جدید هواپیما پس از هر بار محاسبه، به عنوان شرایط اولیه بازه زمانی بعدی در نظر گرفته می‌شود. شکل ۵ روند ساده شده برنامه را به صورت فلوچارت نشان می‌دهد.

با پیاده سازی این فرایند حل مساله در نرم افزار متلب و استفاده از روش انتگرال‌گیری رانگ کوتا می‌توان به بررسی تأثیر تغییر سکان‌های هدایتی، بر وضعیت هواپیما پرداخت. وضعیت سکان‌های هدایتی می‌تواند در فایلی جدا به صورت تابعی بر حسب زمان به برنامه داده شود. در نهایت می‌توان با اجرای برنامه، یک بار بدون تغییر سکان‌های هدایتی و بار دیگر با تغییر وضعیت سکان، تأثیر آن را مشاهده کرد.



شکل ۵: نمودار ساده شده روش حل

۱.۶ انتگرال‌گیری عددی به روش رانگ کوتا

در روش رانگ کوتا به عنوان مثال برای به دست آوردن مقدار u ، ابتدا u با استفاده از فرمول ۱۶ محاسبه می‌شود، سپس دوباره محاسبات را براساس

u_1 انجام می‌گیرد و شتاب جدید به دست می‌آید و با استفاده از فرمول ۱۷ با همین روش مقادیر u_2 و نیز u_4 محاسبه می‌گردد. در نهایت با استفاده از فرمول ۱۸ مقدار دقیق سرعت به دست می‌آید و محاسبات یک مرحله از شبیه سازی پایان می‌گیرد. به عبارت دیگر در هر مرحله ۴ بار معادلات حل می‌شوند. می‌توان همه اطلاعات لازم از مراحل حل را، در ماتریس‌هایی ذخیره کرد و پس از پایان محاسبات، با استفاده از آنها، نتایج را به صورت نمودار رسم نمود.

$$u_1 = u_0 + \frac{\Delta T \times u_1}{2} \quad (16)$$

$$u_2 = u_0 + \frac{\Delta T \times u_2}{2} \quad (17)$$

$$u = u_0 + \frac{\Delta T \times (u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4)}{6} \quad (18)$$

۷ نتایج و بحث

در این قسمت، پارامترهای پرواز هواپیما شامل ارتفاع، زاویه حمله، عدد ماخ، زاویه سرش جانبی و مسیر پرواز به صورت گذرا با استفاده از معادلات شش درجه آزادی دینامیک پرواز برای هواپیمای F-16 ارائه و به عبارتی پرواز هواپیما تحلیل شده است.

این تحلیل برای دو حالت انجام شده است. حالت اول که در آن هیچ کدام از باله‌ها تغییر زاویه ندارد و به منظور بررسی دینامیک پرواز هواپیما انجام شده است و حالت دوم که در آن وضعیت سکان بالا دهنده در ثانیه ۵۰ ام شبیه‌سازی، از صفر به ۱۰ درجه تغییر داده می‌شود که به منظور بررسی مانورپذیری هواپیما و قابلیت کنترل پرواز و تأثیر تغییر زاویه سکان‌ها بر مشخصه‌های پرواز هواپیما انجام شده است. به منظور مقایسه، نتایج هر دو حالت در یک نمودار نشان داده شده است که در آن خط چین مشکی مربوط به حالت عادی و نقطه چین قرمز مربوط به تغییر وضعیت سکان است. شرایط اولیه برای حل معادلات به صورت زیر است.

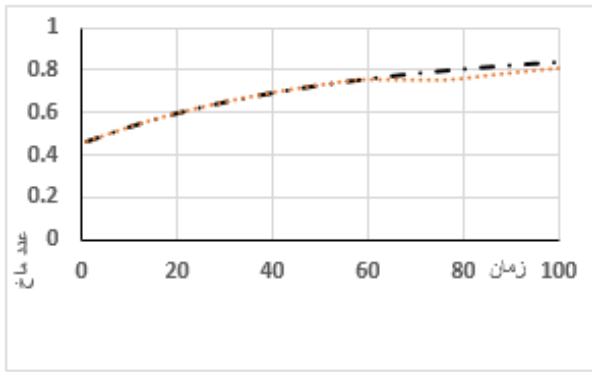
اشکال ۶ تا ۱۱ به ترتیب تغییرات ارتفاع، زاویه حمله، عدد ماخ، زاویه سرش جانبی، مسیر پرواز و وضعیت سکان بالادهنده را بر حسب زمان نشان می‌دهد.

همانطور که از شکل ۷ برمی‌آید، با تغییر ۱۰ درجه‌ای سکان بالادهنده، از ثانیه ۵۰ تا ۸۰، ارتفاع هواپیما حدود ۸۰ متر افزایش می‌یابد که می‌تواند ناشی از افزایش لیفت در اثر تغییر زاویه سکان باشد.

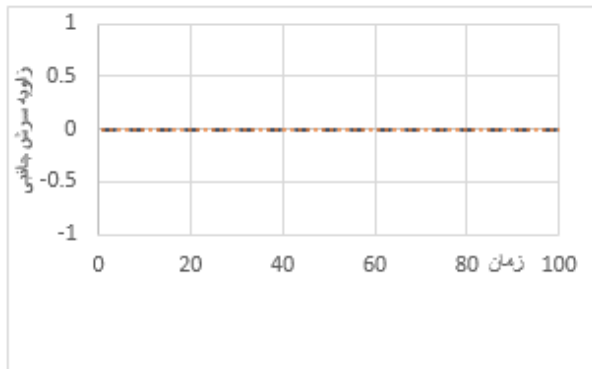
از شکل ۶ مشخص است که تغییر زاویه سکان بالادهنده، تأثیر چندانی بر زاویه حمله نداشته و تنها موجب کاهش حدود ۱٪ در ثانیه ۵۰ تا ۸۰ می‌شود، که بیانگر این است که تغییر زاویه سکان بالادهنده تا ۱۰ درجه، تأثیر چندانی بر تغییر زاویه بال نسبت به جهت حرکت هوا ندارد.

از شکل ۸، مشاهده می‌شود که عدد ماخ با تغییر ۱۰ درجه‌ای سکان بالادهنده حدود ۲٪ کاهش می‌یابد که ناشی از کاهش سرعت هواپیما در اثر افزایش زاویه سکان بالادهنده است.

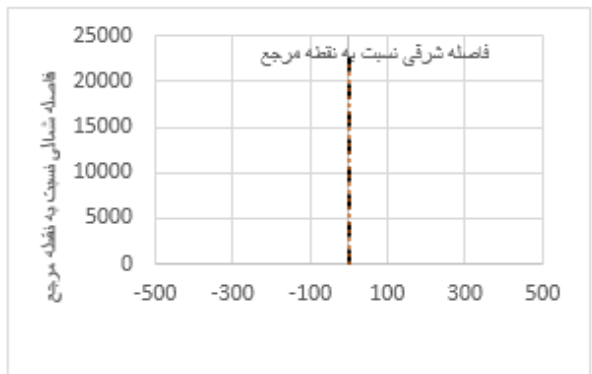
از مشاهده اشکال ۹ و ۱۰ نتیجه می‌شود که تغییر زاویه سکان بالادهنده به



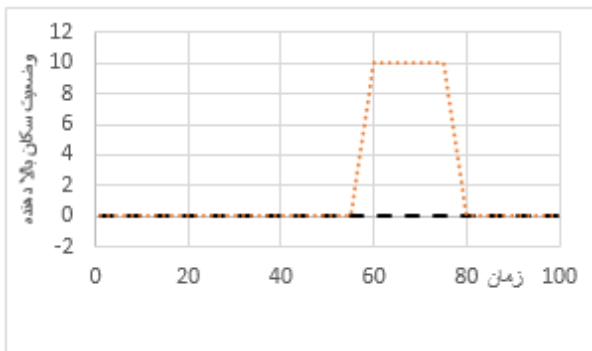
شکل ۸: تغییرات عدد ماخ بر حسب زمان (خط چین مشکی مربوط به حالت عادی و نقطه چین قرمز مربوط به تغییر وضعیت سکان است)



شکل ۹: تغییرات زاویه سرش جانبی بر حسب زمان (خط چین مشکی مربوط به حالت عادی و نقطه چین قرمز مربوط به تغییر وضعیت سکان است)



شکل ۱۰: نمودار مسیر پرواز (خط چین مشکی مربوط به حالت عادی و نقطه چین قرمز مربوط به تغییر وضعیت سکان است)



شکل ۱۱: نمودار وضعیت سکان بالادهنده نسبت به زمان (خط چین مشکی مربوط به حالت عادی و نقطه چین قرمز مربوط به تغییر وضعیت سکان است)

میزان ۱۰ درجه، هیچ تأثیری بر زاویه سرش جانبی و مسیر پرواز هواپیما ندارد. شکل ۱۱ نیز بیانگر تغییر ۱۰ درجه‌ای زاویه سکان بالادهنده در ثانیه‌های ۵۰ تا ۸۰ است.

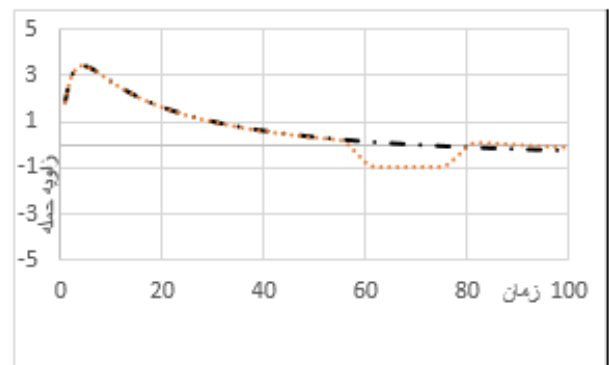
همانطور که مشاهده شد تغییر زاویه سکان بالادهنده به میزان ۱۰ درجه، تأثیر بسزایی بر برخی مشخصه‌های پرواز از جمله ارتفاع، عدد ماخ و زاویه حمله داشته و بر مسیر پرواز و زاویه سرش جانبی تأثیر چندانی ندارد. این امر می‌تواند با افزایش زاویه سکان بالادهنده و با تغییر زاویه سکانهای دیگر و یا تغییر زاویه حمله، تغییرات متفاوتی داشته و مشخصه‌های پرواز را به نوعی متفاوت تغییر دهد که این مسئله در کنترل پرواز هواپیما، مطالعات پایداری و مانورپذیری هواپیما بسیار حائز اهمیت است، لذا روش ارائه شده در این مقاله، علاوه بر حل معادلات غیر خطی دینامیک پرواز شش درجه آزادی جهت تحلیل پرواز، می‌تواند برای بررسی قابلیت مانورپذیری هواپیما و کنترل پرواز از طریق تغییر زوایای سکان‌ها و زاویه حمله و مشاهده تأثیر آن بر پارامترهای پرواز، به کار رود.

شرایط اولیه:

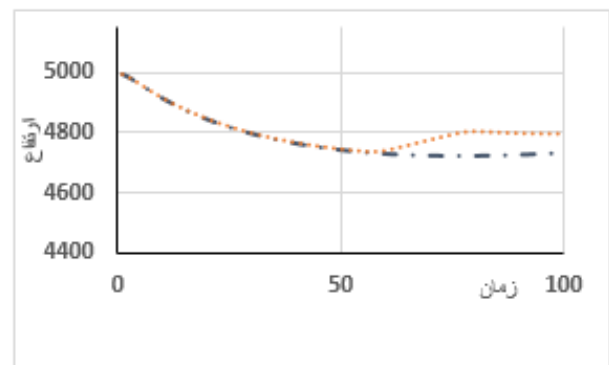
$$\alpha = 0, \beta = 0, \text{speed} = 147 \text{ms}^{-1}, \text{thrust} = 20000$$

$$\text{time} = 100, \Delta T = 0.001, \alpha_T = -2/3$$

$$\theta = -0.1, \phi = 0, \varphi = 0, Z_0 = 5000 \text{m}$$



شکل ۶: تغییرات زاویه حمله بر حسب زمان (خط چین مشکی مربوط به حالت عادی و نقطه چین قرمز مربوط به تغییر وضعیت سکان است)



شکل ۷: تغییرات ارتفاع پرنده نسبت به زمان (خط چین مشکی مربوط به حالت عادی و نقطه چین قرمز مربوط به تغییر وضعیت سکان است)

۸ نتیجه‌گیری

امکان‌سنجی پرواز یک وسیله پرنده قبل از ساخت آن می‌تواند کمک بزرگی به طراحان وسیله پرنده انجام دهد تا بدون صرف هزینه‌های گزاف ساخت، تنها با ساخت مدل کوچک آن و انجام آزمایش‌های تونل باد و سپس استفاده از نتایج این آزمایش‌ها با مدل کردن پرنده در نرم افزار، به بررسی نواقص و کاستی‌های وسیله پرنده خود بپردازند. در این مقاله، با استفاده از داده‌های تست تونل باد هواپیمای F-16 و معادلات دینامیک پرواز حاکم بر آن، به روشی نوین برای حل معادلات به صورت عددی و بدون فرضیات ساده کننده و خطی سازی، پرداخته شد. نتایج تحلیل پرواز هواپیما به صورت نمودارهای ارتفاع، زاویه حمله، عدد ماخ، زاویه سرش جانبی و مسیر پرواز بر حسب زمان پرواز برای دو مورد پایه و تغییر ۱۰ درجه‌ای سکان بالادهنده ارائه و تغییرات نسبت به مورد پایه گزارش شد. نشان داده شد تغییر زاویه سکان بالادهنده بر ارتفاع پرواز، عدد ماخ و زاویه حمله تأثیر بسزایی داشته در حالی که بر مسیر پرواز و زاویه سرش جانبی تأثیر چندانی ندارد. روش ارائه شده در این مقاله، می‌تواند جهت مطالعات پایداری، کنترل پرواز و قابلیت مانورپذیری هواپیما به کار رود. با روش ارائه شده برای ادامه و در کارهای بعدی می‌توان وضعیت هواپیما را در زوایای مختلف سکان بالادهنده، بررسی و تحلیل نمود و یا وضعیت پرواز هواپیما را نسبت به تغییر زاویه سکان‌های دیگر یا تغییر زاویه حمله بررسی نمود.

مراجع

- [10] Shi, Rongqi and Wan, Weiyu. Analysis of flight dynamics for large-scale morphing aircraft. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal*, 87(1):38-44, 2015.
- [11] Ibrahim, IH, Ng, EYK, and Wong, K. Flight maneuverability characteristics of the f-16 cfd and correlation with its intake total pressure recovery and distortion. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 5(2):223-234, 2011.
- [12] Muliadi, Jemie. The analysis of unconventional aircraft flight dynamics model by linearizing its equation of motion as applied in bppt's v-tail configuration uav "gagak". in *AIP Conference Proceedings*, vol. 1746, p. 020060. AIP Publishing, 2016.
- [13] Wolowicz, Chester H, Brown Jr, JS, and Gilbert, William P. Similitude requirements and scaling relationships as applied to model testing. 1979.
- [14] Carnduff, SD, Erbsloeh, SD, Cooke, AK, and Cook, MV. Characterizing stability and control of subscale aircraft from wind-tunnel dynamic motion. *Journal of Aircraft*, 46(1):137-147, 2009.
- [15] Randle, William E, Hall, Cesare A, and Vera-Morales, Maria. Improved range equation based on aircraft flight data. *Journal of Aircraft*, 48(4):1291-1298, 2011.
- [16] Lee, Junghoon and Yoon, Sugjoon. Estimation and validation of lateral-directional stability/control derivatives for the flight training device of a light aircraft. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 16(1):1-14, 2008.
- [17] Morelli, Eugene A. Global nonlinear parametric modelling with application to f-16 aerodynamics. in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 2, pp. 997-1001. IEEE, 1998.
- [18] Huo, Ying. Model of f-16 fighter aircraft. *University of Southern California*, 2007.
- [19] Phillips, WF. *Mechanics of flight*, john wiley & sons. Inc, New Jersey, 2010.
- [20] Miele, Angelo. *Theory of Flight Paths*. Addison-Wesley, 1962.
- [1] Allerton, David. *Principles of flight simulation*. John Wiley & Sons, 2009.
- [2] Hopkin, HR. *A scheme of notation and nomenclature for aircraft dynamics and associated aerodynamics*. HM Stationery Office, 1970.
- [3] Hancock, Gregory J. *An introduction to the flight dynamics of rigid aeroplanes*. Ellis Horwood, 1995.
- [4] Tian, Xian Ke, Tang, Shuo, and Zhu, Qiang Jun. Flight dynamics modeling and analysis of flexible hypersonic flight vehicles. in *Applied Mechanics and Materials*, vol. 275, pp. 513-517. Trans Tech Publ, 2013.
- [5] Montalvo, Carlos and Costello, Mark. Meta aircraft flight dynamics. *Journal of Aircraft*, 52(1):107-115, 2014.
- [6] Johansson, Lars. A flight dynamics course based on matlab computer assignments. *Aircraft Design*, 3(4):249-260, 2000.
- [7] Greenwell, Douglas. A review of unsteady aerodynamic modelling for flight dynamics of manoeuvrable aircraft. in *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*, p. 5276, 2004.
- [8] Costes, Philippe. A theory of the flight of a flexible aircraft in turbulence-roll dynamics. in *Atmospheric Flight Mechanics Conference*, p. 3977.
- [9] Mohammed, Tariq O, Elkhmri, Naser M, and AboBakr, Hamza. Analysis and simulation of uav aircraft flight dynamics. in *Advanced Materials Research*, vol. 915, pp. 7-11. Trans Tech Publ, 2014.

جدول ۲: روابط مشتقات پایداری نسبت به وضعت باله‌ها و زاویه حمله

$C_x(\alpha, \delta_e)$	$a_0 + a_1\alpha + a_2\delta^{\gamma} + a_3\delta_e + a_4\alpha\delta_e + a_5\alpha^{\gamma} + a_6\alpha^{\gamma}$
$C_{x_q}(\alpha)$	$b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^{\gamma} + b_3\alpha^{\gamma} + b_4\alpha^{\gamma}$
$C_y(\beta, \delta_a, \delta_r)$	$c_0\beta + c_1\delta_a + c_2\delta_r$
$C_{y_p}(\alpha)$	$d_0 + d_1\alpha + d_2\alpha^{\gamma} + d_3\alpha^{\gamma}$
$C_{Y_r}(\alpha)$	$e_0 + e_1\alpha + e_2\alpha^{\gamma} + e_3\alpha^{\gamma}$
$C_z(\alpha, \beta, \delta_e)$	$(f_0 + f_1\alpha + f_2\alpha^{\gamma} + f_3\alpha^{\gamma} + f_4\alpha^{\gamma})(1 - \beta^{\gamma}) + f_5\delta_e$
$C_{z_q}(\alpha)$	$g_0 + g_1\alpha + g_2\alpha^{\gamma} + g_3\alpha^{\gamma} + g_4\alpha^{\gamma}$
$C_l(\alpha, \beta)$	$h_0 + h_1\alpha\beta + h_2\alpha^{\gamma}\beta + h_3\beta^{\gamma} + h_4\alpha\beta^{\gamma} + h_5\alpha^{\gamma}\beta + h_6\alpha^{\gamma}\beta + h_7\alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$
$C_{l_p}(\alpha)$	$i_0 + i_1\alpha + i_2\alpha^{\gamma} + i_3\alpha^{\gamma}$
$C_{l_r}(\alpha)$	$j_0 + j_1\alpha + j_2\alpha^{\gamma} + j_3\alpha^{\gamma} + j_4\alpha^{\gamma}$
$C_{l_{\delta_r}}(\alpha, \beta)$	$k_0, k_1\alpha + k_2\beta + k_3\alpha^{\gamma} + k_4\alpha\beta + k_5\alpha^{\gamma}\beta + k_6\alpha^{\gamma}$
$C_{l_{\delta_r}}(\alpha, \beta)\delta_r$	$l_0 + l_1\alpha + l_2\beta + l_3\alpha\beta + l_4\alpha^{\gamma}\beta + l_5\alpha^{\gamma}\beta + l_6\beta^{\gamma}$
$C_m(\alpha, \delta_e)$	$m_0 + m_1\alpha + m_2\delta_e + m_3\alpha\delta_e + m_4\delta_e^{\gamma} + m_5\alpha^{\gamma}\delta_e + m_6\delta_e^{\gamma} + m_7\alpha\delta_e^{\gamma}$
$C_{m_q}(\alpha)$	$n_0 + n_1\alpha + n_2\alpha^{\gamma} + n_3\alpha^{\gamma} + n_4\alpha^{\gamma} + n_5\alpha^{\gamma}$
$C_n(\alpha, \beta)$	$o_0\beta + o_1\alpha\beta + o_2\beta^{\gamma} + o_3\alpha\beta^{\gamma} + o_4\alpha^{\gamma}\beta + o_5\alpha^{\gamma}\beta^{\gamma} + o_6\alpha^{\gamma}\beta$
$C_{n_p}(\alpha)$	$p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^{\gamma} + p_3\alpha^{\gamma} + p_4\alpha^{\gamma}$
$C_{n_r}(\alpha)$	$q_0 + q_1\alpha + q_2\alpha^{\gamma}$
$C_{n_{\delta_a}}(\alpha, \beta)$	$r_0 + r_1\alpha + r_2\beta + r_3\alpha\beta + r_4\alpha^{\gamma}\beta + r_5\alpha^{\gamma}\beta + r_6\alpha^{\gamma} + r_7\alpha^{\gamma} + r_8\beta^{\gamma} + r_9\alpha\beta^{\gamma}$
$C_{n_{\delta_r}}(\alpha, \beta)$	$s_0 + s_1\alpha + s_2\beta + s_3\alpha\beta + s_4\alpha^{\gamma}\beta + s_5\alpha^{\gamma}$

جدول ۳: مقادیر ثابت‌های جدول ۲

$a_0 = -0.01943367$	$a_1 = 0.2136104$	$a_2 = -0.2903457$	$a_3 = -0.03348641$
$a_4 = -0.2060504$	$a_5 = 0.6988016$	$a_6 = -0.9035381$	
$b_0 = 0.4833383$	$b_1 = 1.6444627$	$b_2 = 11.31098$	$b_3 = -74.22961$
$b_4 = 6.075776$			
$c_0 = -1.145916$	$c_1 = 0.06016057$	$c_2 = 0.1642479$	
$d_0 = -0.1006733$	$d_1 = 0.18679799$	$d_2 = 4.260586$	$d_3 = -6.923267$
$e_0 = 0.18071648$	$e_1 = 0.1189633$	$e_2 = 4.177702$	$e_3 = -9.162236$
$f_0 = -0.13781278$	$f_1 = -4.211369$	$f_2 = 4.775187$	$f_3 = -10.26225$
$f_4 = 1.399973$	$f_5 = 0.4354$		
$g_0 = -3.054906$	$g_1 = -41.32305$	$g_2 = 329.2788$	$g_3 = -684.8038$
$g_4 = 408.0244$			
$h_0 = -0.1058583$	$h_1 = -0.05766677$	$h_2 = 0.1672435$	$h_3 = 0.1357256$
$h_4 = 0.2172952$	$h_5 = 3.464156$	$h_6 = -2.1835451$	$h_7 = -1.098104$
$i_0 = -0.4126806$	$i_1 = -0.1189974$	$i_2 = 1.247721$	$i_3 = -0.7391132$
$j_0 = 0.06250437$	$j_1 = 0.0667723$	$j_2 = -1.101964$	$j_3 = 9.100087$
$j_4 = -11.92672$			
$k_0 = -0.1463144$	$k_1 = -0.04073901$	$k_2 = 0.03253159$	$k_3 = 0.4851209$
$k_4 = 0.2978850$	$k_5 = -0.3746393$	$k_6 = -0.3213068$	
$l_0 = 0.02635729$	$l_1 = -0.02192910$	$l_2 = -0.0031529$	$l_3 = -0.0581878$
$l_4 = 0.4516159$	$l_5 = -0.4928702$	$l_6 = -0.1579864$	
$m_0 = -0.02029370$	$m_1 = 0.04660702$	$m_2 = -0.06012308$	$m_3 = -0.08062977$
$m_4 = 0.08320429$	$m_5 = 0.0518538$	$m_6 = 0.6378864$	$m_7 = 0.4226356$
$n_0 = -0.159153$	$n_1 = -3.0554716$	$n_2 = -3.098636$	$n_3 = 224.7355$
$n_4 = -412.0991$	$n_5 = 241.1750$		
$o_0 = 0.2993363$	$o_1 = 0.06594004$	$o_2 = -0.2003125$	$o_3 = -0.06233977$
$o_4 = -2.107885$	$o_5 = 2.141420$	$o_6 = 0.1476901$	
$p_0 = 0.02677652$	$p_1 = -0.3298246$	$p_2 = 0.1926178$	$p_3 = 4.013325$
$p_4 = -4.404302$	$q_0 = -0.36981856$	$q_1 = -0.1167551$	$q_2 = -0.7641297$
$r_0 = -0.03348171$	$r_1 = 0.04276655$	$r_2 = 0.006573646$	$r_3 = 0.3565831$
$r_4 = -1.373308$	$r_5 = 1.237582$	$r_6 = 0.2302543$	$r_7 = -0.2512876$
$r_8 = 0.1588105$	$r_9 = -0.5199526$		
$s_0 = -0.08115894$	$s_1 = -0.01156580$	$s_2 = 0.02514167$	$s_3 = 0.2038748$
$s_4 = -0.3337476$	$s_5 = 0.100429$		

جدول ۴: مشخصات دینامیکی و هندسی F-16

مقدار	نماد	پارامتر
۹۲۹۵/۴۴	m	وزن (kg)
۹/۱۴۴	b	طول بال (m)
۲۷/۸۷	S	سطح مقطع بال (m^2)
۳/۴۵	C	وتر آیرودینامیکی (m)
۱۲۸۷۴/۸	I_x	ممان اینرسی رول ($kg\ m^2$)
۷۵۶۷۳/۳	I_y	ممان اینرسی پیچ ($kg\ m^2$)
۸۵۵۵۲/۱	I_z	ممان اینرسی یاء ($kg\ m^2$)
۱۳۳۱/۴	I_{xz}	ممان اینرسی ضربی ($kg\ m^2$)
۰	I_{xy}	ممان اینرسی ضربی ($kg\ m^2$)
۰	I_{yz}	ممان اینرسی ضربی ($kg\ m^2$)
۰/۳ C	X_{cg}	موقعیت مرکز جرم (m)
۰/۳۵ C	X_{cgr}	موقعیت مرکز جرم مرجع (m)

جدول ۵: فاکتورهای تشابه در مقیاس‌های فریود و ماخ [۱۳]

فاکتور تشابه		نسبت	پارامتر
براساس مقیاس فریود	براساس مقیاس ماخ		
n	n	l_m/l_A	اندازه (طول)
γ	γ	α'_m/α'_A	زاویه برخورد سیال هوا با هواپیما
γ	γ	δ_m/δ_A	موقعیت سطوح کنترل
$\left(\frac{g_A}{g_m}\right) \left(\frac{V_{sm}}{V_{sA}}\right)^\gamma \left(\frac{1}{n}\right)$	γ	$\left(\frac{V}{lg}\right)_m / \left(\frac{V}{lg}\right)_A$	عدد فریود
$\left(\frac{V_{sm}}{V_{sA}}\right)^\gamma \left(\frac{1}{n}\right)$	γ	g_m/g_A	میدان گرانش
$\left(\frac{V_{sm}}{V_{sA}}\right)$	$n^{\frac{1}{\gamma}}$	V_m/V_A	سرعت
γ	$n^{\frac{1}{\gamma}} / \left(\frac{V_{sm}}{V_{sA}}\right)$	M_m/M_A	عدد ماخ
$(\rho_f)_m / (\rho_f)_A$	$(\rho_f)_m / (\rho_f)_A$	$(\rho_f)_m / (\rho_f)_A$	چگالی جریان هوا
$\left(\frac{(\rho_f)_m}{(\rho_f)_A}\right) \left(\frac{V_{sm}}{V_{sA}}\right)^\gamma$	$\left(\frac{(\rho_f)_m}{(\rho_f)_A}\right)^\gamma$	Q_m/Q_A	فشار دینامیک
$\left(\frac{v_A}{v_m}\right) \left(\frac{V_{sm}}{V_{sA}}\right) n$	$\left(\frac{v_A}{v_m}\right) n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$	$(NRE)_m / (NRE)_A$	عدد رینولدز
γ	γ	$\left(\frac{\Omega l}{V}\right)_m / \left(\frac{\Omega l}{V}\right)_A$	کاهش سرعت ای زاویه
$\left(\frac{V_{sm}}{V_{sA}}\right) / n$	$n^{-\frac{1}{\gamma}}$	Ω_m / Ω_A	سرعت ای زاویه
γ	γ	$\left(\frac{tV}{l}\right)_m / \left(\frac{tV}{l}\right)_A$	کاهش زمان
$n / \left(\frac{V_{sm}}{V_{sA}}\right)$	$n^{-\frac{1}{\gamma}}$	t_m/t_A	زمان
γ	γ	φ'_m / φ'_A	جابجایی ای زاویه
$(V_{sm}) / (V_{sA})^\gamma / n^\gamma$	n^{-1}	$\dot{\Omega}_m / \dot{\Omega}_A$	شتاب ای زاویه
n	n	S_m / S_A	جابجایی خطی
$\left(\frac{V_{sm}}{V_{sA}}\right)^\gamma / n$	γ	a_m / a_A	شتاب خطی
γ	γ	$\left(\frac{\omega l}{V}\right)_m / \left(\frac{\omega l}{V}\right)_A$	عدد استروهل
$\left(\frac{V_{sm}}{V_{sA}}\right) / n$	$n^{-\frac{1}{\gamma}}$	ω_m / ω_A	فرکانس نوسان
γ	γ	$\left(\frac{m}{\rho_f l^\gamma}\right)_m / \left(\frac{m}{\rho_f l^\gamma}\right)_A$	چگالی نسبی
$\left(\frac{(\rho_f)_m}{(\rho_f)_A}\right) n^\gamma$	$\left(\frac{(\rho_f)_m}{(\rho_f)_A}\right) n^\gamma$	m_m / m_A	جرم
γ	γ	$\left(\frac{I}{\rho_f l^5}\right)_m / \left(\frac{I}{\rho_f l^5}\right)_A$	ممان اینرسی نسبی
$\left(\frac{(\rho_f)_m}{(\rho_f)_A}\right) n^5$	$\left(\frac{(\rho_f)_m}{(\rho_f)_A}\right) n^5$	I_m / I_A	ممان اینرسی جرمی
n	n	k_m / k_A	شعاع ژیراسیون