

## تحلیل کمانش مرتبه بالای استوانه‌های ساندویچی مرکب

**چکیده:** در این مقاله، تحلیل کمانش استوانه ساندویچی مرکب با هسته انعطاف‌پذیر بر مبنای تئوری مرتبه بالای پنل های ساندویچی ارتقا یافته مورد بررسی قرار می‌گیرد. رویه‌های استوانه ساندویچی از جنس مواد مرکب لایه‌ای ساخته شده‌اند که لایه‌چینی آنها بصورت متقارن و پادمقارن می‌باشد. مدل مورد مطالعه تحت بارگذاری محوری فشاری و فشار خارجی قرار داد. از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی و مدل دوم فروستینگ به ترتیب برای میدان‌های جابجایی رویه‌ها و هسته استفاده می‌شود. برای استخراج معادلات حاکم بر کمانش استوانه ساندویچی مرکب از اصل همپلتون استفاده شده‌است. برای حل معادلات حاکم، از روش گالرکین استفاده شده است. در این پژوهش، اثر پارامترهای مهمی هم‌چون نسبت شعاع هسته به ضخامت استوانه، نسبت طول به ضخامت استوانه، نسبت ضخامت رویه به ضخامت استوانه و اثر نسبت طول استوانه به شعاع هسته بر روی پاسخ کمانش استوانه ساندویچی مرکب مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که با کاهش نسبت ضخامت رویه به ضخامت استوانه، نسبت طول استوانه به شعاع هسته و با افزایش نسبت شعاع هسته به ضخامت استوانه، نیروی کمانش استوانه‌های ساندویچی مرکب افزایش می‌یابد.

**واژه های راهنما:** کمانش، استوانه ساندویچی مرکب، IHSAPT، روش گالرکین، بار محوری فشاری و فشار خارجی.

### مصطفی لیوانی\*

استادیار، دانشکده مهندسی  
هوافضا، دانشگاه علوم و فنون  
هوایی شهید ستاری، تهران

### کرامت ملک‌زاده‌فرد

استاد، مجتمع دانشگاهی هوافضا،  
دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر،  
تهران

### علی نگهبان‌برون

استادیار، دانشکده مهندسی  
هوافضا، دانشگاه علوم و فنون  
هوایی شهید ستاری، تهران

مقاله علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۰/۰۹/۰۸

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۳۰

### Mostafa Livani\*

Assistant Professor,  
Department of  
Aerospace Engineering  
Shahid Sattari  
Aeronautical University  
of Science and  
Technology, Tehran

### Keramat MalekzadehFard

Professor, Space  
Research Institute,  
MalekAshtar University  
of Technology, Tehran

### Ali Negahban Boron

Assistant Professor,  
Department of  
Aerospace Engineering  
Shahid Sattari  
Aeronautical University  
of Science and  
Technology, Tehran

## High order buckling analysis of composite sandwich cylinders

**Abstract:** In this paper, buckling analysis of composite sandwich cylinders with transverse flexible core is investigated using an improved higher order sandwich panel theory (IHSAPT). The face sheets of sandwich cylinder are made of laminate composite that lay up symmetric and anti-symmetric. The case study is under axial compression load and external pressure. The first order shear deformation theory and second Frostig's model is proposed for deriving displacement field of face sheets and core, respectively. Lagrange's principle considering initial stresses is used for extracting governing equations. The Buckling problem of the shell has been numerically solved by using the Galerkin's method. In this research, the effects of some important parameters including core radius to cylinder thickness ratio, length to core thickness ratio, face sheet to cylinder thickness ratio and length to core radius ratio on the buckling response of composite sandwich cylinder are studied. The obtained results indicate that by decreasing face sheet to cylinder thickness ratio and length to core radius ratio, and increasing core radius to cylinder thickness ratio buckling load of composite sandwich cylinder are increased.

**Keywords:** Buckling, Composite sandwich cylinder, IHSAPT, Galerkin's method, Axial compression load and external pressure.

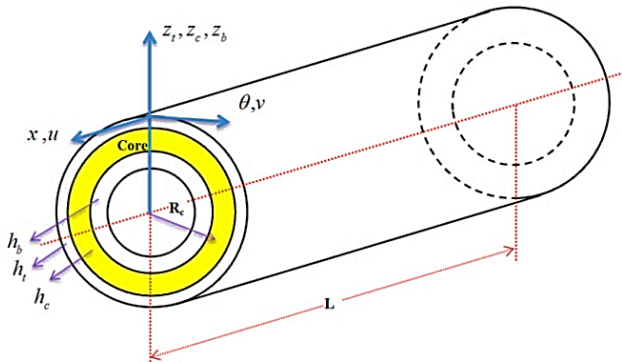
## ۱- مقدمه

متفاوت می‌باشد. البته واضح است که تحت شرایطی امکان مشاهده همزمان پدیده‌های کمانش کلی و کمانش موضعی وجود دارد که به آن مود ترکیبی گفته می‌شود [۲]. در ادامه پژوهش‌های انجام شده در سال‌های اخیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

خلیلی و همکارانش در سال ۲۰۱۴، با ارائه یک مدل مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی، تحلیل پنل‌های استوانه‌ای ساندویچی کامپوزیتی تحت ضربه سرعت پایین را مورد مطالعه قرار دادند [۳]. صیدی و همکارانش در سال ۲۰۱۵، با استفاده از تئوری مرتبه بالا، تحلیل غیرخطی کمانش ورق‌های مخروطی ساندویچی با رویه‌های FG و هسته همگن تحت نیروی حرارتی را مطالعه کردند. آنها از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول برای رویه‌ها و تابع درجه سوم برای هسته بهره بردند [۴]. لوپاتین و موروزف در سال ۲۰۱۵، کمانش ورق‌های استوانه‌ای ساندویچی مرکب را تحت فشار خارجی یکنواخت مورد بررسی قرار دادند [۵]. لیوانی و همکاران در سال ۲۰۱۶، تحلیل فلاتر پنل‌های ساندویچی دوانحنیه با ضخامت متغیر تحت بارگذاری آیرودرئومکانیکی مطالعه کردند. در مدل ارائه شده توسط آنها، شرایط پیوستگی تنش برشی عرضی، تنش نرمال عرضی و گرادیان تنش نرمال عرضی در فصل مشترک رویه‌ها با هسته، همچنین شرایط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی روی سطوح خارجی رویه‌ها ارضا شد [۶]. شاهقلیان و رحیمی در سال ۲۰۱۹، کمانش ورق‌های ساندویچی مشبک مرکب تحت بارگذاری تک محوره بر مبنای تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها برای حل معادلات از روش ریلی‌ریتز استفاده کردند و با ایجاد یک مدل سه‌بعدی در نرم‌افزار آباکوس از نتایج بدست آمده از آن برای اعتبارسنجی بهره بردند [۷]. پن و همکاران در سال ۲۰۲۰، کمانش محلی استوانه ساندویچی مرکب روی بستر پاسترناک را تحت بارگذاری محوری بصورت تجربی و تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. آنها از تئوری مرتبه اول ریزنر برای استخراج معادلات در بخش تحلیلی بهره بردند [۸]. زارعی و همکاران در سال ۲۰۲۰، تحلیل کمانش کلی ورق‌های ساندویچی مخروطی با هسته‌های مشبک را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول انجام دادند. آنها برای حل معادلات خود از روش گالرکین بهره بردند و برای اعتبارسنجی از نرم‌افزار آباکوس استفاده کردند [۹]. اوربول بابلین و بیساگنی در سال ۲۰۲۱، تحلیل کمانش ورق‌های استوانه‌ای ساندویچی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی برای استخراج معادلات خود بهره بردند [۱۰]. ژیانو و همکاران در سال ۲۰۲۱، تحلیل کمانش کلی ورق‌های ساندویچی لانه زنبوری

امروزه استفاده از سازه‌های سبک و مقاوم که دارای نسبت سفتی به وزن و استحکام به وزن بالایی هستند، در مصارف مهندسی از جمله بدنه اجسام پرنده مانند هواپیماها، موشک‌ها و فضاپیماها، بدنه کشتی‌ها، قطارها و خودروها، سقف‌ها، دیواره‌ها، تیرهای ساختمانی، ستون‌ها و پل‌ها و مصارف عمده دیگر بسیار رایج و متداول شده‌است. از جدیدترین و رایج‌ترین سازه‌های مستحکم و سبک مهندسی، تیرها، ورق‌ها، استوانه‌ها و مخروط‌های ساندویچی می‌باشند. یک سازه ساندویچی متشکل از دو رویه‌ی نازک و مستحکم است که یک هسته‌ی نرم، انعطاف‌پذیر و نسبتاً ضخیم را در بر گرفته‌اند.

در هر سازه‌ای بارهای مختلفی بر اجزای سازه وارد می‌شود. در میان بارهای وارد بر اجزای سازه، بارهای محوری فشاری به دلیل ایجاد ناپایداری هندسی، حتی قبل از رسیدن به حد تسلیم بسیار مورد توجه طراحان قرار می‌گیرد. هنگامی که یک سازه اعم از ستون یا ورق در معرض بار فشاری محوری قرار می‌گیرد، از نظر بارگذاری موقعیتی وجود دارد که اگر مقدار بار به اندازه بسیار کوچکی افزایش یابد، باعث ایجاد تغییرشکل عرضی بزرگی در سازه می‌گردد. به این تغییرشکل ناگهانی در اثر اعمال بار فشاری، کمانش و بار متناظر با آن را بار بحرانی کمانش می‌گویند. کمانش پدیده‌ای است که باعث ایجاد تغییرشکل‌های نامطلوب و یا حتی واماندگی در سازه‌ها می‌گردد. لذا محاسبه بارهای بحرانی کمانش در سازه‌های مختلف، از جمله مهم‌ترین موضوعاتی است که دانشمندان و مهندسين هوافضا، مکانیک و عمران به آن پرداخته‌اند. با توجه به استفاده روزافزون از سازه‌های مرکب و ساندویچی، بررسی پدیده کمانش در این سازه‌ها بیش از پیش اهمیت پیدا کرد. کمانش ورق‌های ساندویچی بطور معمول به دو شکل متفاوت رخ می‌دهد. در نوع اول کمانش کل ورق مدنظر قرار می‌گیرد که به این نوع کمانش، کمانش کلی گویند. در این نوع کمانش، ورق ساندویچی همچون یک ورق یکپارچه ساخته شده از یک ماده همگن رفتار می‌کند، یعنی هسته و رویه‌ها دارای رفتار و پاسخ مشابهی نسبت به بار فشاری صفحه‌ای خواهند داشت. در سازه‌های ساندویچی ممکن است در اثر آسیب‌های حین ساخت یا ضربه و یا عوامل دیگر، هنگامی که تحت بارگذاری فشاری قرار دارند، بدلیل تفاوتی که میان خواص مکانیکی و هم-چنین هندسه هسته و رویه‌ها وجود دارد، بجای کمانش کلی در سازه، باعث ایجاد کمانش موضعی و چروکیدگی در رویه‌ها شود که این نوع دوم کمانش ورق‌های ساندویچی است [۱]. در چروکیدگی برخلاف کمانش کلی، رفتار رویه‌ها و هسته با یکدیگر



شکل ۱ هندسه استوانه ساندویچی مرکب مورد مطالعه

بر طبق تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، جابجایی‌های  $u$  و  $v$  رویه‌ها در جهت محورهای  $x$  و  $\theta$  با فرض جابجایی‌های خطی کوچک بصورت زیر می‌باشند [۱۴]:

$$\begin{aligned} u_i(x, \theta, z) &= u_0^i(x, \theta) + z_i \psi_x^i(x, \theta) \\ v_i(x, \theta, z) &= v_0^i(x, \theta) + z_i \psi_\theta^i(x, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

جایی که  $\psi_x^i$  و  $\psi_\theta^i$  مؤلفه‌های چرخش عمود عرضی حول محورهای  $x$  و  $\theta$  صفحه‌های میانی رویه‌های بالایی و پایینی  $z_i$  و مختصه عمودی هر رویه است ( $i = t, b$ ) که همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود از صفحه میانی هر رویه به سمت بالا اندازه‌گیری می‌شوند. روابط سینماتیک رویه‌ها بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^i &= \varepsilon_{0xx}^i + z_i \kappa_{xx}^i \\ \varepsilon_{\theta\theta}^i &= \varepsilon_{0\theta\theta}^i + z_i \kappa_{\theta\theta}^i \\ \varepsilon_{zz}^i &= 0 \\ \gamma_{x\theta}^i &= 2\varepsilon_{x\theta}^i = \varepsilon_{0x\theta}^i + z_i \kappa_{x\theta}^i \\ \gamma_{xz}^i &= 2\varepsilon_{xz}^i = \varepsilon_{0xz}^i \\ \gamma_{\theta z}^i &= 2\varepsilon_{\theta z}^i = \varepsilon_{0\theta z}^i \end{aligned} \quad (2)$$

جایی که:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0xx}^i &= \frac{\partial u_0^i}{\partial x} \\ \varepsilon_{0\theta\theta}^i &= \frac{\partial v_0^i}{R_i \partial \theta} \\ \varepsilon_{0x\theta}^i &= \frac{\partial v_0^i}{\partial x} + \frac{\partial u_0^i}{R_i \partial \theta} \\ \varepsilon_{0xz}^i &= \frac{\partial w_0^i}{\partial x} + \psi_x^i \\ \varepsilon_{0\theta z}^i &= \frac{\partial w_0^i}{R_i \partial \theta} + \psi_\theta^i - \frac{v_0^i}{R_i} \\ \kappa_{xx}^i &= \frac{\partial \psi_x^i}{\partial x} \\ \kappa_{\theta\theta}^i &= \frac{\partial \psi_\theta^i}{R_i \partial \theta} \\ \kappa_{x\theta}^i &= \frac{\partial \psi_x^i}{R_i \partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta^i}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

مرکب با ضریب پواسون منفی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از مدل صفحه معادل دو بعدی برای استخراج معادلات خود استفاده کردند [۱۱]. مهادا و یوریهان در سال ۲۰۲۱، به تحلیل اثر متقابل کمانش کلی و چین خوردگی محلی برای تیرهای ساندویچی پرداختند. آنها از یک مدل کاهش یافته دوبعدی برای استخراج معادلات استفاده کردند [۱۲]. ژای و همکاران در سال ۲۰۲۱، کمانش حرارتی و ارتعاش آزاد پیل‌های انحنادار ساندویچی را مورد رسیدگی قرار دادند. آنها برای بدست آوردن معادلات حاکم از روش تغییرشکل برشی مرتبه اول و اصل همپلتون بهره بردند و به روش نوین معادلات خود را حل کردند و برای اعتبارسنجی از نرم‌افزار انسیس استفاده کردند [۱۳].

در این مقاله تحلیل کمانش استوانه‌های ساندویچی مرکب متقارن و پادمتقارن با استفاده از تئوری بهبودیافته مرتبه بالای پیل‌های ساندویچی انجام می‌شود. تنش‌های درون صفحه‌ای هسته نیز در نظر گرفته شده‌اند. معادلات منته‌جه‌های تنش بصورت دقیق و با در نظر گرفتن ترم  $(1 + z_c/R_c)$  در معادلات استخراج شده است. از این تئوری برای اولین بار برای تحلیل کمانش استوانه‌های ساندویچی مرکب استفاده شده است. شرایط مرزی ساده و گیردار برای استوانه در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش گالرکین استخراج می‌گردند. نتایج عددی تحلیل حاضر با مدل المان محدود نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. اثر پارامترهای مختلف شامل نسبت شعاع هسته به ضخامت استوانه، نسبت طول به ضخامت استوانه، نسبت ضخامت رویه به ضخامت استوانه و اثر نسبت طول استوانه به شعاع هسته بر روی کمانش استوانه‌های ساندویچی مرکب متقارن و پادمتقارن با هسته انعطاف‌پذیر مطالعه شده است.

## ۲- استخراج معادلات حاکم

در این بخش، در ابتدا مدل هندسی مورد مطالعه ارائه می‌گردد، سپس تئوری مورد استفاده ارائه می‌شود، بعد از آن شرایط سازگاری جابجایی‌ها و تنش بیان می‌شود و در انتهای این بخش، معادلات حاکم بر تحلیل کمانش مرتبه بالای استوانه‌های ساندویچی مرکب استخراج خواهد شد.

مدل هندسی مورد مطالعه در این مقاله عبارت است از استوانه ساندویچی مرکب که از دو رویه مواد مرکب لایه‌ای تشکیل شده است (شکل ۱). ضخامت رویه‌های بالایی و پایینی و هسته به ترتیب برابر با مقادیر ثابت  $h_c, h_b, h_t$  می‌باشد. طول استوانه مورد مطالعه برابر با  $L$ ، شعاع صفحه میانی هسته برابر با  $R_c$  و ضخامت کل برابر با  $h$  است.

$$w_1^c = \frac{w_0^t - w_0^b}{h_c}$$

$$w_2^c = \frac{2(w_0^t + w_0^b) - 4w_0^c}{h_c^2}$$

در رابطه (۷) مشهود است که تعداد مجهولات هسته به پنج عدد کاهش پیدا کرده است که آنها عبارتند از  $u_0^c$ ،  $u_1^c$ ،  $v_0^c$  و  $v_1^c$ . بنابراین تعداد کل مجهولات برای استوانه ساندویچی مرکب برابر ۱۵ عدد می شود که عبارتند از  $u_0^t$ ،  $u_0^b$ ،  $u_1^t$ ،  $u_1^b$ ،  $u_2^t$ ،  $u_2^b$ ،  $u_3^t$ ،  $u_3^b$ ،  $v_0^t$ ،  $v_0^b$ ،  $v_1^t$ ،  $v_1^b$ ،  $v_2^t$ ،  $v_2^b$ ،  $v_3^t$ ،  $v_3^b$  و  $w_0^c$ .

## ۲-۱- اصل همیلتون

برای استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده می شود، بر اساس این اصل:

$$\int \delta L dt = \int (-\delta U + \delta W_{ext}) dt = 0 \quad (۸)$$

که در آن  $\delta U$  تغییرات انرژی کرنشی و  $\delta W_{ext}$  انرژی پتانسیل ناشی از بارگذاری اعمالی می باشد. همچنین  $\delta$  اپراتور تغییرات مرتبه اول است.

رابطه‌ی مربوط به تغییرات انرژی کرنشی برای رویه‌های بالایی و پایینی و هسته بصورت زیر می باشد:

$$\delta U = \sum_{i=t,b} \left\{ \int_{V_i} (\sigma_{xx}^i \delta \varepsilon_{xx}^i + \sigma_{\theta\theta}^i \delta \varepsilon_{\theta\theta}^i + \tau_{x\theta}^i \delta \gamma_{x\theta}^i + \tau_{xz}^i \delta \gamma_{xz}^i + \tau_{\theta z}^i \delta \gamma_{\theta z}^i) dV_i \right. \\ \left. + \int_{V_c} (\sigma_{xx}^c \delta \varepsilon_{xx}^c + \sigma_{\theta\theta}^c \delta \varepsilon_{\theta\theta}^c + \tau_{x\theta}^c \delta \gamma_{x\theta}^c + \tau_{xz}^c \delta \gamma_{xz}^c + \tau_{\theta z}^c \delta \gamma_{\theta z}^c) dV_c \right. \quad (۹)$$

که در آن:

$$dV_i = dA_i dz_i = R_i dx_i d\theta dz_i; (i = t, b)$$

$$dV_c = dA_c dz_c = \left(1 + \frac{z_c}{R_c}\right) R_c dx_c d\theta dz_c \quad (۱۰)$$

کار بارهای خارجی وارد بر پنل برابر است با مجموع فشارهای وارد بر سطح بالایی رویه بالایی ( $q_t$ )، سطح پایینی رویه پایینی ( $q_b$ ) و بارهای درون صفحه‌ای بر واحد طول در جهت محور  $x$  روی لبه‌های  $x_1 = 0$  و  $x_2 = L$  ( $\bar{N}_{xxj}$ ) که بصورت زیر قابل محاسبه می باشد ( $i = t, b$ ):

میدان‌های جابجایی برای هسته بر مبنای مدل دوم فروستینگ بصورت زیر می باشد:

$$u_c(x, \theta, z) = u_0^c(x, \theta) + z_c u_1^c(x, \theta) + z_c^2 u_2^c(x, \theta) + z_c^3 u_3^c(x, \theta) \quad (۴)$$

$$v_c(x, \theta, z) = \left(1 + \frac{z}{R_c}\right) v_0^c(x, \theta) + z_c v_1^c(x, \theta) + z_c^2 v_2^c(x, \theta) + z_c^3 v_3^c(x, \theta)$$

$$w_c(x, \theta, z) = w_0^c(x, \theta) + z_c w_1^c(x, \theta) + z_c^2 w_2^c(x, \theta)$$

روابط سینماتیک هسته با فرض تغییرشکل‌های کوچک بصورت زیر است:

$$\varepsilon_{xx}^c = \frac{\partial u_c}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^c = \frac{1}{(1 + z/R_c)} \left( \frac{\partial v_c}{R_c \partial \theta} + \frac{w_c}{R_c} \right) \quad (۵)$$

$$\gamma_{x\theta}^c = 2\varepsilon_{x\theta}^c = \frac{\partial v_c}{\partial x} + \frac{1}{(1 + z/R_c)} \frac{\partial u_c}{R_c \partial \theta}$$

$$\gamma_{xz}^c = 2\varepsilon_{xz}^c = \frac{\partial w_c}{\partial x} + \frac{\partial u_c}{\partial z}$$

$$\gamma_{\theta z}^c = 2\varepsilon_{\theta z}^c = \frac{1}{(1 + z/R_c)} \left( \frac{\partial w_c}{R_c \partial \theta} - \frac{v_c}{R_c} \right) + \frac{\partial v_c}{\partial z}$$

شرایط سازگاری با فرض اتصال کامل بین هسته و رویه‌ها بصورت زیر است:

$$u_c(z = z_{ci}) = u_0^i + \frac{1}{2} (-1)^k h_i \psi_x^i$$

$$v_c(z = z_{ci}) = v_0^i + \frac{1}{2} (-1)^k h_i \psi_\theta^i \quad (۶)$$

$$w_c(z = z_{ci}) = w_0^i$$

جایی که  $h_i$  ( $i = t, b$ ) ضخامت رویه‌های بالایی و پایینی است.  $k = 1$  زمانی که  $i = b$  و  $k = 0$  زمانی که  $i = t$ ، همچنین  $z_{ct} = h_c/2$  در فصل مشترک هسته و رویه بالایی و  $z_{cb} = -h_c/2$  در فصل مشترک هسته و رویه پایینی.

با استفاده از میدان‌های جابجایی هسته (رابطه (۴)) و شرایط سازگاری (رابطه (۶)) و ساده‌سازی، شرایط سازگاری بصورت زیر در می آید:

$$u_2^c = \frac{2(u_0^t + u_0^b) - h_t \psi_x^t + h_b \psi_x^b - 4u_0^c}{h_c^2}$$

$$u_3^c = \frac{4(u_0^t - u_0^b) - 2(h_t \psi_x^t + h_b \psi_x^b) - 4h_c u_1^c}{h_c^3}$$

$$v_2^c = \frac{2(v_0^t + v_0^b) - h_t \psi_\theta^t + h_b \psi_\theta^b - 4v_0^c}{h_c^2} \quad (۷)$$

$$v_3^c = \frac{4(v_0^t - v_0^b) - 2(h_t \psi_\theta^t + h_b \psi_\theta^b) - 4h_c v_1^c - 4h_c v_0^c / R_c}{h_c^3}$$

## ۳- حل معادلات حاکم

میدان‌های جابجایی استوانه‌های ساندویچی مرکب برای شرایط مرزی ساده بر مبنای سری فوریه دوگانه برای رویه‌ها و هسته بصورت زیر فرض می‌شود ( $k = 0, 1, 2, 3$  و  $l = 0, 1, 2$ ):

$$\begin{bmatrix} u_0^j(x, \theta) \\ v_0^j(x, \theta) \\ w_0^j(x, \theta) \\ \psi_x^j(x, \theta) \\ \psi_\theta^j(x, \theta) \\ u_k^c(x, \theta) \\ v_k^c(x, \theta) \\ w_l^c(x, \theta) \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U_{0mn}^j \cos(\alpha_m x) \cos(n\theta) \\ V_{0mn}^j \sin(\alpha_m x) \sin(n\theta) \\ W_{0mn}^j \sin(\alpha_m x) \cos(n\theta) \\ \Psi_{xmn}^j \cos(\alpha_m x) \cos(n\theta) \\ \Psi_{\theta mn}^j \sin(\alpha_m x) \sin(n\theta) \\ U_{kmn}^c \cos(\alpha_m x) \cos(n\theta) \\ V_{kmn}^c \sin(\alpha_m x) \sin(n\theta) \\ W_{lmn}^c \sin(\alpha_m x) \cos(n\theta) \end{bmatrix} \quad (13)$$

جایی که  $U_{0mn}^j$ ،  $V_{0mn}^j$ ،  $W_{0mn}^j$ ،  $\Psi_{xmn}^j$ ،  $\Psi_{\theta mn}^j$ ،  $U_{kmn}^c$ ،  $V_{kmn}^c$  و  $W_{lmn}^c$  ضرایب فوریه هستند. هم‌چنین  $m$ ، تعداد نیم موج‌ها در جهت  $x$  و  $n$ ، تعداد نیم موج‌ها در جهت  $\theta$  می‌باشند.

زمانی که شرایط مرزی استوانه گیردار باشد، در رابطه (۱۳)، تابع  $\cos(n\theta)$  باید با تابع  $\sin(n\theta)$  جایگزین شود.

برای بدست آوردن معادلات حاکم بر تحلیل کمانش استوانه‌های ساندویچی مرکب، از روش باقیمانده وزنی به شیوه توابع وزنی گالرکین استفاده می‌شود:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L ([\bar{L}]\{\phi\})\{\psi\} dx d\theta = \{0\} \quad (14)$$

جایی که  $[\bar{L}]$  ماتریس عمل‌گرهای دیفرانسیلی  $([\bar{L}]_{ij})$  است. هم‌چنین  $\{\phi\}$  بردار شکل موده‌های طبیعی و  $\{\psi\}$  بردار توابع وزنی هستند.

با قراردادی منتجه‌های تنش (رابطه (۱۲))، شرایط سازگاری (رابطه (۷)) و میدان‌های جابجایی (روابط (۱) الی (۵)) در معادلات حاکم و سپس بکارگیری روش گالرکین (رابطه (۱۴))، معادله استاندارد تحلیل کمانش به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$([C] - N_{cr}[K_g])\{c\} = \{0\} \quad (15)$$

$$\{c\} = \{U_{0mn}^j, V_{0mn}^j, W_{0mn}^j, \Psi_{xmn}^j, \Psi_{\theta mn}^j, U_{kmn}^c, V_{kmn}^c, W_{lmn}^c\}$$

جایی که  $[C]$  ماتریس سفتی،  $[K_g]$  ماتریس سفتی-هندسی و  $N_{cr}$  پارامتر کمانش می‌باشند. کوچکترین مقدار ویژه سیستم معادلات رابطه (۱۵) برابر با نیروی کمانش می‌باشد.

## ۴- اعتبارسنجی

در این بخش، نتایج بدست آمده از تئوری حاضر با نتایج مراجع دیگر اعتبارسنجی می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = \int_A \left\{ - \left( 1 + \frac{h_t}{2R_t} \right) q_t \delta w_0^t \right\} R_t dx d\theta \\ + \int_A \left\{ - \left( 1 + \frac{h_b}{2R_b} \right) q_b \delta w_0^b \right\} R_b dx d\theta \\ + \sum_{j=1}^2 \int_0^a \int_0^{2\pi} \bar{N}_{xxj}^i \delta u_0^i \delta_D(x - x_j) R_i dx d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

حال با قراردادی روابط (۱۱) و (۹) در رابطه (۸)، معادلات حاکم بر تحلیل کمانش استوانه ساندویچی مرکب استخراج می‌گردد.

منتجه‌های تنش بر واحد طول بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \{N_{xx}^c, N_{\theta\theta}^c, N_{x\theta}^c, N_{\theta x}^c\} \\ = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \left\{ \sigma_{xx}^c \left( 1 + \frac{z_c}{R_c} \right), \sigma_{\theta\theta}^c, \sigma_{x\theta}^c \left( 1 + \frac{z_c}{R_c} \right), \sigma_{x\theta}^c \right\} dz_c \\ \{M_{nxx}^c, M_{n\theta\theta}^c, M_{nx\theta}^c, M_{n\theta x}^c\} \\ = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} z_c^n \left\{ \sigma_{xx}^c \left( 1 + \frac{z_c}{R_c} \right), \sigma_{\theta\theta}^c, \sigma_{x\theta}^c \left( 1 + \frac{z_c}{R_c} \right), \sigma_{x\theta}^c \right\} dz_c \\ \{N_{xz}^{*c}, N_{\theta z}^{*c}, M_{nx\theta}^{*c}, M_{n\theta x}^{*c}\} \\ = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \left( 1 + \frac{z_c}{R_c} \right) \{ \sigma_{xz}^c, \sigma_{\theta z}^c, z_c^n \sigma_{xz}^c, z_c^n \sigma_{\theta z}^c \} dz_c \quad (12) \\ \{R_z^c, M_z^c\} = \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \sigma_{zz}^c \left( 1 + \frac{z_c}{R_c} \right) (1, z_c) dz_c \\ \{N_{xx}^i, N_{\theta\theta}^i, N_{x\theta}^i\} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \{ \sigma_{xx}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \sigma_{x\theta}^i \} dz_c \\ \{M_{xx}^i, M_{\theta\theta}^i, M_{x\theta}^i\} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} z_c \{ \sigma_{xx}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \sigma_{x\theta}^i \} dz_c \\ \{Q_{xz}^i, Q_{\theta z}^i\} = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{zz}^c \{ \sigma_{xx}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \sigma_{x\theta}^i \} dz_c \end{aligned}$$

جایی که  $i = t, b$  و  $n = 1, 2, 3$ .

## ۴-۱- تحلیل کمانش استوانه همسانگرد

در این مثال، تحلیل کمانش استوانه همسانگرد با شرایط مرزی ساده بررسی می‌شود. مشخصات هندسی و خواص مواد بکار رفته و برای استوانه در جدول ۱ آورده شده است. در جدول ۲ و شکل ۲، نتایج بدست آمده از تئوری حاضر با نتایج خزائی‌نژاد و نجفی‌زاده [۱۷]، سوفیو [۱۸] و شین [۱۹] مقایسه شده است. برای تعیین خطای نتایج تحقیق حاضر، فرض شده نتایج مراجع [۱۷]، [۱۸] و [۱۹] درست است و درصد اختلاف داده شده در جدول ۲، با تقسیم اختلاف نتایج بر نتایج مراجع [۱۷]، [۱۸] و [۱۹] بدست آمده است.

جدول ۲ نشان می‌دهد که نتایج حاضر دارای تطابق خوبی با نتایج مراجع دیگر دارد.

جدول ۱ خواص مکانیکی و مشخصات هندسی استوانه همسانگرد

$E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3$	خواص مکانیکی
$R/h = 300, h = 0.001 \text{ m}$	مشخصات هندسی

جدول ۲ مقایسه نتایج کمانش استوانه همسانگرد

L/R	نتایج حاضر	مرجع [۱۷] درصد اختلاف	مرجع [۱۸] درصد اختلاف	مرجع [۱۹] درصد اختلاف
۰/۵	۲۷۶۷/۱	۲۷۶۷/۴	۲۷۶۹/۰	۲۷۶۱/۴
۱	۱۲۷۲/۰	۱۲۷۳/۱	۱۲۷۳/۵	۱۲۷۲/۶
۲	۶۱۱/۶	۶۱۱/۷	۶۱۱/۸	۶۱۱/۷
۳	۴۱۲/۶	۴۱۲/۶	۴۱۲/۶	۴۱۲/۶

## ۴-۲- تحلیل کمانش استوانه ساندویچی مرکب

در این مثال، تحلیل کمانش محوری استوانه ساندویچی مرکب با شرایط مرزی ساده و گیردار بررسی می‌شود. رویه بالایی استوانه تحت بارگذاری محوری قرار دارد. مشخصات هندسی و خواص مکانیکی مواد بکار رفته برای رویه‌ها و هسته استوانه ساندویچی مرکب در جدول ۳ آورده شده است.

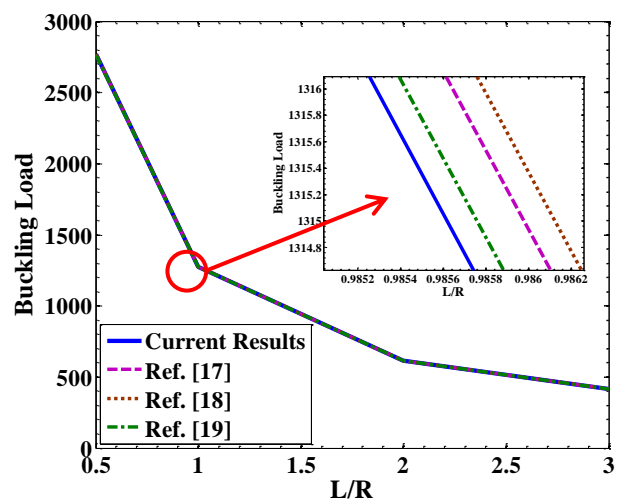
جدول ۳ خواص مکانیکی و هندسی استوانه ساندویچی مرکب

$E_1 = 172.368 \text{ Gpa}, E_2 = E_3 = 6.895 \text{ Gpa}, G_{12} = G_{13} = 3.447 \text{ Gpa}, G_{23} = 1.379 \text{ Gpa}, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$	خواص مکانیکی رویه‌ها
$E_1 = E_2 = 0.276 \text{ Gpa}, E_3 = 3.447 \text{ Gpa}, G_{12} = 0.110 \text{ Gpa}, G_{13} = G_{23} = 0.414 \text{ Gpa}, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25, \nu_{23} = 0.02$	خواص مکانیکی هسته
$h_c/h = 0.8, R_c/h = 10, L/R_c = 2$	مشخصات هندسی

در جدول ۴، نتایج بدست آمده از تئوری حاضر با نتایج بدست آمده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. جدول ۴ نشان می‌دهد که نتایج حاضر دارای تطابق خوبی با نتایج نرم‌افزار آباکوس دارد. مطابق انتظار، بار بحرانی کمانش محوری برای شرایط مرزی گیردار از بار بحرانی کمانش محوری برای شرایط مرزی ساده بیشتر است. از آنجایی که بار بحرانی کمانش در شکل مود اول رخ نداده است، در نتیجه پدیده چروکیدگی رخ داده است. در شکل ۳ و نمای سه بعدی از شکل مود کمانش بترتیب برای شرایط مرزی ساده و گیردار در نرم‌افزار آباکوس نشان داده است.

جدول ۴ مقایسه نتایج کمانش محوری استوانه ساندویچی مرکب

شماره مود (n و m)	نتایج حاضر	آباکوس	درصد اختلاف
شرایط مرزی ساده			
(۰ و ۱۲)	۰/۱۳۶۳	۰/۱۳۷۲	-۰/۶۶
(۲ و ۱۲)	۰/۱۳۶۶	۰/۱۳۷۸	-۰/۸۷
شرایط مرزی گیردار			
(۲ و ۱۲)	۰/۱۳۸۴	۰/۱۳۹۳	-۰/۶۵
(۴ و ۱۲)	۰/۱۳۸۵	۰/۱۳۹۵	-۰/۷۱

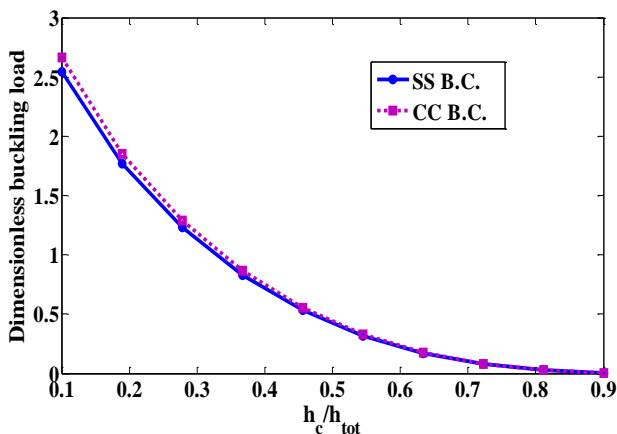


شکل ۲ مقایسه نتایج کمانش استوانه همسانگرد با نتایج مراجع [۱۷]، [۱۸] و [۱۹]

جدول ۵ خواص مکانیکی و هندسی استوانه ساندویچی مرکب

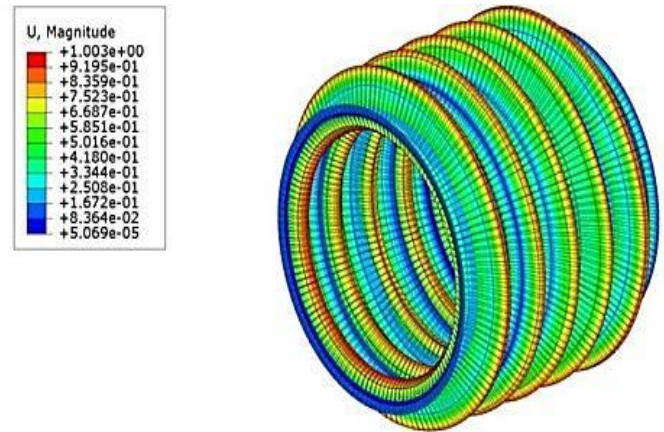
$E_1 = 131 \text{ Gpa}, E_2 = E_3 = 10.34 \text{ Gpa}, G_{12}$ $= G_{13} = 6.895 \text{ Gpa}, G_{23}$ $= 6.205 \text{ Gpa}, \nu_{12} = \nu_{13}$ $= 0.22, \nu_{23} = 0.49, \rho =$ $= 1627 \text{ kg/m}^3$	خواص مکانیکی رویه‌ها
$E_1 = E_2 = E_3 = 6.89 \text{ Gpa}, G_{12} = G_{13}$ $= G_{23} = 3.45 \text{ Gpa}, \nu$ $= 0.00001, \rho$ $= 97.195 \text{ kg/m}^3$	خواص مکانیکی هسته
$h_c/h = 0.8, R_c/h = 10, L/R_c = 2,$ $[0 \ 90 \ 0 / \text{core} / 0 \ 90 \ 0]$	مشخصات هندسی

در شکل ۵ تغییرات نیروی کمانش محوری استوانه ساندویچی مرکب با تغییر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پنل برای شرایط مرزی ساده و گیردار نشان داده شده است. همانطور که شکل ۵ نشان می‌دهد با افزایش نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پنل ( $h_c/h$ )، نیروی کمانش بی‌بعد برای هر دو شرایط مرزی کاهش می‌یابد. همچنین شکل ۵ نشان می‌دهد با افزایش این نسبت اثر نوع شرایط مرزی بر روی پاسخ کمانشی کاهش می‌یابد.

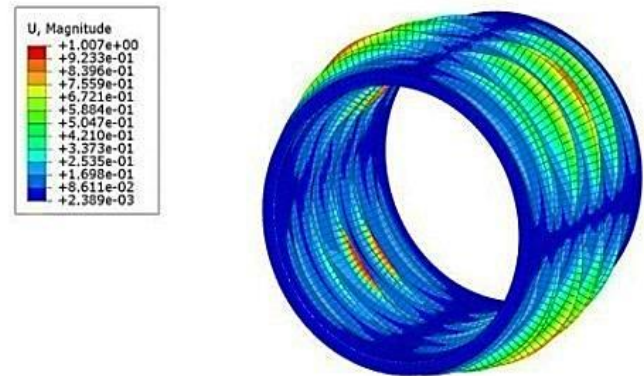


شکل ۵ تغییرات نیروی کمانش محوری بی‌بعد استوانه ساندویچی مرکب با تغییر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پنل

در شکل ۶ نمای سه بعدی و از بالای شکل مود اول کمانش محوری استوانه ساندویچی مرکب با شرایط مرزی ساده نشان داده شده است.



شکل ۳ نمای سه بعدی شکل مود کمانش استوانه ساندویچی مرکب با شرایط مرزی ساده (۰ و ۱۲)



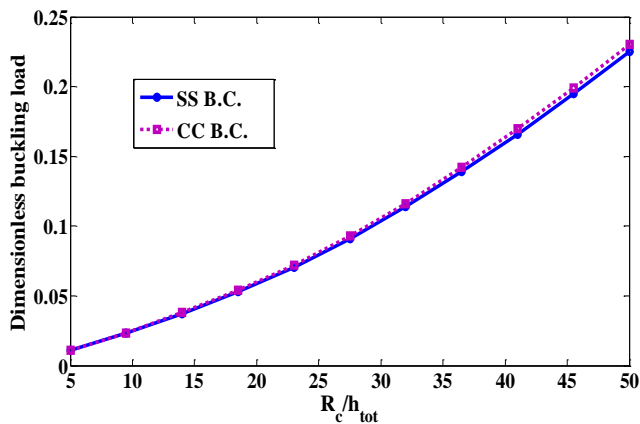
شکل ۴ نمای سه بعدی شکل مود کمانش استوانه ساندویچی مرکب با شرایط مرزی گیردار (۲ و ۱۲)

## ۵- نتایج

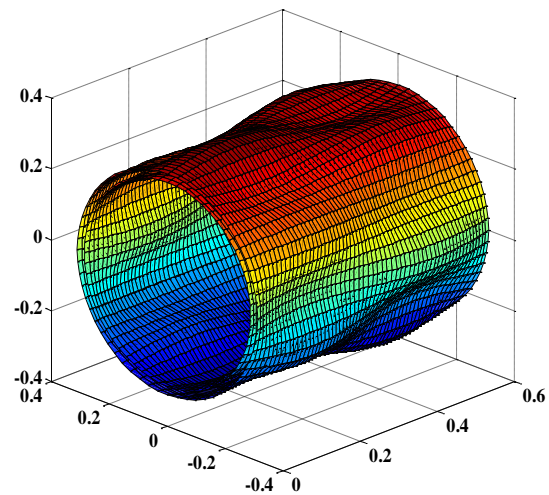
در این بخش، اثر پارامترهای مهمی هم‌چون نسبت شعاع هسته به ضخامت استوانه، نسبت طول به ضخامت استوانه، نسبت ضخامت رویه به ضخامت استوانه و اثر نسبت طول استوانه به شعاع هسته بر روی مرزهای پایداری استوانه‌های ساندویچی مرکب بررسی خواهد شد.

### ۵-۱- بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پنل روی رفتار کمانشی استوانه ساندویچی مرکب

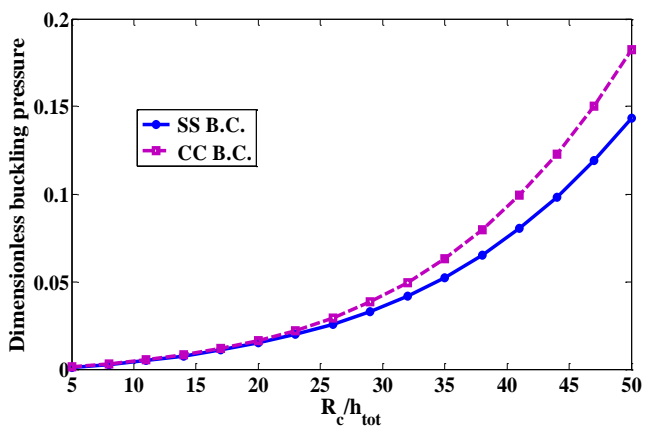
در این مثال، اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پنل ( $h_c/h$ ) روی رفتار کمانشی استوانه ساندویچی مرکب تحت نیروی محوری فشاری بررسی می‌شود. مشخصات هندسی و خواص مکانیکی مواد بکار رفته برای رویه‌ها و هسته استوانه ساندویچی مرکب در جدول ۵ آورده شده است.



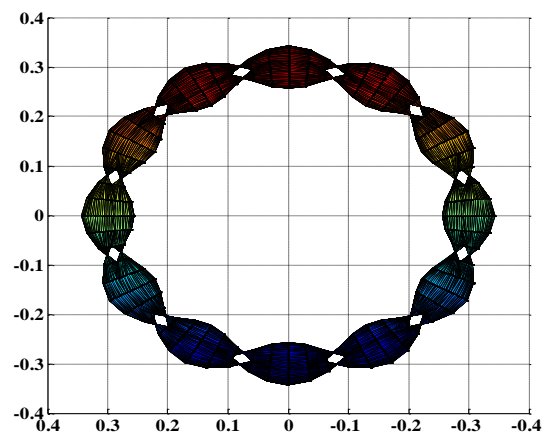
الف- استوانه تحت نیروی محوری فشاری



الف- نمای سه بعدی



ب- استوانه تحت فشار خارجی



ب- نما از بالا

شکل ۷ الف- تغییرات نیروی کمانش محوری و ب- فشاری بی بعد استوانه ساندویچی مرکب پادمتقارن با تغییر نسبت شعاع هسته به ضخامت کل پنل

شکل ۶ نمای سه بعدی (الف) و از بالای (ب) شکل مود اول کمانش محوری استوانه ساندویچی مرکب با شرایط مرزی ساده (۲و۶)

شکل ۷ نشان می دهد که با افزایش نسبت شعاع هسته به ضخامت کل پنل، نیروی کمانش بی بعد برای هر دو شرایط بارگذاری و هر دو شرایط مرزی افزایش پیدا می کند، عبارت دیگر با افزایش این نسبت، استحکام کمانشی افزایش پیدا می کند؛ نکته قابل ملاحظه در شکل ۷، تغییرات شبه خطی نیروی کمانش محوری و تغییرات نمایی نیروی کمانش فشاری با افزایش نسبت شعاع هسته به ضخامت کل پنل می باشد.

### ۵-۳- بررسی اثر نسبت طول استوانه به شعاع هسته روی رفتار کمانشی استوانه ساندویچی مرکب پادمتقارن

در این مثال، اثر نسبت طول استوانه به شعاع هسته ( $L/R_c$ ) روی رفتار کمانشی استوانه ساندویچی مرکب پادمتقارن تحت نیروی محوری فشاری و فشار خارجی برای شرایط مرزی ساده و گیردار بررسی می شود. مشخصات هندسی و خواص مکانیکی

### ۵-۲- بررسی اثر نسبت شعاع هسته به ضخامت کل پنل روی رفتار کمانشی استوانه ساندویچی مرکب پادمتقارن

در این مثال، اثر نسبت شعاع هسته به ضخامت کل پنل روی رفتار کمانشی استوانه ساندویچی مرکب پادمتقارن تحت نیروی محوری فشاری و فشار خارجی برای شرایط مرزی ساده و گیردار بررسی می شود. مشخصات هندسی و خواص مکانیکی مواد بکار رفته برای رویه ها و هسته استوانه ساندویچی مرکب در جدول ۵ آورده شده است، با این تفاوت که در این مثال لایه چینی بصورت پادمتقارن و  $[0\ 90\ 0/core/0\ 90\ 0]$  می باشد.

در شکل ۷، تغییرات نیروی کمانش محوری (الف) و فشاری (ب) استوانه ساندویچی مرکب پادمتقارن با تغییر نسبت شعاع هسته به ضخامت کل پنل برای شرایط مرزی ساده و گیردار نشان داده شده است.



## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، تحلیل کمانش استوانه مرکب ساندویچی تحت نیروی محوری فشاری و فشار خارجی با ارتقا تئوری مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی انجام شده است. نتایج بدست آمده از تحقیق حاضر نشان داد که با افزایش نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پنل و نسبت طول استوانه به شعاع هسته، نیروی کمانشی استوانه ساندویچی مرکب برای شرایط مرزی مختلف کاهش پیدا می‌کند و با افزایش نسبت شعاع هسته به ضخامت کل پنل، رفتار کمانشی استوانه ساندویچی مرکب برای شرایط مرزی مختلف بهبود پیدا می‌کند.

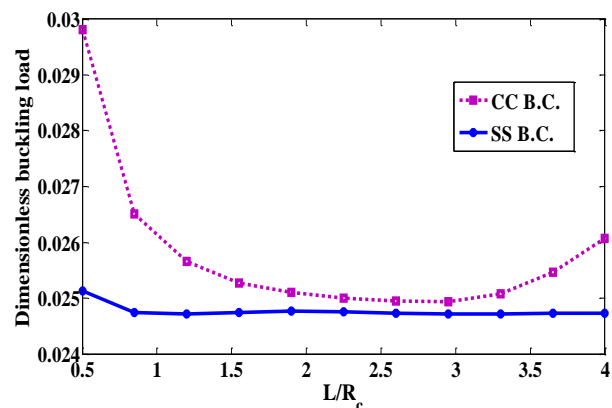
هم‌چنین بار بحرانی کمانش و فشار بحرانی کمانش استوانه ساندویچی مرکب برای شرایط مرزی گیردار بیشتر از شرایط مرزی ساده است.

## ۷- مراجع

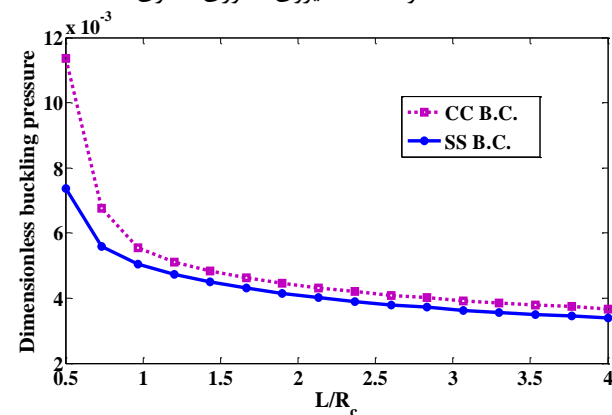
- [1]. Allen, H. G., *Analysis and design of structural sandwich panels*, London, Pergamon Press, (1969).
- [2]. Zenkert, D., *An introduction to sandwich construction*, Engineering Materials Advisory Services Ltd, Chameleon Press, London, (1995).
- [3]. Lopatin, A. V., Morozov, E.V., Buckling of the composite sandwich cylindrical shell with clamped ends under uniform external pressure, *Composite Structures*, Vol. 122, pp. 209–216, (2015).
- [4]. Livani, M., MalekzadehFard, K., Shokrollahi, S., Higher order flutter analysis of doubly curved sandwich panels with variable thicknesses under aerothermoelastic loading, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 60, No. 1, pp. 1–19, (2016).
- [5]. Shahgholian-Ghahfarokhi, D., Rahimi, G., Buckling analysis of composite lattice sandwich shells under uniaxial compression based on the effective analytical equivalent approach, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 174, (2019).
- [6]. Pan, D., Chen, L., Zhao, Q., Chen, L., Lin, M., Li, C., Chen, L., Local buckling theoretical calculation method of the FRP foam sandwich cylinder under axial compression, *Composite Structures*, Vol. 246, (2020).
- [7]. Zarei, M., Rahimi, G. H., Hemmatnezhad, M., Global buckling analysis of laminated sandwich conical shells with reinforced lattice cores based on the first-order shear deformation theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 187, (2020).

مواد بکار رفته برای رویه‌ها و هسته استوانه ساندویچی مرکب مشابه مثال ۵-۲ می‌باشد.

در شکل ۸- الف تغییرات نیروی کمانش محوری و ب- فشاری استوانه ساندویچی مرکب پادمتقارن با تغییر نسبت طول استوانه به شعاع هسته برای شرایط مرزی ساده و گیردار نشان داده شده است. شکل ۸- الف نشان می‌دهد که با افزایش نسبت  $L/R_c$  از ۰/۵ تا ۲، بار کمانش محوری بی‌بعد برای شرایط مرزی گیردار با سرعت کاهش می‌یابد، ولی با افزایش بیشتر تا نسبت ۳، تغییرات بار کمانشی محسوس نیست و با افزایش بیشتر این نسبت، بار کمانشی افزایش می‌یابد. در حالی که تغییرات بار کمانش محوری بی‌بعد برای شرایط مرزی ساده با تغییرات این نسبت از ۰/۵ تا ۴ ناچیز است. شکل ۸- ب نشان می‌دهد که با افزایش نسبت  $L/R_c$  از ۰/۵ تا ۴، بار کمانش فشاری بی‌بعد برای هر دو شرایط مرزی ساده و گیردار با سرعت کاهش می‌یابد؛ هم‌چنین با افزایش این نسبت، اثر شرایط مرزی بر روی بار کمانش فشاری بی‌بعد کاهش می‌یابد و منحنی‌های این دو شرایط مرزی بسمت هم همگرا می‌شوند.



الف- استوانه تحت نیروی محوری فشاری



ب- استوانه تحت فشار خارجی

شکل ۸- الف تغییرات نیروی کمانش محوری و ب- فشاری بی‌بعد استوانه ساندویچی مرکب پادمتقارن با تغییر نسبت طول استوانه به شعاع هسته

- [13]. Sanders, J. L., An improved first-approximation theory for thin shells, *NASA Technical Report*, R-24, (1959).
- [14]. Budiansky, B., Sanders Jr., J. L., On the best first-order linear shell theory, *Progress in Applied Mechanics*, pp. 129–140, (1963).
- [15]. Khazaeinejad, P., Najafizadeh, M. M., Mechanical buckling of cylindrical shells with varying material properties, *The Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, pp. 1551–1557, (2009).
- [16]. Sofiyev, A. H., Vibration and stability of composite cylindrical shells containing a FG layer subjected to various loads, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 27, No. 3, pp. 365–391, (2007).
- [17]. Shen, H. S., Post-buckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments, *Engineering Structures*, Vol. 25, pp. 487–497, (2003).
- [8]. Uriol Balbin, I., Bisagni, C., Buckling of sandwich cylindrical shells with shear deformable core through non dimensional parameters, *Thin-Walled Structures*, Vol. 161, (2021).
- [9]. Xiao, P., Yifeng, Z., Jie, S., Zheng, S., Global buckling analysis of composite honeycomb sandwich plate with negative Poisson's ratio (CHSP-NPR) using variational asymptotic equivalent model, *Composite Structures*, Vol. 264, (2021).
- [10]. Mhada, K., Bourihane, O., A multi-scale model for global buckling and local wrinkling interaction with application to sandwich beams, *Structures*, Vol. 32, pp. 1398-1407, (2021).
- [11]. Zhai, Y., Ma, J., Yan, Y., Li, Q., Wang, S., Wang, G., Thermal buckling and free vibration of composite sandwich curved panels, *Composite Structures*, Vol. 267, (2021).
- [12]. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, Theory and Analysis*, CRC Press, New York, USA, (2004).