

## تحلیل تنش دیسک دوجانه در روتور توربین خنک شونده با هوای سرد

**چکیده:** استفاده از دیسک های دوجانه به جای دیسک های تک جانه در روتور توربین، ایده نوینی است که به سبب ایجاد فضای لازم، امکان خنک کاری روتور و در نتیجه کاهش سطح دما و تنش های ناشی از آن را فراهم می کند. دیسک تحت بارگذاری های مکانیکی و حرارتی قرار دارد. بارگذاری مکانیکی شامل اثر ناشی از دوران دیسک و بار گریز از مرکز ناشی از دوران پره ها است. بارگذاری حرارتی در اثر تغییرات حرارتی موجود بین سطوح داخلی و خارجی بر دیسک اعمال شده است. شرایط مرزی دیسک به صورت دوسرگیردار در نظر گرفته شده است. ابتدا با استفاده از روش حل تحلیلی تئوری الاستیسیته صفحه ای روابط حاکم بر یک دیسک دوار تک جانه در حالت تنش صفحه ای استخراج شده است. در ادامه دیسک مورد نظر با پروفیل ضخامت واقعی با استفاده از روش عددی تیموشنکو-گریمل مورد تحلیل قرار گرفته است. سپس به منظور رسیدن به یک دیسک دوجانه با پروفیل مناسب این دیسک با سوراخ های پله ای شکل در ۴۰۰ حالت هندسی مختلف مورد بررسی قرار گرفته و حالت دارای کمترین جرم ممکن و ضریب اطمینان قابل قبول به دست آمده است. نتایج حاصل از تحلیل نشان دهنده کاهش جرم، کاهش سطح تنش ها و بهبود ضریب اطمینان در اثر استفاده از یک دیسک دوجانه بهینه می باشد.

**واژه های راهنما:** توربین، روتور خنک شونده، دیسک دوجانه، بارهای مکانیکی و حرارتی، تحلیل تنش

بهروز شهریاری\*  
استادیار

سعید ترحمی

کارشناس ارشد،  
مجتمع دانشگاهی مکانیک،  
دانشگاه صنعتی مالک اشتر

مقاله علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۱۲

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۰۸

Behrooz  
Shahriari\*  
Assistant professor

Saeed Tarahomi  
MSc.,  
Faculty of  
Mechanics, Malek  
Ashtar University of  
Technology

## Stress analysis of twin web disk in cooled turbine rotor with cooling air

**Abstract:** Using twin web disks instead of single disks in turbine rotor is the new idea, which provides the necessary space for cooling and thus reducing the temperature level and the resulting stresses. The disk is subject to mechanical and thermal loading. Mechanical loading involves the effect of the disk rotation and the centrifugal load caused by the blade rotation at the external surface. Thermal loading is applied due to thermal changes between the internal and external surfaces on the disk. Disk boundary conditions are considered as dual-cantilever. Using the analytical solution method, the theory of elasticity of the plate is derived from the relations that govern the thickness of a rotating disk in a plane stress state. In the following, the disk was analysed under consideration the actual thickness profile using the Timoshenko-Grameel's numerical method. In order to reach a twin web disk with a proper profile, this disk is studied with stepped holes in 400 different geometrical modes, and the state with the lowest possible mass and acceptable reliability coefficient is obtained. The results of the analysis show the reduction of mass, reduction of stress levels and improvement of the coefficient of confidence through the use of an optimal twin web disk.

**Keywords:** Turbine, Cooled rotor, Twin Web Disk, Mechanical and thermal loads, Stress Analysis.

## ۱- مقدمه

چند نوع دیسک و یک نمونه بلیسک دوجانه پرداختند. آنها نشان دادند که طراحی دیسک دوجانه اجازه افزایش استحکام را می دهد و منجر به کاهش وزن نیز می شود [۹]. همچنین آنها در سال ۲۰۱۸ به روش ساخت، تحلیل و بررسی بازدهی طرح دیسک دوجانه پرداختند [۱۰]. برخی از روش های بهینه سازی برای بهبود عملکرد دیسک توربین توسط لانگ و همکاران در سال ۲۰۱۹ [۱۱] و همچنین جیرالدو-لانداو و پائولینو در سال ۲۰۲۱ پیشنهاد شده اند [۱۲]. ژپولی شن و همکاران در سال ۲۰۱۹ [۱۳] به بهینه سازی چند رشته ای دیسک دوجانه پرداختند. آنها نشان دادند که اگرچه دیسک دوجانه در مقایسه با دیسک تک جانه بهینه شده، مزیت کمی در کاهش وزن نشان می دهد، اما به عنوان دیسک توربین جدید پتانسیل خنک کنندگی متقارن تری دارد.

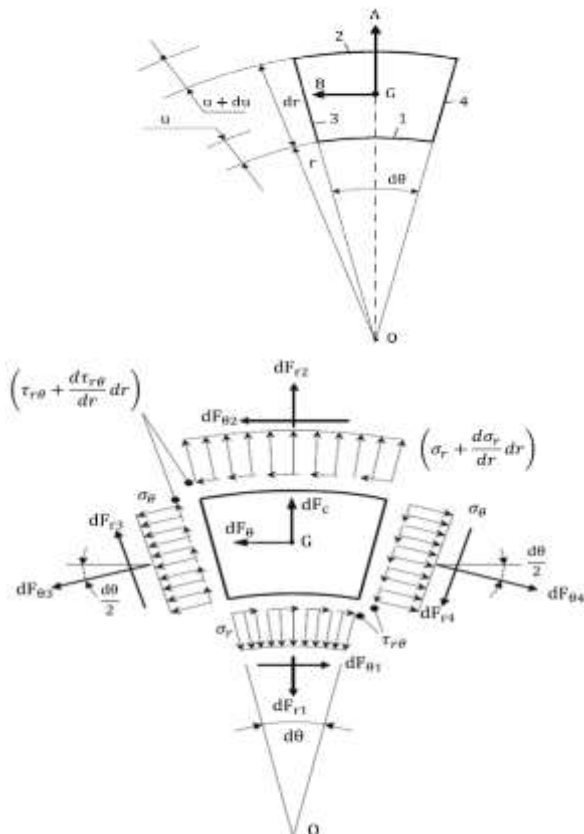
وانگ و همکاران در سال ۲۰۲۱ یک روش بهینه سازی توپولوژی را در استخراج شکل اولیه جدیدی از دیسک توربین دوجانه پیشنهاد کردند که در آن قید سرعت گسیختگی در نظر گرفته شد [۱۴]. همچنین آنها در تحقیقی دیگر در سال ۲۰۲۱، یک روش ترمو-الاستیک با قید تنش برای دیسک های متقارن محوری تحت محیط کار ترمومکانیکی شدید، پیشنهاد کردند [۱۵]. سونگ و همکاران در سال ۲۰۲۲ با ترکیب روش های بهینه سازی توپولوژی و شکل به صورت تئوری یک دیسک توربین دوجانه را توسعه دادند [۱۶].

با وجود کارهای انجام شده همچنان چالش هایی در مورد معماری توپولوژیکی بهینه دیسک توربین دوجانه تحت قیود چندگانه و محیط های ترمومکانیکی و نحوه طراحی دیسک های دوجانه برای کاربرد بیشتر آن ها در موتورهای هوایی با کارایی بالا وجود دارد. هدف اصلی این پژوهش، تحلیل تنش یک دیسک دوجانه به عنوان یک نوآوری در طراحی دیسک های خنک شونده با هوای سرد می باشد. دیسک دوجانه تحت بارهای مکانیکی و حرارتی قرار دارد. هندسه بهینه دیسک دوجانه شامل پروفیل خارجی دیسک و همچنین سوراخ داخلی که دیسک دوجانه را ایجاد می کند، استخراج می شود. تعمیم روابط تحلیل دیسک تک جانه به دوجانه و بهینه سازی پروفیل دیسک دوجانه جنبه نوآوری این تحقیق است. تحلیل و بهینه سازی دیسک های دوجانه در پژوهش های پیشین، مبتنی بر نرم افزارهای تجاری تحلیل سازه بوده که استفاده از آنها مستلزم استفاده از سیستم پردازش قوی و صرف زمان و در نهایت هزینه طراحی و تحلیل بیشتر است. رهیافت تحلیلی ارائه شده در این تحقیق مقرون به صرفه تر و به ویژه در مراحل طراحی و تحلیل اولیه دیسک که بسیار پر تکرار است کاربردی تر می باشد.

## ۲- معادلات حاکم بر دیسک در حالت ترموالاستیک

دیسک موجود در روتور توربین با سرعت دورانی بالا دوران می کند. این سرعت دورانی بالا منجر به ایجاد نیروی گریز از مرکز

برای طراحی هر سازه ای باید نسبت به پاسخگویی استحکام آن در شرایط مختلف بارگذاری آگاه شد لذا مسئله باید تحت تحلیل های مختلف سازه ای از جمله تحلیل تنش و کرنش در بارگذاری های مختلف قرار گیرد. دیسک در موتور توربینی دارای محدودیت هایی در پارامتر  $AN^2$  (مساحت سطح حلقوی توربین در مجذور سرعت دورانی) و ظرفیت بار است [۱]. همچنین یکی از مسائلی که همواره توسط طراحان موتور توربین گاز مورد توجه قرار می گیرد، رسیدن به مقادیر بالاتری از نسبت نیروی پیشران به وزن و رسیدن به راه کاری جهت کاهش تنش های حرارتی وارد بر دیسک است؛ رسیدن به سرعت های دورانی بالاتر روتور باعث بارگذاری بیشتر بر روی دیسک روتور و پره های روی آن می شود. علاوه بر آن سطح مقطع بیشتر جریان نیز نیاز به پره هایی با سطح بیشتر داشته که این مسئله نیز بارگذاری بر روی پره ها را بیشتر خواهد کرد. برآورده کردن این دو مسئله مستلزم افزایش ظرفیت بارگذاری سازه دیسک روتور است، که برای رسیدن به آن باید در طراحی سازه دیسک و پره ها و استحکام ماده سازنده بهینه سازی هایی صورت داد، تا ظرفیت بارگذاری آن ها افزایش یابد. علاوه بر موارد فوق، موارد دیگری نیز از جمله کاهش وزن، افزایش دوره عمر مجاز قطعات سازنده، قابلیت استفاده از مواد جایگزین برای قطعات به منظور استفاده در کاربردهای مختلف، از اهداف مهمی هستند که همواره برای ارتقاء سطح طرح های جدید مورد توجه طراحان قرار گیرند [۲]. ایده استفاده از دیسک دوجانه مناسب به جای دیسک های یک تکه مرسوم می تواند منجر به برآورده ساختن این اهداف گردد. کایرو و سارجنت در سال ۲۰۰۲ ابتدا یک دیسک با ساختار دوجانه پیشنهاد دادند و یک آزمون چرخش اعتبارسنجی ساختار با استفاده از یک دیسک دوجانه انجام دادند [۳]؛ نتایج تحلیل نشان داد که نمونه دیسک دوجانه نمایانگر ظرفیت چرخش بالاتر به واسطه افزایش پارامتر  $AN^2$  و وزن کمتر تحت شرایط استحکام یکسان است. لو و لی در سال ۲۰۱۱ به بهینه سازی دیسک دوجانه تحت بار سنگین در موتور هوایی پرداختند [۴]. یانگ ژیان در سال ۲۰۱۲ به آنالیز استحکام ساختار دیسک دوجانه پرداخت [۵]. شن و همکاران در سال ۲۰۱۴ تحقیقاتی در زمینه نسبت نیروی پیشران به وزن در دیسک دوجانه صورت دادند [۶]. دوگونچی و گنجی در سال ۲۰۱۵ به بررسی خنک کاری دیسک با استفاده از جریان سیال غیر نیوتنی پرداختند [۷]. شی و شن در سال ۲۰۱۵ یک روش بهینه سازی طرح چند رشته ای را برای دیسک توربین تک جانه ارائه کردند [۸]. بر اساس تحلیل کوپل حرارتی، CFD و ارزیابی مکانیکی، شکل دیسک تک جانه تحت چهار قید تنش با استفاده از روش بهینه سازی سطح پاسخ به دست آمد. واسیلیو و همکاران در سال ۲۰۱۸ با استفاده از مدل سازی پارامتری المان محدود به طراحی و تحلیل



بالا، ناشی از نیروی حجمی می گردد. دیسک تحت بارگذاری گریز از مرکز ناشی از دوران پره ها در محیط خارجی قرار دارد که در مدل سازی این اثر به صورت یک بار گسترده روی سطح خارجی آن لحاظ می شود. همچنین دیسک تحت گرادیان حرارتی ناشی از اختلاف حرارت در سطوح داخلی و خارجی قرار دارد. موضوع این تحقیق بررسی یک دیسک روتور موتور توربین گاز با ظرفیت تحمل بار بالا و دارا بودن مجرای جهت خنک کاری با جریان هوای سرد می باشد. برای این منظور به جای استفاده از دیسک های جامد توپر معمول از بررسی دیسک های دوجانه استفاده می شود. نمای برش خورده یک دیسک دوجانه در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱ نمای برش خورده دیسک دوجانه در توربین فشار بالا [۹]

شکل ۲ بارگذاری بر روی المانی از دیسک به طول  $dz$  [۱۷]

مطابق شکل ۲ بارگذاری وارد بر یک المان حجمی از دیسک به ضخامت  $dz$  در نظر گرفته می شود، که این المان بین سطوح ۵ و ۶ قرار گرفته و به دو صفحه قطری با مختصات  $\theta$  و  $\theta + d\theta$  که زاویه بین آن ها  $d\theta$  است و دو دایره به شعاع های  $r$  و  $r + dr$ ، محدود شده است. این المان دارای ابعاد محدود در راستای محور طولی  $Z$  است و دارای ابعاد بینهایت کوچک در امتداد دو محور دیگر است. تعادل نیروهای اعمالی بر روی المان در راستای خط  $OA$  عمود بر محور المان و گذرنده از مرکز ثقل  $G$  و در راستای خط  $GB$  که در  $G$  عمود بر  $OA$  است، در نظر گرفته می شود. المان مفروض در حالت کلی تحت تأثیر دو نیروی حجمی قرار دارد که در مرکز ثقل المان اعمال می شوند. یکی نیروی  $dF_c$  که در راستای شعاعی اعمال شده و ناشی از بارگذاری های شعاعی و چرخش المان بوده و طبق رابطه (۱) به دست آمده است و دیگری نیروی  $dF_t$  که در راستای محیطی و عمود بر راستای شعاعی بوده که به سبب وجود شتاب زاویه ای ایجاد می شود. با توجه به ثابت بودن سرعت زاویه ای، نیروی حجمی محیطی برابر با صفر بوده و از محاسبات کنار گذاشته شده است. معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت دیسک دوار جدار ضخیم همگن تحت بارگذاری ترمومکانیکی به فرم رابطه (۱) عبارت است از [۱۷]:

برای تحلیل تنش دیسک دوجانه، ابتدا معادلات حاکم بر دیسک تک جانه با ضخامت ثابت استخراج می شوند. فرضیاتی در تحلیل دیسک با ضخامت ثابت در نظر گرفته می شوند. مقدار ضخامت، در سرتاسر راستای طولی دیسک ثابت فرض شده است. گرادیان حرارتی مفروض وارد بر دیسک تنها تابعی از شعاع اما هر تابع دلخواهی می تواند در نظر گرفته شود. هندسه سازه، نحوه توزیع خواص و بارگذاری های اعمال شده بر دیسک همگی متقارن محوری است. چرخش دیسک با سرعت زاویه ای ثابت فرض شده است. شرایط مرزی حاکم بر دیسک به صورت دوسرگیردار در نظر گرفته شده است. دیسک در سطح خارجی تحت تنش شعاعی ناشی از دوران پره ها قرار داشته و در سطح داخلی هیچ گونه بارگذاری خارجی شعاعی به آن وارد نمی شود. گرادیان دمای دیسک با گذر از سطح داخل به خارج رو به افزایش است.

این دیسک دارای یک سوراخ محوری و سطح مقطع دایره ای شکل است. همچنین دیسک مورد بحث از لحاظ شرایط مرزی دارای طول دوسرگیردار و ضخامت شعاعی ثابت است. این دیسک از مواد همگن و ایزوتروپیک ساخته شده که در محدوده الاستیک خطی تحت تأثیر نیروهای سطحی، حجمی و گرادیان حرارتی قرار داشته و همگی این نیروها حول محور طولی  $Z$  که چرخش حول آن صورت می گیرد، به صورت متقارن محوری بر سازه اعمال می گردند. با توجه به شرایطی که گفته شد، برای اعمال شرایط تعادل ابتدا یک المان از دیسک مطابق با شکل ۲ در نظر گرفته شده است.

در این رابطه پارامترهای S1 تا S5 طبق رابطه (۷) عبارتند از:

$$S1 = \frac{\alpha(1+\nu)}{r^2} \int_a^r rT(r) dr$$

$$S2 = \frac{\rho r^2 \omega^2 (1-\nu^2)}{8E} \quad (7)$$

$$S3 = \frac{C_1}{2}, S4 = \frac{C_2}{r^2}, S5 = \frac{E}{(1-\nu^2)}$$

برای به دست آوردن ثابت های انتگرال گیری لازم است تا شرایط مرزی حاکم بر مسئله اعمال گردد. برای دیسک مورد بررسی در سطح خارجی، استوانه تحت بارگذاری های گسترده شعاعی ناشی از چرخش پره ها به صورت یکنواخت است و در سطح داخلی نیرویی در راستای شعاعی به سازه اعمال نمی گردد، با این حال برای اطمینان از رسیدن به جامع ترین حالت پاسخ، که پاسخگوی مسائل تحت تنش شعاعی غیر صفر در هر دو سطح داخلی و خارجی نیز باشد، برای به دست آوردن ثابت ها، شرایط مرزی موجود مطابق با رابطه (۸) اعمال خواهد شد:

$$\begin{aligned} @ r = a \rightarrow \sigma_r &= P_i \\ @ r = b \rightarrow \sigma_r &= P_o \end{aligned} \quad (8)$$

که در این رابطه،  $P_i$  و  $P_o$  به ترتیب برابر با مقادیر تنش شعاعی در سطوح داخلی و خارجی است و  $b$  برابر با مقدار شعاع در سطح خارجی است. پس از اعمال شرایط مرزی، ثابت های انتگرال گیری طبق رابطه (۹) محاسبه شده است:

$$C_1 = \frac{2 \left( P_i - S5 \left( \Phi a^2 + \frac{(P_i - P_o)b^2}{S5} - \Lambda b^2 + \Gamma \alpha (1+\nu)(\nu - \frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2}) \right) \right)}{\Psi S5} \quad (9)$$

$$C_2 = \frac{\frac{(P_i - P_o)}{S5} - \Phi(a^2 - b^2) + \frac{\Gamma \alpha}{b^2} (1+\nu)(\nu - 1)}{\Psi \left( \frac{b^2 - a^2}{b^2 a^2} \right)} \quad (10)$$

در این رابطه پارامترهای  $\Phi$ ،  $\Lambda$ ،  $\Gamma$  و  $\Psi$  طبق رابطه (۱۰) عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Psi &= 1 - \frac{\nu}{a} \\ \Phi &= \frac{\rho \omega^2 (1-\nu^2)(3+\nu)}{8E} \\ \Lambda &= \Phi(a^2 - b^2) \\ \Gamma &= \int_a^b rT(r) dr \end{aligned} \quad (10)$$

با جایگذاری ثابت های به دست آمده رابطه (۹) در رابطه (۶) تنش های وارد بر یک دیسک چرخان توخالی همگن در حالت دو سرگیردار قابل محاسبه است. همچنین با جایگذاری ثابت های C1 و C2 به دست آمده در رابطه (۴) جابجایی شعاعی به سادگی قابل محاسبه است.

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{rdr} - \frac{u}{r^2} - \alpha(1+\nu) \left( \frac{dT}{dr} \right) + \frac{(1-\nu^2)\rho r \omega^2}{E} = 0 \quad (1)$$

معادله (۱) که تحت عنوان معادله ناویر نیز شناخته می شود، در واقع یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی و غیر همگن بوده که حل آن به روش های مختلفی نظیر روش های عددی، تحلیلی و نیمه تحلیلی قابل انجام است. معادله دیفرانسیل (۱) به صورت رابطه (۲) قابل بازنویسی است:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{d}{rdr} (ru) \right] - \alpha(1+\nu) \left( \frac{dT}{dr} \right) + \frac{(1-\nu^2)\rho r \omega^2}{E} = 0 \quad (2)$$

با انتقال بخش غیر همگن معادله دیفرانسیل به طرف دیگر تساوی رابطه (۲) به صورت رابطه (۳) مرتب و بازنویسی شده است:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{d}{rdr} (ru) \right] = \alpha(1+\nu) \left( \frac{dT}{dr} \right) - \frac{(1-\nu^2)\rho r \omega^2}{E} \quad (3)$$

معادله فوق با فرض تابعی دلخواه برای توزیع دما برحسب شعاع  $T(r)$  به منظور اطمینان از رسیدن به کلی ترین حل ممکن برای این مسئله در نظر گرفته شده است، برای حل با دو بار انتگرال گیری پی درپی از رابطه (۳) جابجایی شعاعی مطابق با رابطه (۴) محاسبه می گردد:

$$u = \frac{(1-\nu^2)\rho r^3 \omega^2}{8E} + \frac{\alpha(\nu+1)}{r} \int_a^r rT(r) dr + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (4)$$

که در این رابطه  $a$  برابر با شعاع داخلی دیسک بوده و C1 و C2 ثابت های انتگرال گیری می باشند و با استفاده از شرایط مرزی حاکم بر مسئله به دست می آیند. با مشتق گیری از رابطه (۴)، رابطه (۵) به دست آمده است:

$$\frac{du}{dr} = \frac{3(1-\nu^2)\rho r^2 \omega^2}{8E} + \alpha(1+\nu)T(r) - \frac{\alpha(1+\nu)}{r^2} \int_a^r rT(r) dr + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \quad (5)$$

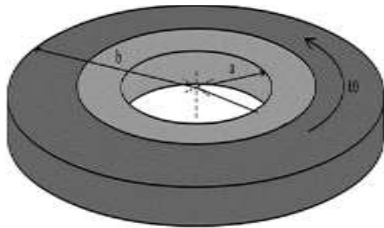
بدیهی است، ثابت های انتگرال گیری با مشخص بودن مقدار تنش شعاعی در سطوح داخلی و خارجی قابل محاسبه است تنش شعاعی حاکم بر دیسک به صورت رابطه (۶) و برحسب ثابت های انتگرال گیری به دست آمده است.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= S5 \left[ \begin{aligned} &S2(3+\nu) + S1(\nu-1) + S3 \left( 1 - \frac{\nu}{r} \right) + \\ &S4 \left( 1 - \frac{\nu}{r} \right) + (1+\nu)\alpha T(r) \end{aligned} \right] \quad (6) \\ \sigma_\theta &= S5 \left[ \begin{aligned} &S2(1+3\nu) + S1(1-\nu) + S3(1+\nu) \\ &S4(1-\nu) - (1+\nu)\alpha T(r) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

جابجایی های استوانه مدنظر در حالت تحت گرادیان حرارتی خاص قابل محاسبه است.

### ۳- نیروهای گریز از مرکز ناشی از دوران پره ها و قلاب نگه دارنده

برای محاسبه جرم دیسک مورد بررسی که هندسه در (شکل ۳) نشان داده شده است، از رابطه (۱۶) استفاده می گردد.



شکل ۳ نمای سه بعدی دیسک

$$m = \rho \times V \rightarrow \rho \times h(r) \times \pi \times (b^2 - a^2) \quad (16)$$

$$\rightarrow h(r) = h = cte$$

در این رابطه  $h(r)$  برابر با تابع ضخامت دیسک و مقدار آن ثابت و برحسب متر است. برای دیسک در معرض نیروی گریز از مرکز حاصل از دوران پره ها و قلاب های متصل کننده پره به سطح خارجی دیسک، هریک از آثار به طور جداگانه محاسبه و با یکدیگر جمع شده است. برای محاسبه بار ناشی از پره ها بارگذاری وارده بر سطح اعمالی طبق رابطه (۱۷) برابر است با [۱۸]:

$$\sigma_{rB} = \frac{F_{Tb}}{A_b} = \frac{m_b r_b \omega^2 \times N_b}{2\pi \times r_r \times t_b} \quad (17)$$

در اینجا  $F_{Tb}$  و  $A_b$  به ترتیب برابر با نیروی گریز از مرکز پره ها و مساحت مرکز سطح دوران پره است.  $m_b$ ،  $r_b$ ،  $t_b$  و  $N_b$  به ترتیب برابر جرم یک پره، مختصات شعاعی پره، پهنای پره و تعداد پره های در حال دوران است.  $\sigma_{rB}$  تنش معادل ناشی از دوران پره ها است. جهت محاسبه تنش ناشی از نیروی گریز از مرکز ریشه های متصل کننده پره به دیسک طبق رابطه (۱۸):

$$\sigma_{rR} = \frac{F_r}{A_r} = \frac{m_r r_r \omega^2 \times N_r}{A_r} \quad (18)$$

$m_r$ ،  $r_r$  و  $N_r$  به ترتیب برابر با جرم یک ریشه، مختصات شعاعی ریشه، تعداد ریشه ها و سطح مقطع سطح تماس ریشه با دیسک است.  $\sigma_{rR}$  تنش معادل ناشی از دوران ریشه ها است.

$$B.C. = \begin{cases} r = a \rightarrow \sigma_r = 0 \\ r = b \rightarrow \sigma_r = \sigma_{rB} + \sigma_{rR} = \frac{m_b r_b \omega^2 \times N_b}{2\pi \times r_r \times t_b} + \frac{m_r r_r \omega^2 \times N_r}{A_r} \end{cases} \quad (19)$$

با توجه به تغییرات حرارتی پایدار دیسک مورد بحث در تمامی راستای طولی، همچنین با توجه به این که این توزیع ناشی از اختلاف حرارت بین سطوح داخلی و خارجی دیسک و تابعی از تغییرات مختصات شعاعی است، برای محاسبه تابع توزیع حرارت از معادله حاکم بر توزیع حرارت برای مسائل با متغیر یک بعدی در سیستم مختصات قطبی به صورت رابطه (۱۱) استفاده شده است [۱۳].

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (11)$$

که در این رابطه  $k$  برابر با ضریب هدایت حرارتی ماده است. برای حل معادله دیفرانسیل (۱۱) و در نتیجه محاسبه تابع توزیع حرارت  $T(r)$ ، شرایط مرزی برای دیسک دوار جدار ضخیم مدنظر به صورت رابطه (۱۲) در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} @ r = a &\rightarrow k \frac{dT}{dr} = h_a(T - T_a) \\ @ r = b &\rightarrow -k \frac{dT}{dr} = h_b(T - T_b) \end{aligned} \quad (12)$$

در رابطه (۱۲)،  $T_b$  و  $T_a$  به ترتیب دمای سطوح داخلی و خارجی دیسک و  $h_b$  و  $h_a$  به ترتیب برابر با ثابت های انتقال حرارت جابجایی در سطوح داخلی و خارجی دیسک است. همچنین اندیس های  $a$  و  $b$  به ترتیب به سطوح داخلی  $r = a$  و خارجی  $r = b$  دیسک اشاره دارد. با حل کلی معادله دیفرانسیل (۱۱) و با در نظر گرفتن شرایط مرزی برای مواد همگن طبق رابطه (۱۲)، تابع توزیع حرارت طبق رابطه (۱۳) به دست می آید:

$$T(r) = T_1 \ln(\beta) + T_2 \quad (13)$$

که در رابطه (۱۳)، ثابت های  $T_1$  و  $T_2$  طبق رابطه (۱۴) به دست می آیند:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{(T_b - T_a)}{k \left( \frac{1}{ah_a} + \frac{1}{bh_b} \right) + \ln \left( \frac{b}{a} \right)} \\ T_2 &= \frac{k \left( \frac{T_b}{bh_b} - \frac{T_a}{ah_a} \right) + T_i \ln \left( \frac{b}{a} \right)}{k \left( \frac{1}{ah_a} + \frac{1}{bh_b} \right) + \ln \left( \frac{b}{a} \right)} \end{aligned} \quad (14)$$

با جایگذاری تابع گرادیان حرارتی خاص رابطه جدید به دست آمده به صورت رابطه (۱۵) قابل بازنویسی است:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{r dr} - \frac{u}{r^2} - \alpha \frac{(1+\nu)T_1}{r(1-\nu)} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)pr\omega^2}{E(1-\nu)} = 0 \quad (15)$$

رابطه (۱۵) نوع ساده تری از معادله حرکت ناویر دیسک تحت گرادیان حرارتی (۱۴) دلخواه است، که به مانند روش استفاده شده برای حل این معادله مجدداً برای تابع حرارتی خاص مطرح شده قابل حل است. از سوی دیگر با جایگزینی تابع خاص به دست آمده (۱۴) به جای تابع حرارت دلخواه تنش ها و

|         |   |
|---------|---|
| ۲۱۱     | مدول الاستیسیته یانگ (Gpa)                      |
| ۸۱۹۰    | چگالی ( $Kg/m^3$ )                              |
| ۱۶۲۰۰   | سرعت زاویه ای (rpm)                             |
| ۱۲/۸e-۶ | ضریب انبساط حرارتی ( $1/^\circ C$ )             |
| ۰/۲۸    | ضریب پواسون                                     |
| ۱۰۳۶    | حد تسلیم الاستیک (Mpa)                          |
| ۹۳۲/۴   | حد تسلیم الاستیک (Mpa) در<br>دمای $500^\circ C$ |
| ۱۶/۶۱   | ضخامت دیسک (mm)                                 |

#### ۴- تحلیل دیسک ضخامت ثابت

با توجه به مشخصات هندسی و ترمومکانیکی دیسک و پره های متصل به آن، که در جداول ۱ و ۲ به آن پرداخته شد، نمودارهای توزیع تنش برای دیسک مفروض همگن در حالت ضخامت ثابت مطابق با شکل های ۶ تا ۱۰ به دست آمده است. برای هر یک از حالات تنش و ضریب اطمینان محاسبه شده، نمودار تغییرات برحسب شعاع محاسبه شده است. در این شکل و تمامی شکل های بعد تا شکل ۱۰ محور افقی نشان دهنده مختصات شعاعی و بازه تغییرات آن از سطح داخلی تا سطح خارجی است.

در شکل ۶ نمودار توزیع تنش شعاعی دیسک توربین همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ نشان داده شده است. همان طور که در این شکل مشخص است، با حرکت در راستای شعاعی از شعاع داخلی به خارجی افزایش تنش از صفر تا تنشی برابر با تنش ایجاد شده در اثر بار معادل حاصل از دوران پره ها در سطح خارجی مشاهده شده است. بنابراین بیشینه میزان تنش شعاعی در سطح ۶۰ میلی متری اتفاق می افتد و برابر با ۳۰۰ مگا پاسکال است. تطابق مقادیر تنش در سطوح داخلی و خارجی با مقادیر شرایط مرزی، به نوعی نشان دهنده صحت نتایج نمودار ترسیمی است.

در شکل ۷ نمودار توزیع تنش محیطی دیسک توربین همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ نشان داده شده است. تنش ها ابتدا در ناحیه کششی و در سطح خارجی دیسک وارد ناحیه فشاری می شود. با گذر از سطح داخلی به سطح خارجی مقدار این نوع تنش در دیسک کاهش یافته است که این تفاوت بین سطوح داخلی و خارجی نزدیک به پنج برابر است، به عبارتی واضح است سطح داخلی از نقطه نظر تنش های محیطی، بحرانی است. از سوی دیگر بدیهی است مؤلفه های محیطی تنش مؤلفه بحرانی تنش بوده و در قیاس با تنش های شعاعی در محدوده تغییراتی بسیار وسیع تری قرار گرفته اند، به گونه ای که بیشینه تنش محیطی

در شکل های ۴ و ۵ به ترتیب نماهای مربوط به ریشه متصل کننده پره به دیسک و پره متصل به دیسک مورد نظر آمده است. مشخصات هندسی و تنش معادل به دست آمده با استفاده از شرایط مرزی طبق رابطه (۱۹) در جدول ۱ نشان داده شده است. خواص ترمومکانیکی وارد بر دیسک طبق جدول ۲ مشخص شده است.



شکل ۴ نمای سه بعدی ریشه متصل کننده پره به دیسک



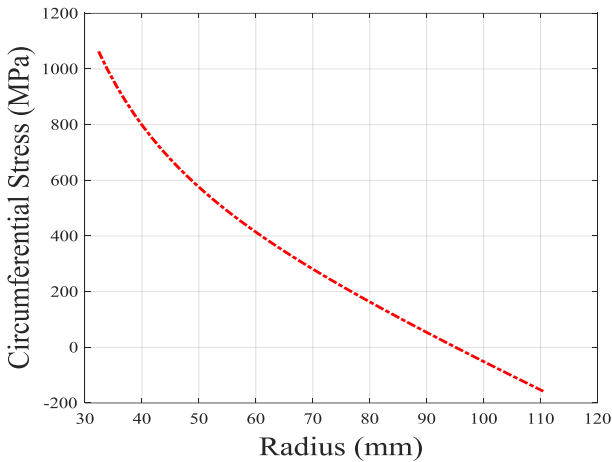
شکل ۵ نمای سه بعدی پره دیسک

جدول ۱ مشخصات هندسی پره و قلاب نگه دارنده متصل به دیسک

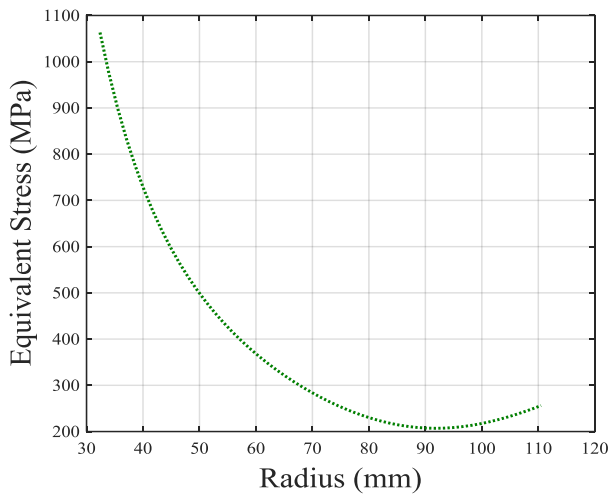
| پره         | ریشه        | کمیت هندسی                 |
|-------------|-------------|----------------------------|
| اینکونل ۷۱۸ | اینکونل ۷۱۸ | جنس پره                    |
| ۵/۶۸۶e-۶    | ۰/۸۵۱۵e-۶   | حجم واحد ( $m^3$ )         |
| ۷۵          | ۷۵          | تعداد                      |
| ۱۶۲۰۰       | ۱۶۲۰۰       | سرعت چرخش (rpm)            |
| ۲۱/۴        | ۲/۶۳۶       | نیروی گریز از مرکز (KN)    |
| ۱۶۰۵        | ۱۹۷/۷       | نیروی گریز از مرکز کل (KN) |
| ۰/۰۵        | ۰/۰۰۸       | جرم واحد (Kg)              |
| ۱۲۲/۵۲      | ۱۵/۰۹       | تنش معادل (Mpa)            |
| .           | .           | تنش معادل سطح داخلی (Mpa)  |
| ۱۳۷/۶۱      | ۱۳۷/۶۱      | تنش معادل سطح خارجی (Mpa)  |

جدول ۲ جنس و مشخصات ترمودینامیکی دیسک ضخامت ثابت

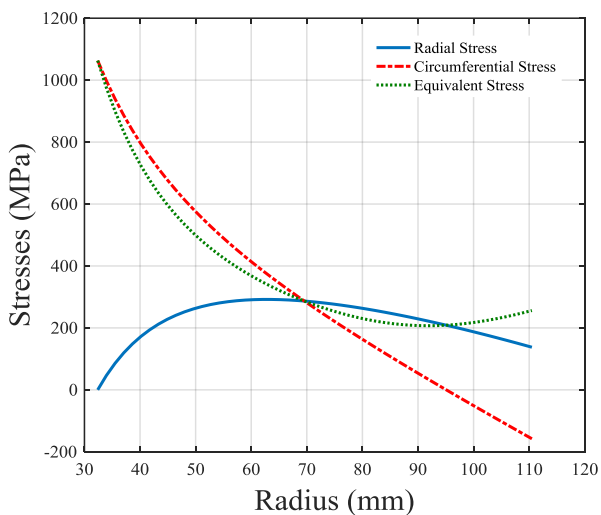
| جنس و مشخصات مکانیکی |           | جنس ماده             |
|----------------------|-----------|----------------------|
| Inconel 718          |           |                      |
| سطح خارجی            | سطح داخلی | مشخصه                |
| ۵۰۰                  | ۱۵۰       | حرارت ( $^\circ C$ ) |
| ۱۳۷/۶۱               | .         | تنش شعاعی (Mpa)      |
| ۱۱۰/۴۹               | ۳۲/۳۸۵    | شعاع (mm)            |



شکل ۷ توزیع تنش محیطی دیسک توربین مفروض با پروفیل ضخامت ثابت



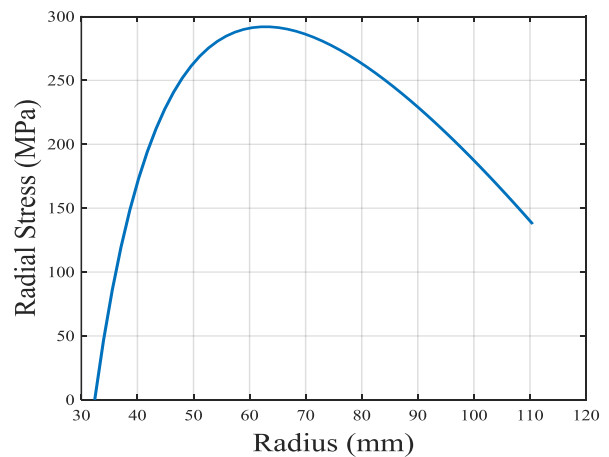
شکل ۸ توزیع تنش معادل دیسک توربین مفروض با پروفیل ضخامت ثابت



شکل ۹ توزیع تنش های دیسک توربین مفروض با پروفیل ضخامت ثابت

بیش از سه برابر بیشینه تنش شعاعی است، لذا این تنش نقش بسیار مهمی را در طراحی سازه ایفا می کند.

در شکل ۸ نمودار توزیع تنش معادل دیسک توربین همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ نشان داده شده است. همچون تنش های اصلی شعاعی، محیطی و تغییرات تنش معادل نیز با حرکت در راستای شعاعی روندی کاهشی و سپس افزایش دارد. کمترین سطح تنش ها در ۹۴ میلی متری مختصات شعاعی اتفاق افتاده و بیشینه تنش در سطح داخلی اتفاق افتاده است. در شکل ۹ نمودار توزیع تنش های شعاعی، محیطی و معادل دیسک توربین همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ نشان داده شده است. مشخص است سطح تنش های محیطی از سطح داخلی تا شعاع ۷۰ میلی متری بیش از مؤلفه شعاعی تنش بوده و بعد از این مختصات با حرکت از سطح داخلی به سطح خارجی، تنش شعاعی نسبت به تنش محیطی فراتر رفته و تنش محیطی به تدریج وارد ناحیه فشاری شده است. در شکل ۱۰ نمودار توزیع ضریب اطمینان دیسک توربین همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ نشان داده شده است؛ سطح داخلی با وجود برخورداری از استحکام بالاتر و قرار گرفتن در معرض حرارت کمتر سطح بحرانی بوده و با گذر به سطح خارجی ضریب اطمینان رو به افزایش است. در اینجا باید متذکر شد که سازه علاوه بر حرارت تحت بار گریز از مرکز ناشی از اثر وزن و بار معادل ناشی از دوران اتصالات خارجی نیز می باشد. که در مجموع این آثار منجر به بحرانی شدن سطح داخلی گردیده است.



شکل ۶ توزیع تنش شعاعی دیسک توربین مفروض با پروفیل ضخامت ثابت

برای دیسک جزئی که تنش مربوط به آن نقطه شناخته می شود، وجود دارد. بنابراین مطابق با روش گریمل [۱۰] می توان نوشت:

$$\begin{aligned} s &= \sigma_r + C_1 r^2 \\ t &= \sigma_\theta + C_2 r^2 \end{aligned} \quad (21)$$

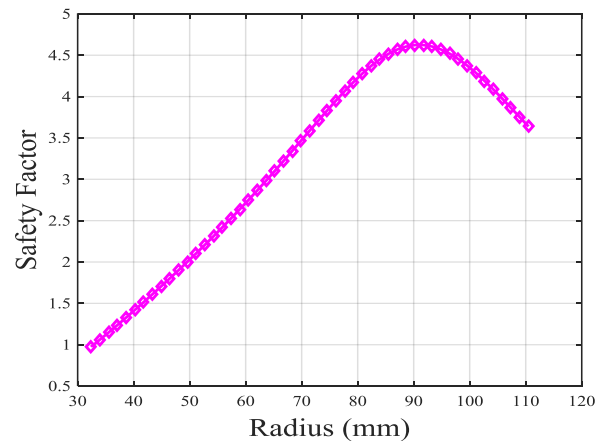
با فرض اینکه مقادیر  $\sigma_r$  و  $\sigma_\theta$  در هر شعاع  $r$  جزئی مشخص باشد:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(t + s) \\ B &= \frac{1}{2}(t - s)r^2 \end{aligned} \quad (22)$$

در این روش تنش های دیسک های جزئی مشابه با روابط دیسک ضخامت ثابت قابل بررسی است اما تفاوت در این است که در دیسک ضخامت ثابت یک تکه برای رسیدن به نتایج به دو شرط مرزی نیاز بود که با معلوم بودن تنش های شعاعی سطوح داخلی و خارجی ثابت های انتگرال گیری و در نتیجه توزیع تنش در راستای دیسک قابل محاسبه می باشد اما در دیسک جزئی در تنش های شعاعی و محیطی در فصل مشترک دیسک ها مجهول است. اگر تنش های شعاعی در لبه داخلی اولین دیسک حلقوی جزئی و در لبه خارجی از آخرین دیسک های جزئی (دیسک  $n$  ام) برای دیسک تقسیم بندی شده، معلوم باشند، در مجموع  $2n$  مجهول وجود دارد یا به عبارت دیگر  $n - 1$  تنش شعاعی در محل اتصال دیسک های جزئی با ضخامت مختلف و  $n + 1$  تنش محیطی در فصل مشترک ها و همچنین در لبه داخلی از اولین دیسک جزئی و لبه خارجی از آخرین دیسک مجهول هستند. در مجموع می توان  $2n$  معادله نوشت که  $n - 1$  معادله از آن ها، معادلات سازگاری است که بیان کننده یکسان بودن جابجایی های شعاعی در هر سمت هر فصل مشترک است؛  $n + 1$  از معادلات تعادل که در آن ها عبارت ثابت  $\sigma_r h$  برقرار است، روی هر فصل مشترک ثابت بوده و شامل اولین و آخرین فصل مشترک هم می شود.

به جای نوشتن سیستم  $2n$  معادله  $2n$  مجهول، روش اصلی تیموشنکو-گریمل پیشنهاد شده و در مراحل بعدی، شروع محاسبات از لبه داخلی اولین دیسک جزئی یا لبه خارجی آخرین دیسک جزئی است که در آن مقدار تنش  $\sigma_r$  معلوم و یک مقدار تجربی  $\sigma_{\theta 0}$  نیز برای تنش مجهول  $\sigma_\theta$  فرض شده است. لازم به ذکر است از آنجا که ضخامت در شعاع داخلی اولین دیسک جزئی متفاوت از شعاع داخلی در پروفیل واقعی است، دقیق تر است اشاره شود مقدار  $\sigma_{r0}$  مطابق شرایط در مرز داخلی باید توسط اولین روابط (۲۲) جهت اعمال تغییر ضخامت  $\Delta h$  تصحیح شده باشد.

$$\bar{h} = h + \Delta h \quad (23)$$



شکل ۱۰ توزیع ضریب اطمینان دیسک توربین مفروض با پروفیل ضخامت ثابت

## ۵- تحلیل دیسک ضخامت دلخواه با استفاده از تئوری تیموشنکو-گریمل

روش تیموشنکو-گریمل طراح را قادر به تحلیل دیسک های توپر، حلقوی و با انواع پروفیل های ضخامت، نظیر ضخامت ثابت، خطی، هذلولی، مخروطی و هندسه های خاص می کند. این روش که به نوعی یک روش المان محدود است، بر اساس تقسیم دیسک ضخامت دلخواه به تعدادی دیسک های حلقوی ضخامت ثابت به هم پیوسته صورت می گیرد. به منظور ساده سازی، دیسک ها همواره به دیسک های جزئی با ضخامت ثابت تقسیم شده است. البته در این تئوری می توان به جای چند دیسک ضخامت ثابت از چند دیسک متصل با پروفیل ضخامت خطی و یا هذلولی نیز استفاده کرد. در تقسیم بندی دیسک اصلی به دیسک های جزئی، پروفیل پیوسته واقعی با پروفیل گسسته سازی شده دارای قسمت های ضخامت ثابت معادل جایگزین می گردد و باید توجه داشت جهت اطمینان از صحت و اعتبار نتایج برای پروفیل های دیسک با تغییرات ضخامت زیاد و ناگهانی، تعداد دیسک ها را افزایش و یا به عبارت دیگر تقسیم بندی ها را کوچک تر در نظر گرفت. تحلیل تنش موجود در هر حلقه دیسک ضخامت ثابت عبارت است از:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= S5 \left[ \begin{aligned} &S2(3 + \nu) + S1(\nu - 1) + S3 \left( 1 - \frac{\nu}{r} \right) + \\ &S4 \left( 1 - \frac{\nu}{r} \right) + (1 + \nu)\alpha T(r) \end{aligned} \right] \\ \sigma_\theta &= S5 \left[ \begin{aligned} &S2(1 + 3\nu) + S1(1 - \nu) + S3(1 + \nu) \\ &S4(1 - \nu) - (1 + \nu)\alpha T(r) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

بدیهی است که اگر مقادیر تنش های شعاعی و محیطی در هر نقطه از دیسک های حلقوی جزئی که تقسیم بندی شده اند؛ مشخص باشد، امکان تعیین ثابت های انتگرال گیری  $C_1$  و  $C_2$



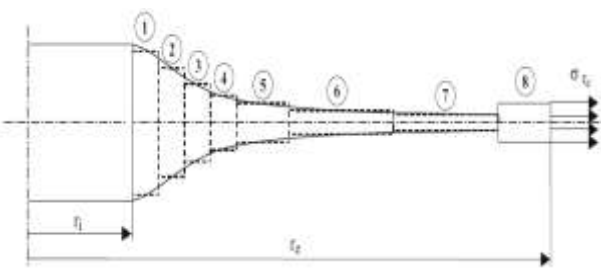
تکرار فرض شده است، که به موجب آن به یک سیستم از تنش های  $\sigma_r'$  و  $\sigma_\theta'$  که متفاوت از آنچه مطلوب است، می توان رسید. با شروع شرایط جدید و تکرار محاسبه قبلی، یک سیستم جدید از تنش های  $\sigma_r''$  و  $\sigma_\theta''$  به دست می آید. که این تنش ها شرایط سازگاری و تعادل را ارضا کرده و همراه تنش های متناسب با مقدار اولیه  $\sigma_{\theta 0}$  در همه نقاط است. با این وجود وضعیت تنش مطلوب می تواند به عنوان یک ترکیب خطی از دو وضعیت تنش که ارضا کننده شرایط تعادل و سازگاری است، حاصل شود. با در نظر گرفتن دو وضعیت تنش محاسبه شده که قبلاً نیازمندی ها را اعمال کرده، تنش مطلوب با رابطه (۲۷) بیان شده است:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r' + K\sigma_r'' \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta' + K\sigma_\theta'' \end{aligned} \quad (27)$$

اولین رابطه امکان محاسبه ثابت  $K$  را ایجاد می کند، همچنین شرایط مرزی رابطه (۲۸) باید در لبه خارجی در نظر گرفته شود. وقتی که ثابت  $K$  دارای مقدار از پیش تعیین شده است، وضعیت تنش در سرتاسر دیسک می تواند با استفاده از روابط (۲۸) محاسبه شود.

$$\sigma_{rb} = \sigma_{rb}' + K\sigma_{rb}'' \quad (28)$$

در شکل (۱۱) نمایی از المان گیری دیسک های ضخامت ثابت برای مدل سازی مسئله ضخامت دلخواه نشان داده شده است. از طرفی می توان بدون محاسبه ثابت  $K$  و به صورت سعی و خطاهای طولانی مقدار اولیه  $\sigma_{\theta 0}$  صحیح که منجر به رسیدن به تنش شعاعی مشابه با شرایط مرزی در سطح خارجی می گردد را حدس زده و حالات تنش دیسک مورد نظر را به دست آورد.



شکل ۱۱ نمایی از المان گیری دیسک های ضخامت ثابت در یک دیسک ضخامت دلخواه [۱۷]

در ادامه به منظور تحلیل دقیق تر و مقایسه نتایج حالت واقعی به نسبت حالت ضخامت ثابت و بررسی میزان خطای ناشی از ساده سازی، پروفیل واقعی هندسه واقعی دیسک بررسی می شود. تئوری با استفاده از نرم افزار متلب کد نویسی شده است و با توجه به عددی بودن تئوری حل جهت اطمینان از صحت نتایج به دست آمده یک هندسه خاص فرضی ضخامت ثابت با استفاده

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \sigma_r + \Delta\sigma_r \\ \bar{\sigma}_\theta &= \sigma_\theta + \Delta\sigma_\theta \end{aligned}$$

بدین ترتیب ضخامت و تنش های شعاعی و محیطی در دیسک جزئی بعدی حاصل می شود. در فصل مشترک بین دیسک های جزئی متصل، نیروهای شعاعی در واحد طول باید معادل آنچه در معادلات تعادل است، برقرار باشد. با این وجود جابجایی های شعاعی دو فصل مشترک باید مطابق معادلات سازگاری باشد، بنابراین:

$$\begin{aligned} \sigma_r h &= \bar{\sigma}_r \bar{h} \\ u &= r\varepsilon_\theta = \frac{r}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) = \frac{r}{E}(\bar{\sigma}_\theta - \nu\bar{\sigma}_r) \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگزین کردن روابط (۲۳) در روابط (۲۴)، روابط (۲۵) حاصل می شود:

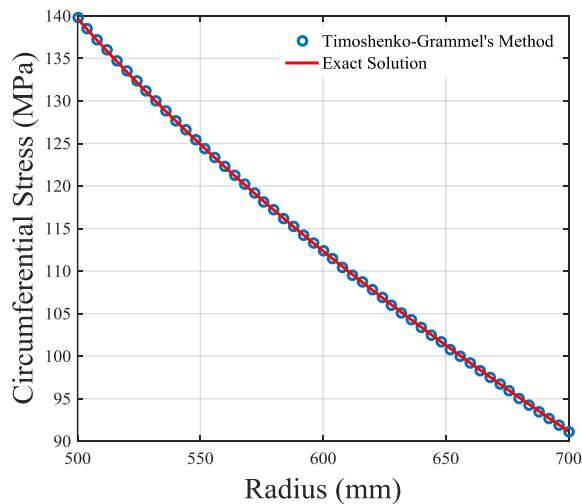
$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r &= -\sigma_r \frac{\Delta h}{h + \Delta h} \\ \Delta\sigma_\theta &= \nu\Delta\sigma_r \end{aligned} \quad (25)$$

اما از آنجا که نتایج  $C_1$  و  $C_2$  بدون تغییر در انتقال از یک دیسک جزئی به دیسک بعدی در راستای شعاع؛ معادل است، رابطه (۲۶) نتیجه می دهد:

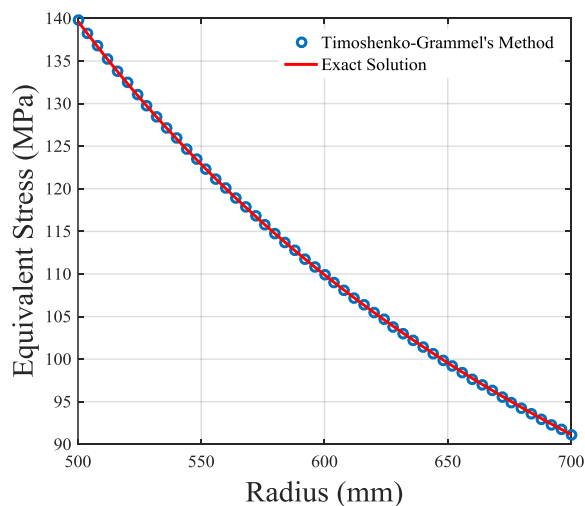
$$\begin{aligned} \Delta s &= \Delta\sigma_r \\ \Delta t &= \Delta\sigma_\theta \end{aligned} \quad (26)$$

اضافه کردن تنش های  $\sigma_r$  و  $\sigma_\theta$  محاسبه شده در شعاع خارجی اولین دیسک جزئی به روابط (۲۵)، تنش های  $\sigma_r$  و  $\sigma_\theta$  را در شعاع داخلی دومین دیسک جزئی می دهد. سپس این روش دیسک به دیسک ادامه یافته تا آنجا که به شعاع خارجی آخرین دیسک جزئی رسیده شود. در این مرحله می توان کنترل کرد که مقدار تجربی  $\sigma_{\theta 0}$  که ابتدا فرض شده بود، درست است یا نه. اگر به صورت اتفاقی مقدار  $\sigma_{\theta 0}$  درست باشد، تنش  $\sigma_r$  حاصل شده در شعاع خارجی آخرین دیسک جزئی مقدار معلوم مشتق شده از شرایط مرزی در آن شعاع خواهد بود، که دقیق تر است زیرا ضخامت در شعاع خارجی آخرین دیسک جزئی به طور کلی متفاوت از ضخامت خارجی پروفیل واقعی است. تنش محاسبه شده  $\sigma_r$  اصلاحی با استفاده از اولین رابطه (۲۳) به منظور تغییر ضخامت  $\Delta h$  باید تنش  $\sigma_r$  مطابق شرایط مرزی خارجی با  $\sigma_{rb}$  جایگزین شود. در واقع با این وجود بسیار بعید است که مقدار تجربی  $\sigma_{\theta 0}$  نسبت داده شده به عنوان پیش فرض صحیح باشد و تنش شعاعی در لبه خارجی متفاوت از مقدار داده شده در شرایط مرزی است.

در صورتی که فرض ابتدایی صحیح باشد حل مسئله به پایان می رسد، اما در صورت اشتباه بودن فرض اولیه مجدداً فرض تنش محیطی دوباره در لبه خارجی برابر  $\sigma_{\theta 0}$  و معادل با اولین

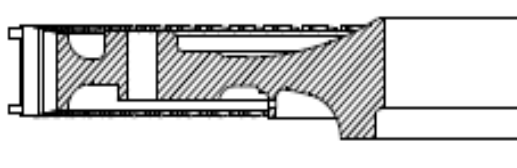


شکل ۱۳ توزیع تنش محیطی مسئله فرضی با استفاده از نظریه های دقیق و تیموشنکو-گریمل



شکل ۱۴ توزیع تنش معادل مسئله فرضی با استفاده از نظریه های دقیق و تیموشنکو-گریمل

با توجه به بررسی مسئله فرضی با استفاده از تئوری تیموشنکو-گریمل و تطابق صحت و اعتبار نتایج به دست آمده با حل دقیق در ادامه با استفاده از تئوری تشریح شده هندسه حقیقی دیسک مدنظر مورد بررسی قرار گرفته است. در (شکل ۱۵) نمایی از پروفیل تغییرات ضخامت هندسه حقیقی دیسک توربین مفروض نشان داده شده است.

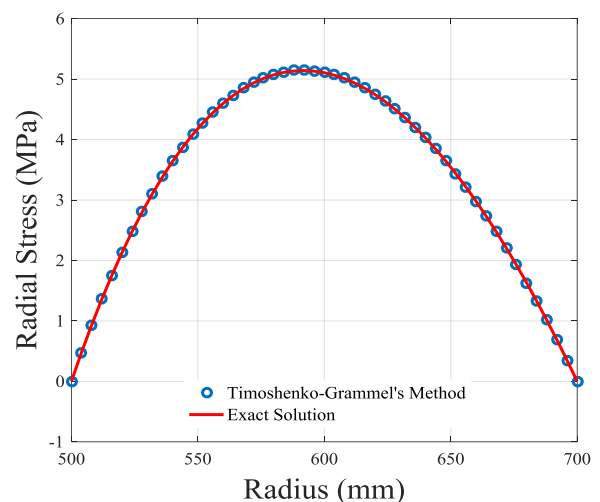


شکل ۱۵ دیسک مفروض با پروفیل ضخامت حقیقی

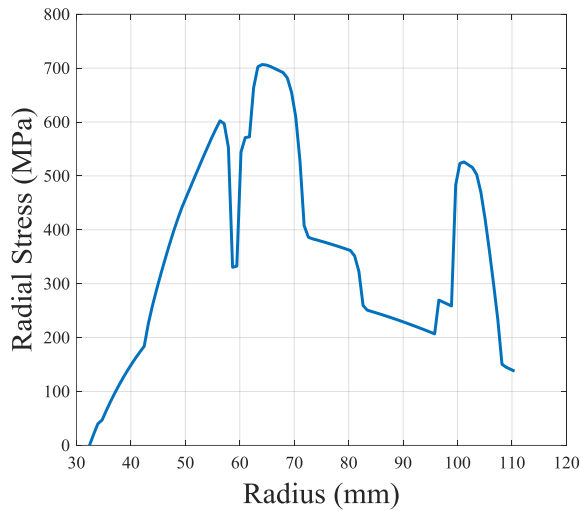
از روش دقیق و تئوری تیموشنکو-گریمل به طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج تنش ها که در شکل های ۱۲ تا ۱۴ نشان داده شده است به ترتیب نتایج ناشی از تنش های شعاعی، محیطی و ضریب اطمینان با استفاده از حل دقیق و تئوری تیموشنکو-گریمل است. هندسه مسئله بررسی شده در جدول ۳ نشان داده شده است. نتایج حاکی از تطابق ۱۰۰ درصد تئوری مورد استفاده با روش حل دقیق و صحت آن می باشد.

جدول ۳ مشخصات هندسی و مکانیکی دیسک برای صحت سنجی

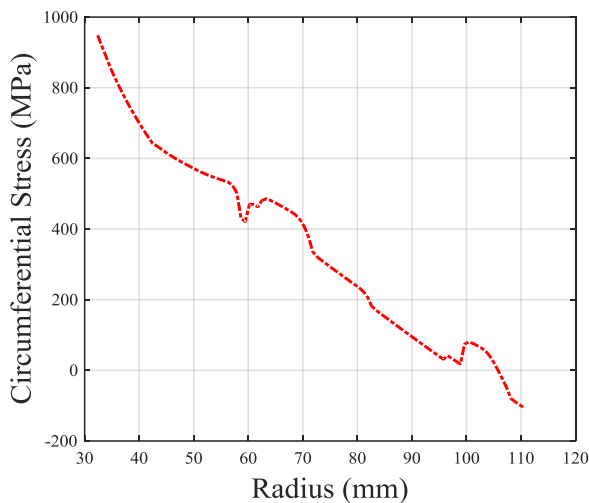
| مشخصه                      | سطح داخلی | سطح خارجی |
|----------------------------|-----------|-----------|
| حرارت (°C)                 | ۲۰        | ۲۵        |
| تنش شعاعی (Mpa)            | ۰         | ۰         |
| شعاع (mm)                  | ۵۰۰       | ۷۰۰       |
| مدول الاستیسیته ینگ (Gpa)  | ۲۱۰       |           |
| چگالی (Kg/m <sup>3</sup> ) | ۷۸۰۰      |           |
| سرعت زاویه ای (rpm)        | ۲۰۰۰      |           |
| ضریب انبساط حرارتی (1/°C)  | ۱۲-۲۵     |           |
| ضریب پواسون                | ۰/۳       |           |
| ضخامت دیسک (mm)            | ۱۶/۶۱     |           |



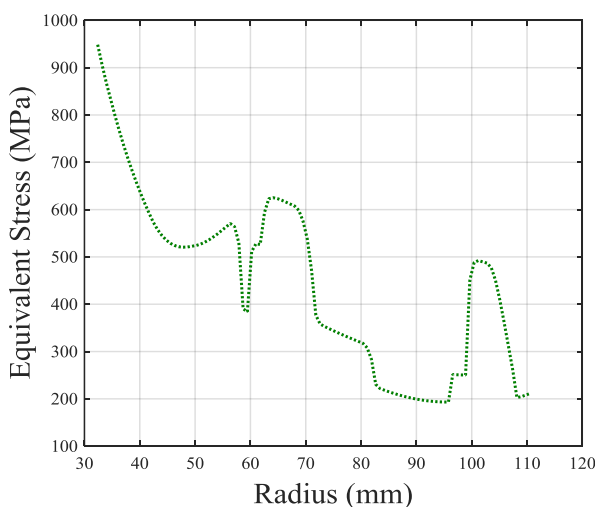
شکل ۱۲ توزیع تنش شعاعی مسئله فرضی با استفاده از نظریه های دقیق و تیموشنکو-گریمل



شکل ۱۶ توزیع تنش شعاعی دیسک توربین مفروض با پروفیل ضخامت حقیقی



شکل ۱۷ توزیع تنش محیطی دیسک توربین مفروض با پروفیل ضخامت حقیقی



شکل ۱۸ توزیع تنش معادل دیسک توربین مفروض با پروفیل ضخامت حقیقی

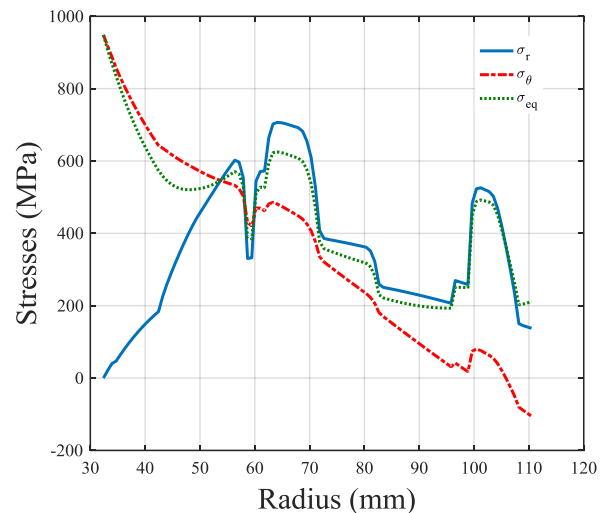
پس از تحلیل و کد نویسی پروفیل حقیقی با استفاده از تئوری تیموشنکو-گریمل نمودارهای توزیع تنش های دیسک مفروض در شکل های ۱۶ تا ۱۹ نشان داده شده است. در ۱۶ نمودار توزیع تنش شعاعی دیسک توربین همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ برای پروفیل حقیقی آمده است. همان طور که در این شکل مشخص است، همچون هندسه ضخامت ثابت روند تغییرات تنش شعاعی افزایش و سپس کاهش است اما به خاطر تغییرات پیوسته و شدید ضخامت، تنش ها مرتباً در حال تغییر بوده مجدداً تغییرات از سطح داخلی به سطح خارجی از صفر تا تنشی برابر با تنش ایجاد شده در اثر بار معادل حاصل از دوران پره ها در سطح خارجی مشاهده شده است. بنابراین بیشینه میزان تنش شعاعی در سطح ۷۰ میلی متری اتفاق می افتد و برابر با ۷۰۰ مگا پاسکال است. لازم به ذکر است تطابق مقادیر تنش در سطوح داخلی و خارجی با مقادیر شرایط مرزی، به نوعی نشان دهنده صحت نتایج گراف ترسیمی است. در شکل ۱۷ نمودار توزیع تنش محیطی دیسک همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ برای پروفیل حقیقی آن نشان داده شده است. نحوه تغییرات تنش و باز تنش ها در سطوح داخلی و خارجی بسیار نزدیک به رفتار هندسه با ضخامت ثابت است و تفاوت ها و فراز و نشیب های تنش ها ناشی از تغییرات پروفیل ضخامت است. در شکل ۱۸ نمودار توزیع تنش معادل دیسک توربین همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ برای پروفیل حقیقی آن آمده است. سطح داخلی دارای بیشینه میزان تنش معادل و سطح بحرانی است. در شکل ۱۹ نمودار توزیع تنش های شعاع، محیطی و معادل دیسک توربین همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ برای پروفیل حقیقی آن نشان داده شده است. نحوه تغییرات تنش و باز تنش ها در سطوح داخلی و خارجی در اینجا نیز بسیار نزدیک به رفتار هندسه با ضخامت ثابت است و تفاوت ها و فراز و نشیب های تنش ها ناشی از تغییرات پروفیل ضخامت است. در شکل ۲۰ نمودار توزیع ضریب اطمینان دیسک توربین همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ برای پروفیل حقیقی آن نشان داده شده است. در اینجا نیز بار دیگر می توان مشاهده کرد، بحرانی ترین سطح، سطح داخلی بوده و ضریب اطمینان بحرانی به دست آمده برابر با ۱/۱ بسیار نزدیک به مقدار استخراج شده برای ضخامت ثابت بوده است. پروفیل هندسی دیسک بررسی شده در شکل ۲۱ نشان داده شده است.

به طور کلی از بررسی تنش های استخراج شده در دو حالت هندسه ضخامت ثابت ساده شده و دقیق با یکدیگر می توان برداشت کرد هرچه هندسه ساده سازی شده از گرادیان های ضخامت بیشتر صرف نظر کرده باشد اختلاف بیشتری در سطح تنش های شعاعی مشاهده خواهد شد ولی تأثیر این پارامتر در تنش محیطی کمتر است. لذا معادل سازی هندسه به یک هندسه ضخامت ثابت گرچه منجر به ایجاد خطاهایی در نتایج نسبت به پروفیل دقیق خواهد شد اما از طرفی حل را ساده تر می کند و به علت نزدیکی و تقارب مناسب محدوده نتایج محاسبه شده می توان از آن برای تحلیل های مقدماتی و بررسی های اولیه استفاده کرد و نتایج حاصله از دقت خوبی برخوردار خواهد بود.

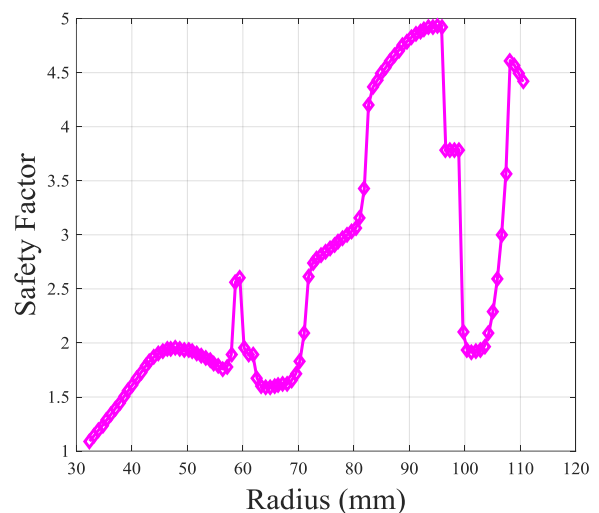
#### ۶- تحلیل دیسک دوجانه

در تحلیل یک دیسک دوجانه، به منظور تحلیل ابتدایی با یک دیسک حلقوی با سوراخ مرکزی مواجهه بوده که علاوه بر سوراخ محوری دارای یک سوراخ افقی به صورت متقارن محوری بوده و هر دو سمت محوری دیسک در معرض بارگذاری یکسان قرار گرفته و دارای هندسه یکسان و خواص ماده تشکیل دهنده برابر می باشد. در شکل ۲۲ نمای ساده ای از یک طرح ایده دیسک دوجانه نشان داده شده است.

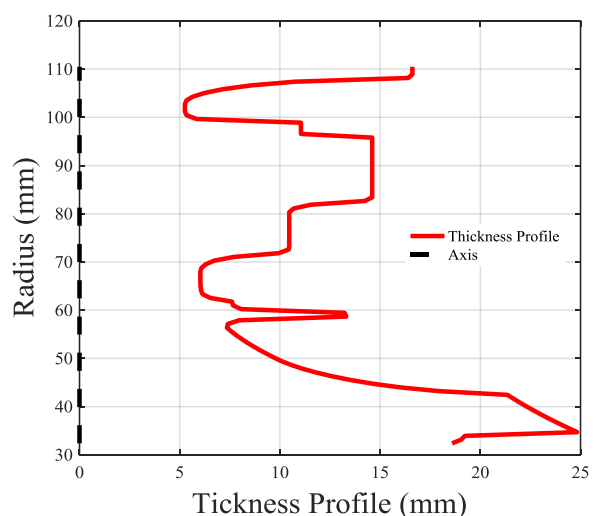
برای تحلیل این نوع دیسک با توجه به فرضیات اشاره شده، با توجه به وجود تقارن محوری و افقی دیسک نسبت به محور قائم برای تحلیل یک سمت سازه را تحت اثر نیمی از بارگذاری کل (بارگذاری وارد بر همان سمت) در نظر گرفته و به تحلیل آن اقدام می شود. برای تحلیل این نوع دیسک با پروفیل های غیر یکنواخت به استفاده از تئوری برای حل دیسک های با ضخامت دلخواه نیاز است. اما با توجه به این که هدف انتخاب بهترین پروفیل با حداقل جرم و بیشترین ایجاد فضا جهت خنک کاری و تنش های قابل تحمل جهت ایده دیسک دوجانه با استفاده از روش شمارشی است و ایده تیموشنکو-گریمل ایده ای است که با حدس اولیه مقدار تنش محیطی لایه نخست و سپس سعی و خطا به پاسخ مطلوب می رسد و برخلاف سادگی روابط زمان بر است. لذا برای تحلیل های چندین حالت متنوع دیسک دوجانه از تئوری مانسون استفاده شده است که این روش برخلاف دشوار بودن برنامه نویسی، تحلیلی است که به سعی و خطا نیاز ندارد.



شکل ۱۹ توزیع تنش های دیسک توربین مفروض با پروفیل ضخامت حقیقی



شکل ۲۰ توزیع ضریب اطمینان دیسک توربین مفروض با پروفیل ضخامت حقیقی



شکل ۲۱ پروفیل ضخامت دیسک توربین مفروض

$$\frac{\sigma_{r_i} \rho_i h_i - \sigma_{r_{i-1}} \rho_{i-1} h_{i-1}}{\rho_i - \rho_{i-1}} - \frac{\sigma_{\theta_i} h_i - \sigma_{\theta_{i-1}} h_{i-1}}{2} + \frac{\omega^2 r_e^2}{2} (\gamma_i \rho_i^2 h_i + \gamma_{i-1} \rho_{i-1}^2 h_{i-1}) = 0$$

$$\frac{\sigma_{\theta_i} - \sigma_{\theta_{i-1}}}{E(\rho_i - \rho_{i-1})} - \frac{\nu(\sigma_{r_i} - \sigma_{r_{i-1}})}{E(\rho_i - \rho_{i-1})} + \frac{\alpha_i T_i - \alpha_{i-1} T_{i-1}}{\rho_i - \rho_{i-1}} \quad (30)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{(1+\nu)(\sigma_{r_i} - \sigma_{\theta_i})}{E \rho_i} + \frac{(1+\nu)(\sigma_{r_{i-1}} - \sigma_{\theta_{i-1}})}{E \rho_{i-1}} \right] = 0$$

رابطه به  $n$  گروه از دستگاه های دو معادله کاهش پیدا می کند که عبارت است از:

$$\begin{aligned} C_i \sigma_{r_i} + D_i \sigma_{\theta_i} + F_i \sigma_{r_{i-1}} + G_i \sigma_{\theta_{i-1}} &= H_i \\ C_i' \sigma_{r_i} + D_i' \sigma_{\theta_i} + F_i' \sigma_{r_{i-1}} + G_i' \sigma_{\theta_{i-1}} &= H_i' \end{aligned} \quad (31)$$

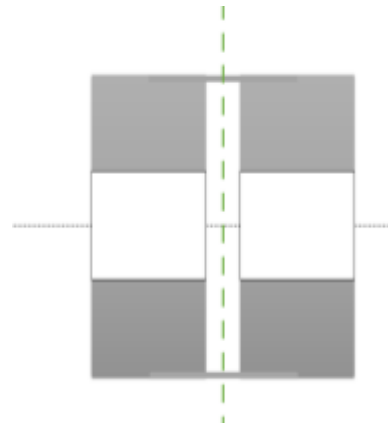
که در این جا با در نظر گرفتن معادله کلی تر (27)، ضرایب ظاهر شده در سطر ابتدایی معادله (30) طبق رابطه (31) عبارت اند از:

$$\begin{aligned} C_i &= 2\rho_i h_i \\ D_i &= -h_i(\rho_i - \rho_{i-1}) \\ F_i &= -2\rho_{i-1} h_{i-1} \\ G_i &= -h_{i-1}(\rho_i - \rho_{i-1}) \\ H_i &= -\omega^2 r_e^2 (\rho_i - \rho_{i-1}) (\gamma_i \rho_i^2 h_i + \gamma_{i-1} \rho_{i-1}^2 h_{i-1}) \end{aligned} \quad (32)$$

همچنین ضرایب ظاهر شده در سطر دوم دستگاه معادلات (31) طبق رابطه (33) عبارتند از:

$$\begin{aligned} C_i' &= -\frac{1}{E} \left[ 2\nu + (\rho_i - \rho_{i-1}) \frac{\nu + \mu}{\rho_i} \right] \\ D_i' &= \frac{1}{E} \left[ 2 + (\rho_i - \rho_{i-1}) \frac{\nu + 1}{\rho_i} \right] \\ F_i' &= -\frac{1}{E} \left[ 2\nu - (\rho_i - \rho_{i-1}) \frac{\nu + \mu}{\rho_{i-1}} \right] \\ G_i' &= -\frac{1}{E} \left[ 2 - (\rho_i - \rho_{i-1}) \frac{\nu + 1}{\rho_i} \right] \\ H_i' &= 2(\alpha_i T_i - \alpha_{i-1} T_{i-1}) \end{aligned} \quad (33)$$

کلیه ضرایب مطرح شده در روابط (32) و (33) به کمیت های معلومی وابسته است که همگی آن ها تابع جنس و هندسه و شرایط بارگذاری حاکم بر دیسک مورد بحث است. محاسبات پیشرو فاقد چالش روش تیموشنکو-گریمل (نیاز به ضریب تصحیح) است. در این روش همان طور که اشاره شد ابتدا با انتخاب  $(n + 1)$  شعاع  $r_i$  در بازه  $(i = 0, 1, \dots, n)$ ، دیسک به جای یک مسئله پیوسته به یک مسئله با  $n$  مرز گسسته جایگزین می گردد. به منظور حصول اطمینان از اعتبار بالای نتایج می توان در نواحی با تغییرات سریع و ناگهانی هندسی فاصله بین مرزها را کوچک تر کرد. با توجه به هندسه مطلوب و در نظر گرفتن  $n$  دیسک با مرزهای بهم پیوسته، سپس  $(10n)$  ثابت داده شده در روابط ارائه شده را محاسبه کرده و دستگاهی از معادلات حاصل شده از  $n$  گروه از روابط (31) ایجاد می شود که



شکل ۲۲ نمایی ساده از ایده دیسک دوجانه

روش تفاضل محدود مانسون به منظور تعیین وضعیت حالات تنش در میدان الاستیک دیسک های چرخان متقارن محوری با پروفیل های ضخامت غیر رایج و غیر ثابت که در معرض گرادیان دما قرار دارند، استفاده می شود. این روش، یک روش عددی است که بر پایه جایگزینی معادلات دیفرانسیل سازگاری و تعادل با معادلات تفاضل محدود مرتبط با آن استوار است. این روش قابلیت مدل سازی مسائل با تغییرات ایجاد شده در امتداد شعاع در ضخامت دیسک، تغییرات در دما، مدول الاستیک، نسبت پواسون، چگالی ماده و ضریب انبساط حرارتی را دارا است [9]. به منظور حل مسئله باید هم زمان دو معادله تعادل و معادله سازگاری را در فرم منحصر به خواص بررسی خواهد شد. برای مواد ایزوتروپیک متقارن محوری که خواص الاستیک و ترموفیزیک آن تنها با شعاع متغیر است، طبق رابطه (29) می توان نوشت:

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r \rho h) - \sigma_{\theta} h + \gamma \omega^2 r_e^2 \rho^2 h = 0 \quad (29)$$

که در این رابطه  $r_e$  شعاع خارجی دیسک مدنظر،  $h$  ضخامت دیسک و  $\rho$  نسبت شعاع به شعاع خارجی است. با تقسیم دیسک پیوسته با ضخامت دلخواه به  $n$  دیسک گسسته با ضخامت ثابت،  $(n + 1)$  مقدار مختصات شعاعی با شروع از شعاع داخلی  $r_0$  تا شعاع خارجی  $r_n$  اعمال می شود. طبق روش تفاضل محدود با در نظر گرفتن  $\gamma(\rho)$  و تعیین یک متغیر کلی در قسمتی از شعاع  $r_{i-1}$  به شعاع  $r_i$  نسبت افزایشی  $(\gamma_i - \gamma_{i-1}) / (\rho_i - \rho_{i-1})$  برای مشتق  $dy/d\rho$  در معادلات فوق جایگزین شده یا در این معادلات مقدار میانگین  $(\gamma_i + \gamma_{i-1}) / 2$  برای مقدار محلی  $\gamma$  با اندازه یکسان جایگزین شده است.  $n$  معادله مربوط به دیسک های گسسته به صورت رابطه (30) حاصل می شود:

ارائه شده است. وضعیت تنش در شعاع کلی  $r_i$  به‌عنوان تابعی از مقدار مجهول  $\sigma_{\theta 0}$  (تنش محیطی سطح داخلی دیسک) طبق رابطه (۳۵) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \sigma_{r i} &= A_{r i} \sigma_{\theta 0} + B_{r i} \\ \sigma_{\theta i} &= A_{\theta i} \sigma_{\theta 0} + B_{\theta i} \end{aligned} \quad (35)$$

که در اینجا ثوابت  $A_{r i}$ ،  $A_{\theta i}$ ،  $B_{r i}$  و  $B_{\theta i}$  برای شعاع  $r_i$  می‌تواند بر اساس ثوابت  $A_{r i-1}$ ،  $A_{\theta i-1}$ ،  $B_{r i-1}$  و  $B_{\theta i-1}$  برای شعاع  $r_{i-1}$  به‌واسطه مجموعه روابط (۳۶) محاسبه شوند:

$$\begin{aligned} A_{r i} &= k_i A_{r i-1} + L_i A_{\theta i-1} \\ A_{\theta i} &= k_i' A_{r i-1} + L_i' A_{\theta i-1} \\ B_{r i} &= k_i B_{r i-1} + L_i B_{\theta i-1} + M_i \\ B_{\theta i} &= k_i' B_{r i-1} + L_i' B_{\theta i-1} + M_i' \end{aligned} \quad (36)$$

که در اینجا ضرایب موجود در رابطه (۳۶) طبق رابطه (۳۷) عبارت است از:

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{(D_i F_i' - D_i' F_i)}{Z_i} \\ k_i' &= \frac{(C_i' F_i - C_i F_i')}{Z_i} \\ L_i &= \frac{-(D_i' G_i - D_i G_i')}{Z_i} \\ L_i' &= \frac{-(C_i G_i' - C_i' G_i)}{Z_i} \\ M_i &= \frac{(D_i' H_i - D_i H_i')}{Z_i} \\ M_i' &= \frac{(C_i H_i' - C_i' H_i)}{Z_i} \\ Z_i &= C_i D_i' - C_i' D_i \end{aligned} \quad (37)$$

مقادیر  $A_{r 0}$ ،  $A_{\theta 0}$ ،  $B_{r 0}$  و  $B_{\theta 0}$  در شعاع  $r_0$  نیاز به محاسبه  $A_{r i}$ ،  $A_{\theta i}$ ،  $B_{r i}$  و  $B_{\theta i}$  با تعیین شرایط مرزی دارند و در نتیجه برای حالت مطلوب در این پژوهش روابط (۳۸) صادق هستند:

$$\begin{aligned} A_{r 0} &= B_{\theta 0} = 0 \\ A_{\theta 0} &= 1 \\ B_{r 0} &= \sigma_{r 0} \end{aligned} \quad (38)$$

سپس با به‌کارگیری متوالی رابطه (۳۶) برای حلقه‌های پی در پی مقادیر  $A_{r i}$ ،  $A_{\theta i}$ ،  $B_{r i}$  و  $B_{\theta i}$  را تعیین کرده تا به مقادیر  $A_{r n}$  و  $B_{r n}$  برسیم. همچون مقدار تنش شعاعی که در حلقه خارجی معلوم است، رابطه (۳۹) می‌تواند برای یافتن  $\sigma_{\theta 0}$  استفاده شود:

$$\sigma_{\theta 0} = \frac{(\sigma_{r n} - B_{r n})}{A_{r n}} \quad (39)$$

مجموعه روابط (۳۴) برای تحلیل همه وضعیت‌های تنش مناسب است. مزیت این نوع روش نسبت به روش تیموشنکو-گریمل عدم نیاز به اصلاح ضریب فرضی است. همچنین با وجود پیچیدگی کدنویسی روش نسبت به روش تیموشنکو-گریمل فضای اشغال شده حافظه در محاسبه خودکار کمتر است. زیرا

در اینجا تنها  $(2n)$  پارامتر از معادلات مجهول هستند. از  $2(n+1)$  مقدار تنش ظاهر شده در  $2(n+1)$  لایه ایجاد شده در سیستم  $(2n)$  معادلات توسط روابط (۳۱)، یعنی  $(n+1)$  مقدار از تنش‌های شعاعی  $\sigma_{r i}$  و  $(n+1)$  مقدار تنش‌های مماسی  $\sigma_{\theta i}$  به‌عنوان مجهولات این دستگاه مطرح می‌باشند و در بین این مجهولات اغلب مقدار تنش شعاعی در سطح داخلی دیسک ابتدایی  $\sigma_{r 0}$  و تنش شعاعی در سطح خارجی دیسک آخر  $\sigma_{r n}$  معلوم بوده و شرایط مرزی حل دستگاه را تشکیل می‌دهند. در مورد بررسی شده برای دیسک با سوراخ مرکزی، سیستم معادلات  $(2n)$  می‌تواند توسط معکوس ماتریس ضرایب حل شود که طبق رابطه (۳۴) عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\theta 0} \\ \sigma_{r 1} \\ \sigma_{\theta 1} \\ \sigma_{r 2} \\ \sigma_{\theta 2} \\ \dots \\ \sigma_{r n-1} \\ \sigma_{\theta n-1} \\ \sigma_{r n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & C_1 & D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ G_1' & C_1' & D_1' & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & G_2 & C_2 & D_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2' & G_2' & C_2' & D_2' & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_3 & G_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}' & D_{n-1}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & F_n & G_n & D_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & F_n' & G_n' & D_n' \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\times \begin{pmatrix} -F_1 \cdot \sigma_{r 0} + H_1 \\ -F_1' \cdot \sigma_{r 0} + H_1' \\ H_2 \\ H_2' \\ H_3 \\ \dots \\ H_{n-1}' \\ H_n - C_n \cdot \sigma_{r n} \\ H_n' - C_n' \cdot \sigma_{r n}' \end{pmatrix} \quad (34)$$

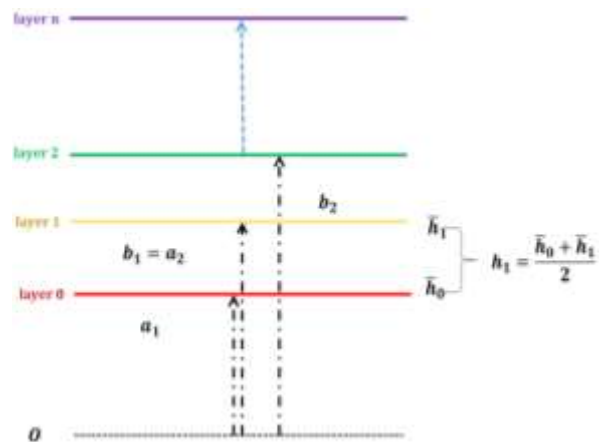
رابطه فوق مربوط به حالتی است که دیسک مفروض دارای یک سوراخ محوری باشد. بدیهی است در حالتی که دیسک توپر باشد، در سطح داخلی (شعاع  $r_0 = 0$ ) تنش  $\sigma_{r 0}$  یک مقدار مجهول است. در این حالت شرایط مرزی برای مرکز دیسک می‌تواند توسط اعمال همگرایی تنش‌های شعاعی و محیطی در آن نقطه بیان شود و با در نظر گرفتن  $\sigma_{r 0} = \sigma_{\theta 0}$  در این مورد، کافی است  $(F_1 + G_1)$  بجای  $G_1$  و  $(F_1' + G_1')$  به‌جای  $G_1'$  در ماتریس ضرایب جایگزین شود و عبارت‌های  $\sigma_{r 0}$  از رابطه (۳۲) حذف گردد. در فرمول بندی اصلی مانسون، روش توسعه یافته ای برای محاسبات جدولی و اقدامات صورت گرفته به صورت زیر

سوراخ در میانه مسیر (پله ای) بررسی می شود. تحلیل این دیسک برای بررسی تغییرات حالات تنش و جرم در قیاس با هندسه ساده شده اولیه و سپس بررسی اثر خنک سازی بر کاهش بیشتر تنش ها انجام شده است. برای انجام این تحلیل هندسه های پله ای با سطوح مقطع مختلف مورد بررسی قرار گرفته و در بین تمامی هندسه های مفروض برای رسیدن به پروفیل سوراخ پله با بهترین نتیجه (کمینه جرم و قابل اطمینان) از روش بهینه سازی شمارشی استفاده شده است. فرآیند بررسی در این روش روندی همچون روش المان محدود دارد، به این ترتیب که به همان صورت که در حل المان محدود مسئله در قالب تعداد مشخصی گره از یک مسئله پیوسته به یک مسئله گسسته تغییر شکل داده و حل می شود و چون روشی عددی است با افزایش تعداد گره ها و یا کاهش فاصله بین حالات بررسی، حل مورد بررسی به نتیجه واقعی همگرا خواهد شد، در اینجا نیز روش شمارشی فرآیندی مشابه را طی می کند. به این صورت که اگر تمامی حالات ممکن قابل شمارش و گسسته باشد تمامی آن ها را یک به یک حل کرده و بهترین حالت مطلوب را گزارش می کند و اگر تمامی حالات در یک بازه محدود پیوسته باشد، در ابتدا با توجه به محدود بودن بازه تغییرات تابع، مسئله از یک تحلیل برای بینهایت نقطه پیوسته ممکن به  $n$  نقطه در میان بازه با  $n$  حالت حل گسسته تقسیم شده و مسئله برای تمامی حالات به صورت مجزا تحلیل شده و در پایان بهترین نتیجه در بین حالات حل شده به عنوان نتیجه بهینه گزارش خواهد شد. بدیهی است هر چه تعداد نقاط گسسته بیشتر باشد، پاسخ به واقعیت نزدیک تر خواهد شد؛ بنابراین همچون مسائل المان محدود با افزایش حالات حل از یک حالت حل تک نقطه ای تا جایی که پاسخ همگرا شود و افزایش بیشتر تعداد نقاط حل دیگر منجر به افزایش دقت حل نشود، ادامه خواهد یافت. در این تحلیل راستای شعاعی هندسه یا به عبارتی مختصات شعاع داخلی و خارجی ثابت و مشخص است و غیرقابل تغییر است.

مقادیر ضخامت در سطوح داخلی، میانی و خارجی می تواند از ۰ تا ۸/۳۰۵ میلی متر متغیر در نظر گرفته شود و تغییرات آن پیوسته است. در این تحلیل این بازه پیوسته به ۲۰ نقطه گسسته تبدیل شده است که منجر به ایجاد ۴۰۰ هندسه متمایز پله شده است. در بین تمامی این حالات برای به دست آوردن بهترین پاسخ از روش بهینه سازی شمارشی استفاده شده است. از طرف دیگر باید به این نکته نیز توجه داشت که با توجه به محدودیت های طراحی و ساخت قیدهای زیر در هنگام تحلیل و بهینه سازی در نظر گرفته شود. جرم به عنوان پارامتر اساسی طراحی

که چهار بردار مرتبه  $(n+1)$  نسبت به ماتریس مرتبه  $(2n \times 2n)$  نیاز به ذخیره سازی دارد [۹].

در مجموع، روش مانسون مستلزم تقسیم دیسک به فضای دقیق تری نسبت به روش تیموشنکو-گریمل است. اما منجر به تشکیل معادلات ساده تری در هر قسمت از دیسک می شود. با توجه به این که پروفیل ضخامت برای حالت دیسک دوجانه دارای ضخامت متغیر در راستای شعاعی تغییر می کند، برای محاسبه جرم ابتدا مطابق با شکل ۲۳ یک دیسک با ضخامت متغیر به صورت پیوسته در راستای شعاعی را با به تعداد  $n$  نقطه گسسته با خواص متغیر گسسته در راستای شعاعی و معلوم در مرزهای گسستگی در نظر گرفته می شود.



شکل ۲۳ لایه بندی دیسک پیوسته با ضخامت متغیر به تعدادی دیسک گسسته با ضخامت ثابت

با یکسان در نظر گرفتن ضخامت هر حلقه برابر با میانگین ضخامت حلقه در سطوح بالایی و پایینی و تا حد امکان کوچک کردن فاصله بین حلقه ها، جرم دیسک با هندسه دلخواه با تقریب مناسب و قابل قبولی به دست می آید که طبق رابطه (۴۰) عبارت است از:

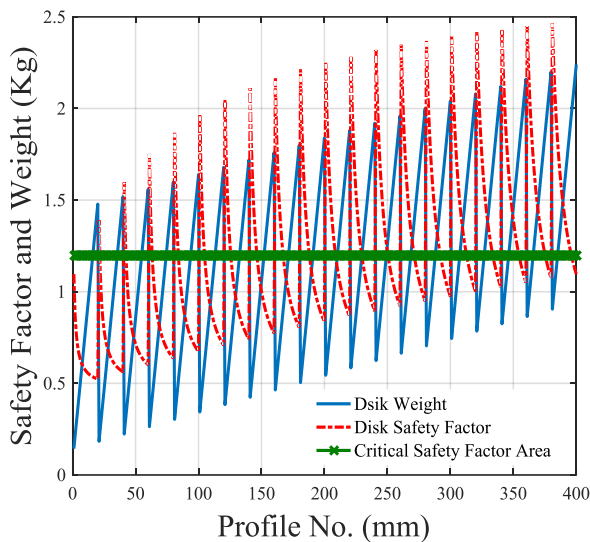
$$m = \rho \times V \rightarrow \sum_{i=1}^n \rho_i \times h_i \times \pi \times (b_i^2 - a_i^2) \quad (40)$$

که در این رابطه  $h_i$  برابر با ضخامت پروفیل دیسک مورد بحث  $\bar{t}$  ام و برحسب متر است.  $\rho_i$  میانگین چگالی در حلقه  $\bar{t}$  ام،  $a_i$  و  $b_i$  به ترتیب برابر با شعاع سطوح داخلی و خارجی در حلقه  $\bar{t}$  ام و  $n$  برابر با تعداد حلقه در نظر گرفته است.

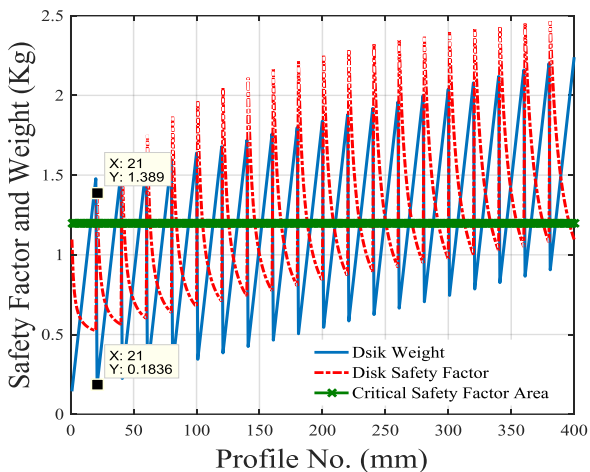
#### ۷- دیسک دوجانه با پروفیل ضخامت سوراخ پله ای

در این بخش تحلیل تنش های دیسک دوجانه با تعریف پروفیل خاصی شامل یک سوراخ عمودی با تغییر ناگهانی ضخامت مقطع





شکل ۲۵ بررسی میزان جرم و ضریب اطمینان دیسک دوجانه به ازای پروفیل های پله مختلف



شکل ۲۶ حالت بهینه جرم و ضریب اطمینان مناسب برای دیسک دوجانه به ازای پروفیل های پله مختلف

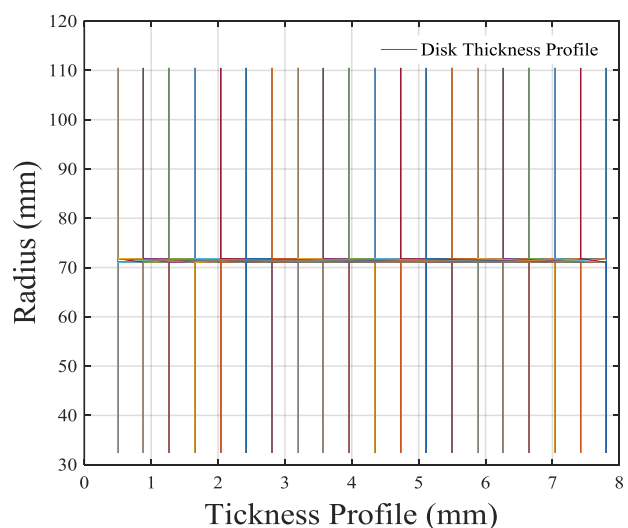
در شکل ۲۷ نمودار توزیع تنش شعاعی پروفیل های پله مختلف بررسی شده با هندسه های مختلف برای دیسک توربین حاکی از این است که هرچه میزان اختلاف ضخامت ناگهانی موجود در سطح میانی بیشتر شود منجر به افزایش شدید و ناگهانی تنش ها در سطح میانی شده و تنش در سطوح داخلی و خارجی برابر با مقادیر تنش ناشی از شرایط مرزی مسئله است. همچنین محدوده تنش ها به وضوح نشان دهنده اهمیت انتخاب پروفیل بهینه به منظور بهبود نتایج حاصل می باشد. همان طور که در این نمودار مشخص است در برخی حالات تنش شعاعی بیشینه تا ۶ برابر بیشینه تنش شعاعی در حالت بهینه است که انتخاب این پروفیل ها می تواند منجر به شکست سازه گردد.

مطرح بوده و باید در حداقل مقدار ممکن محاسبه شود. حداقل ضریب اطمینان دیسک ۱/۲ می باشد.

با کد نویسی روابط ارائه شده برای محاسبه حالات تنش دیسک دوجانه با پروفیل پله با استفاده از روش مانسون و بررسی تمامی پروفیل های مفروض (۴۰۰ حالت هندسی مختلف) و اعمال قیود بهینه سازی، بهترین هندسه پله با جرم کمینه و محدودیت های مقید محاسبه شده است. همچنین با ایجاد فضای لازم بر روی دیسک دوجانه مفروض خنک سازی انجام گرفته و برای پروفیل بهینه، تغییرات ایجاد شده در حالات تنش و بهبود بیشتر نتایج پس از خنک کاری و در نتیجه کاهش سطوح دما بررسی می شود. جرم دیسک دوجانه برای هندسه های مختلف با استفاده از کد نویسی در نرم افزار متلب به دست آمده است.

پس از کد نویسی و بررسی های انجام شده برای تمامی حالات حالت بهینه به دست آمده و در ادامه نتایج حاصل از تحلیل و بررسی اثر خنک سازی بر نتایج حالت بهینه ارائه شده است. در شکل ۲۴ نمودار توزیع ضخامت پروفیل های پله مختلف بررسی شده با هندسه های مختلف برای دیسک توربین دوجانه همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ نشان داده شده است.

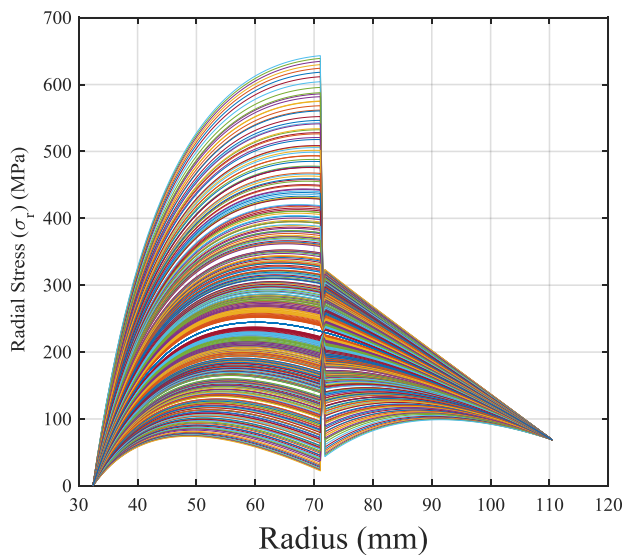
در شکل ۲۵ نمودار نتایج جرم و ضریب اطمینان پروفیل های پله مختلف بررسی شده با هندسه های مختلف برای دیسک توربین دوجانه همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ نشان داده شده است. با توجه به قیود طراحی مطرح شده کمترین جرم با ضریب اطمینان معتبر به عنوان نتیجه بهینه معرفی شده که موقعیت مقادیر بهینه جرم و ضریب اطمینان در شکل ۲۶ نشان داده شده است.



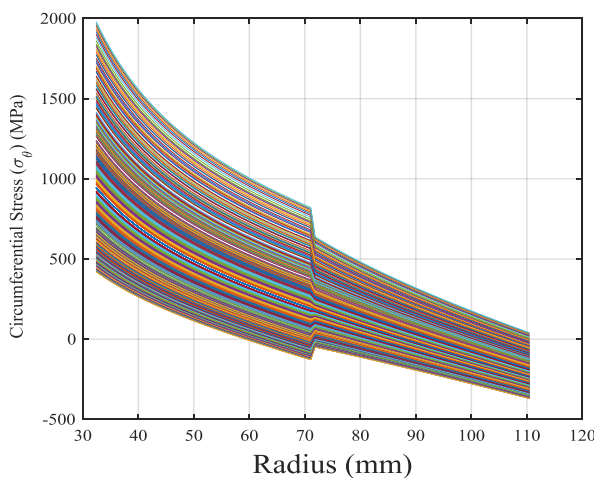
شکل ۲۴ پروفیل های پله مختلف بررسی شده برای دیسک دوجانه



سازی دمای سطح داخلی از ۱۵۰ به ۱۰۰ درجه سانتی گراد و سطح خارجی از ۵۰۰ به ۳۰۰ درجه سانتی گراد تقلیل یافته است. از سوی دیگر بدیهی است خنک کاری تنها بر خواص حرارتی تأثیر گذار بوده است و تأثیری بر میزان جرم نهایی دیسک دوجانه ندارد. تغییر ناگهانی تنش در نزدیکی مختصات ۷۰ میلی متری شعاع ناشی از تغییر ناگهانی ضخامت پروفیل پله بوده و به خاطر کاهش ضخامت در این سطح این تغییر ناگهانی افزایشی می باشد. نتایج حاکی از افت کلی نواحی تنش پس از خنک کاری و بهبود بیشتر ضریب اطمینان است. شدت این افت تنش در نواحی نزدیک به سطح خارجی بیش از سطح داخلی هست.



شکل ۲۷ نمودار توزیع تنش شعاعی برای دیسک دوجانه به ازای پروفیل های پله مختلف



شکل ۲۸ نمودار توزیع تنش محیطی برای دیسک دوجانه به ازای پروفیل های پله مختلف

در شکل ۲۸ نمودار توزیع تنش محیطی پروفیل های پله مختلف بررسی شده با هندسه های مختلف برای دیسک توربین دوجانه همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ نشان داده شده است. در اینجا نیز اثر انتخاب پروفیل مناسب در نتایج به وضوح نشان داده شده است. به نحوی که نشان داده شده است که انتخاب پروفیل نامناسب می تواند منجر به افزایش شدید تنش در سطح داخلی تا حتی بیش از ۵ برابر به نسبت دیسک با وب یگانه گردد. در اینجا نیز سطح بحرانی سطح داخلی است.

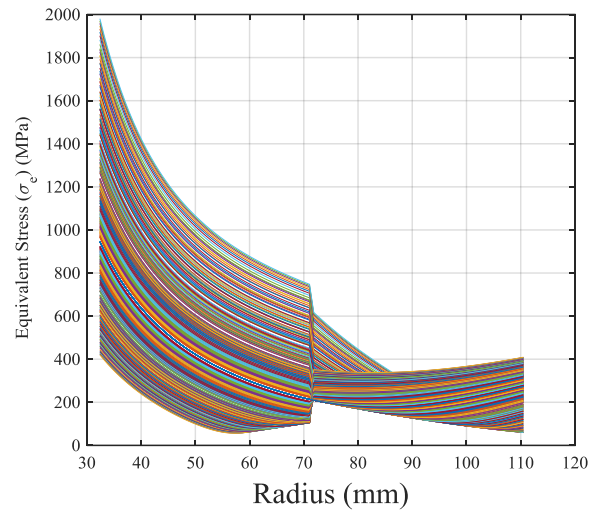
در شکل ۲۹ نمودار توزیع تنش معادل پروفیل های پله مختلف بررسی شده با هندسه های مختلف برای دیسک توربین دوجانه همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ با استفاده از معیار وون میز نشان داده شده است. در اینجا نیز اهمیت بالای انتخاب پروفیل مناسب در نتایج به راحتی قابل مشاهده است و این که هرچه گرادیان ضخامت ناحیه سوراخ در پروفیل شدیدتر باشد اختلاف تنش بین سطوح داخلی و خارجی بیشتر شده است که در طراحی بایستی به آن توجه شود.

در شکل ۳۰ نمودار توزیع ضریب اطمینان پروفیل های پله مختلف بررسی شده با هندسه های مختلف برای دیسک توربین دوجانه همگن از جنس اینکونل ۷۱۸ نشان داده شده است. نمودار نشان دهنده این است که بیش از نیمی از حالات تحلیل شده در سطح داخلی ضریب اطمینانی کمتر از حد قابل قبول طراحی داشته و حتی در صورتی که دارای جرم کمینه در بین این حالات باشد غیر قابل پذیرش می باشند.

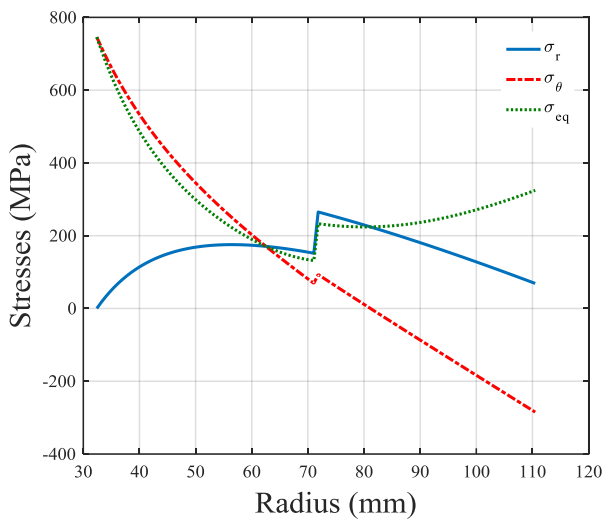
شکل ۳۱ پروفیل پله به دست آمده در حالت بهینه و شکل ۳۲ نمای سه بعدی برش خورده دیسک دوجانه با پروفیل ضخامت پله بهینه را نشان می دهند. در شکل ۳۳ نمودار توزیع تنش های پروفیل پله بهینه به دست آمده نشان داده است. نتایج کاهش تنش و وزن و بهبود ۲۷ درصدی ضریب اطمینان در حالت دوجانه را در قیاس با دیسک با وب یگانه نشان می دهد که نشانگر بهبود کلیه خواص مد نظر طراحی و ضرورت امکان سنجی برای ساخت نمونه اولیه به منظور تحلیل های تجربی و ثانویه را به وضوح نشان می دهد. در حالت بهینه ضریب اطمینان برابر با ۱/۳۸۹ و جرم دیسک برابر با ۳۶۷ گرم به دست آمده است که کاهش بیش از ۸ برابری جرم در قیاس با حالت دیسک با وب یگانه را نتیجه می دهد. همچنین در شکل های ۳۴ تا ۳۷ نمودارهای توزیع تنش شعاعی، محیطی، معادل و ضریب اطمینان دیسک قبل و بعد از انجام خنک سازی مورد مقایسه قرار گرفته است. لازم به ذکر است تغییرات ناگهانی در نمودارهای تنش و ضریب اطمینان به سبب ایجاد تغییرات ناگهانی در هندسه مسأله (شامل ضخامت) ایجاد شده است. پس از خنک



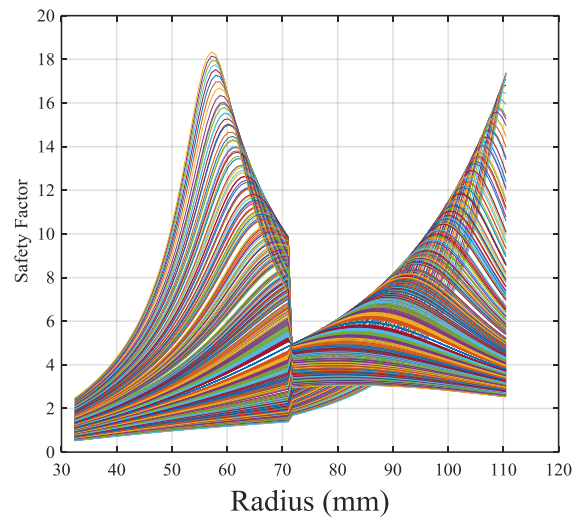
شکل ۳۲ نمای سه بعدی برش خورده دیسک دوجانه با پروفیل ضخامت پله بهینه



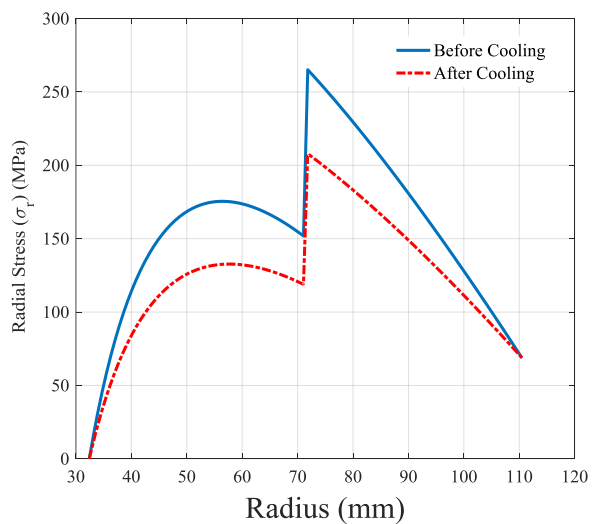
شکل ۲۹ نمودار توزیع تنش معادل برای دیسک دوجانه به ازای پروفیل های پله مختلف



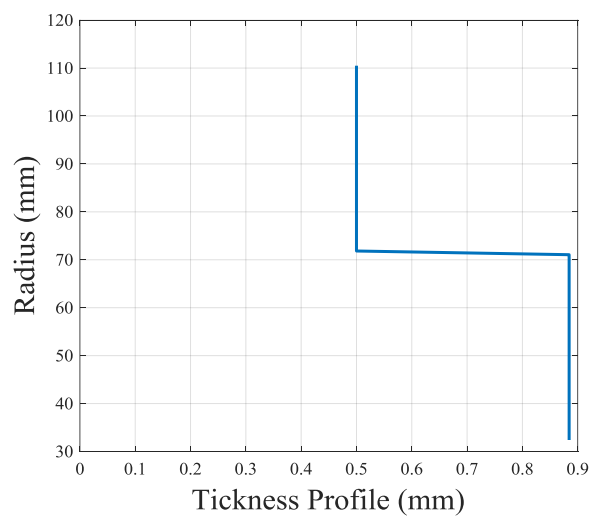
شکل ۳۳ نمودار توزیع تنش ها برای دیسک دوجانه به ازای پروفیل پله بهینه



شکل ۳۰ نمودار توزیع ضریب اطمینان برای دیسک دوجانه به ازای پروفیل های پله مختلف



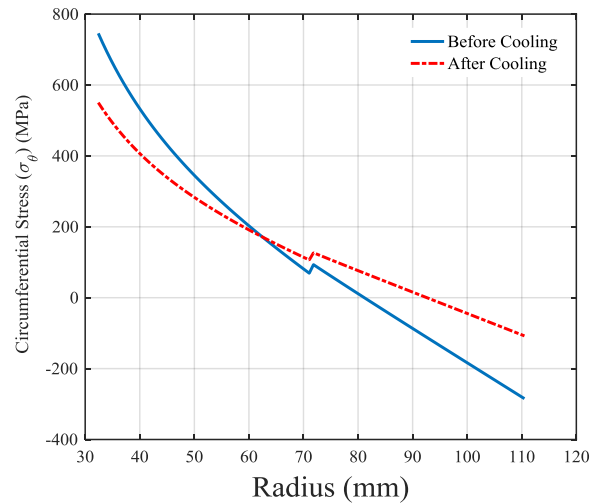
شکل ۳۴ نمودار توزیع تنش شعاعی برای دیسک دوجانه به ازای پروفیل های پله بهینه قبل و بعد از خنک سازی



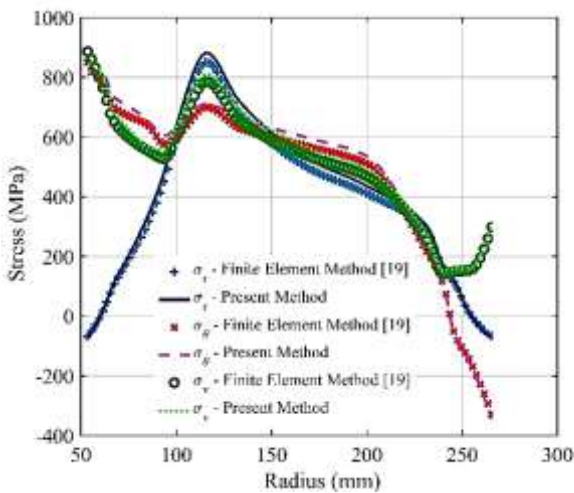
شکل ۳۱ نمودار توزیع پروفیل ضخامت دیسک دوجانه به ازای پروفیل های پله بهینه

### ۸- صحت سنجی نتایج و دقت مدل پیشنهادی

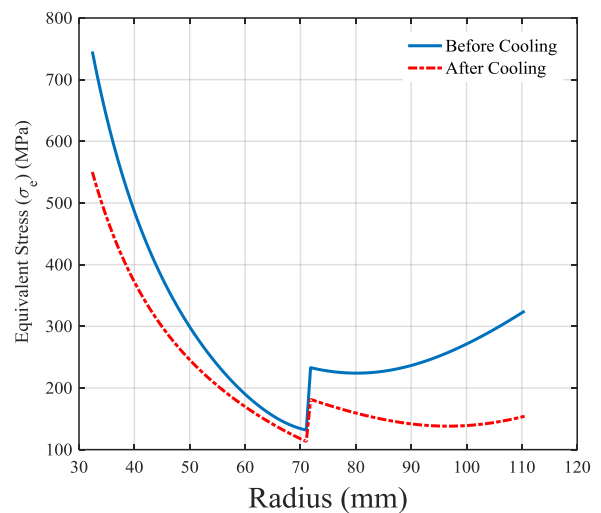
به منظور بررسی و بیشتر و حصول اطمینان از دقت نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی در پژوهش حاضر، مدل سازی و تحلیل دیسک دو جانه مورد بررسی در پژوهش صورت گرفته توسط ژانگ و همکاران [۱۹] با استفاده از روش حاضر به دست آمده است. همچنین هندسه بهینه با در نظر گرفتن اهداف پژوهش مرجع [۱۹] به دست آمده است. مقایسه نتایج مربوط به توزیع میانگین مؤلفه‌های تنش از شعاع داخلی تا شعاع خارجی در دیسک دو جانه مفروض در هندسه اولیه و هندسه بهینه به دست آمده در پژوهش حاضر و مرجع [۱۹] به ترتیب در شکل‌های ۳۸ و ۳۹ نشان داده شده است.



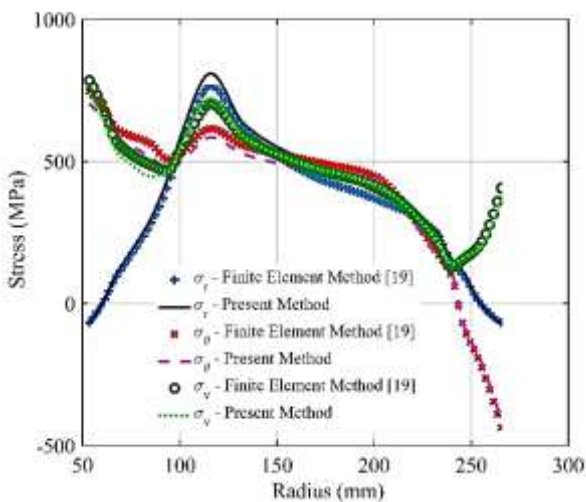
شکل ۳۵ نمودار توزیع تنش محیطی برای دیسک دو جانه به ازای پروفیل‌های پله بهینه قبل و بعد از خنک سازی



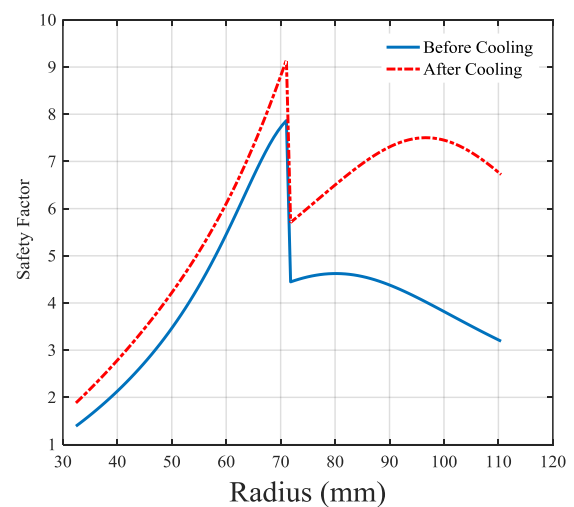
شکل ۳۸ مقایسه میانگین توزیع مؤلفه‌های تنش در دیسک دو جانه اولیه بررسی شده در پژوهش [۱۹]



شکل ۳۶ نمودار توزیع تنش معادل برای دیسک دو جانه به ازای پروفیل‌های پله بهینه قبل و بعد از خنک سازی



شکل ۳۹ مقایسه میانگین توزیع مؤلفه‌های تنش در دیسک دو جانه بهینه به دست آمده در پژوهش [۱۹]



شکل ۳۷ نمودار توزیع ضریب اطمینان برای دیسک دو جانه به ازای پروفیل‌های پله بهینه قبل و بعد از خنک سازی

[2] Cairo, R. R., "Twin-web rotor disk", *US Patent* 5,961,287, (1999).

[3] Cairo, R. R., Sargent, K. A., "Twin web disk: a step beyond convention, *Journal of engineering for gas turbines and power*", Vol. 124, pp. 298-302, (2002).

[4] Lu, S., Li, L. W., "Twin-web structure optimization design for heavy duty turbine disk based for aero-engine", *Journal of Propulsion Technology*, Vol.5, pp. 6-34, (2011).

[5] Yong-xian, L.U.A.N., "Structure Strength Analysis of Dual-web Turbine Disk", *Aeroengine*, Vol. 38, No.5, pp. 38-41, (2012).

[6] Shen, X., Dong, S., Chen, Z., "Research of an advanced turbine disk for high thrust-weight ratio engine", *Turbine Technical Conference and Exposition, ASME Turbo Expo*, V07AT28A006-V07AT28A006, (2014).

[7] Dogonchi, A., Ganji, D., "Investigation of heat transfer for cooling turbine disks with a non-Newtonian fluid flow using DRA", *Case Studies in Thermal Engineering*, Vol. 6, pp. 40-51, (2015).

[8] Qi, X. D., Shen, X. L., "Multidisciplinary design optimization of turbine disks based on ANSYS Workbench platforms", *Proc Eng.*, Vol. 99, No.1, pp. 1275-1283, (2015).

[9] Vasilyev, B., Salnikov, A., Semenov, A., Magerramova, L., "Twin-web turbine disks: part1-design and analysis of their efficiency, *Proceedings of ASME Turbo Expo 2018*", *Turbomachinery Technical Conference and Exposition, GT2018*, Oslo, Norway, GT2018-76306, June 11-15, (2018).

[10] Vasilyev, B., Magerramova, L., Salnikov, A., Tsykunov, N., Isakov, V., Semenov, A., "Twin-web turbine disks: part2-Fabrication and processing", *Proceedings of ASME Turbo Expo 2018, Turbomachinery Technical Conference and Exposition, GT2018*, Oslo, Norway, GT2018-76310, June 11-15, (2018).

[11] Long, K., Wang, X., Liu, H. J. S., "Stress-constrained topology optimization of continuum structures subjected to harmonic force excitation using sequential quadratic programming", *Struct Optim.*, Vol. 59, No. 5, pp. 1747-1759, (2019).

[12] Giraldo-Londono, O., Paulino, G. H., "PolyDyna: a Matlab implementation for topology optimization of structures subjected to dynamic loads", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 64, No. 2, pp. 957-990, (2021).

[13] Shen, X., Hu, W., Dong, S., "Multidisciplinary and multifidelity optimization for twin-web turbine disc

مقایسه نتایج به دست آمده از تحلیل دیسک مفروض با استفاده از روش پژوهش حاضر و روش مبتنی بر اجزای محدود بکار رفته در مرجع [۱۹] حداکثر خطای ۳/۸ درصدی در تخمین تنش‌ها دیسک دو جانه با هندسه اولیه و حداکثر خطای ۵/۴ درصدی در تخمین تنش‌های مربوط به حالت بهینه را نشان می‌دهد. مقایسه نتایج به دست آمده به خوبی دقت و اعتبار نتایج به دست آمده با استفاده از روش بکار رفته در پژوهش حاضر را تأیید می‌کند و می‌توان از این روش با سرعت بسیار بالاتر نسبت به روش‌های مبتنی بر اجزای محدود به منظور تحلیل رفتار دیسک‌های با ضخامت متغیر نظیر دیسک‌های دو جانه بهره‌مند شد.

## ۹- نتیجه‌گیری

به‌طور کلی نتایج به دست آمده برای دیسک دوجانه در ۴۰۰ حالت هندسی مختلف نشان داد که تنها استفاده از این ایده برای بهبود نتایج از جمله جرم کافی نیست و در برخی حالات در قیاس با حالت اولیه نتایج بسیار بدتر شده و برخی حالات بهبود جزئی ولی ناچیز یافته و تنها در تعداد اندکی از حالات بهبودها چشمگیر و قابل توجه است. همین امر ضرورت استفاده از روش بهینه‌سازی در یافتن هندسه مناسب برای طراحی را نشان می‌دهد. در حالت بهینه به دست آمده در قیاس با هندسه و ماده اولیه که هندسه ای پله مانند بود جرم نهایی بیش از ۸۸ درصد کاهش یافت که کاهش چشمگیر جرم دیسک در اثر بهینه‌سازی و تبدیل دیسک تک جانه به دوجانه بهینه را نشان می‌دهد. همچنین ضریب اطمینان نیز قبل از خنک کاری در حدود ۳۰ درصد و پس از اعمال خنک کاری بیش از ۷۲ درصد بهبود یافت. همچنین پس از خنک کاری نیز کاهش بیشتر تنش در تمامی سطوح شعاعی، محیطی و معادل و در نتیجه بهبود ضریب اطمینان دیسک به دست آمد که اهمیت بالای مبحث خنک کاری سازه دیسک را نشان می‌دهد. همچنین پس از خنک کاری نیز کاهش بیشتر تنش در تمامی سطوح شعاعی، محیطی و معادل و در نتیجه بهبود ضریب اطمینان دیسک به دست آمد که اهمیت بالای مبحث خنک کاری سازه دیسک را نشان می‌دهد.

## ۱۰- تشکر و قدردانی

نویسندگان این مقاله مراتب سپاس و قدردانی خود را از دکتر محمدرضا کارآموز جهت راهنمایی‌های ارزنده ابراز می‌نمایند.

## ۱۱- مراجع

[1] Zhang, M., Gou, W., Li, L., Wang, X., Yue, Z., "Multidisciplinary design and optimization of the twin-web turbine disk", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 53, pp. 1129-1141, (2016).

- [17] Vullo, V., Vivio, F., "Rotors: Stress analysis and design, Springer Science & Business Media", (2013).
- [18] Halliwell, I., Exoskeletal engine concept: Feasibility studies for medium and small thrust engines, Glenn Research Centrt, (2001).
- [19] Zhang, M., Qin Y., Shouyi S., Lei L., Xu H., "An efficient strategy for reliability-based multidisciplinary design optimization of twin-web disk with non-probabilistic model", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 82, pp. 546-572, (2020).
- [14] Wang, B., Wang, G., Huang, L., Xu, S., Tian, K., "On the preliminary shape design of axisymmetric twin-web turbine discs considering the burst speed constraint", *Eng Optimiz*, Vol. 1, No. 1, pp. 1-16, (2021).
- [15] Wang, B., Wang, G., Shi, Y., Huang, L., Tian, K., "Stress-constrained thermo-elastic topology optimization of axisymmetric disks considering temperature-dependent material properties", *Mech Adv Mater Struc*. Vol. 1, No. 1, pp. 1-17, (2021).
- [16] Song, J., Zhang, Y., Guo, X., Gao, H., Wen, W., Cui, H., "Topology and shape optimization of twin-web turbine disk", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 65, No.2, pp. 1-20, (2022).