

طراحی بهینه سازه سیلندر چند لایه با انطباق پرسی دوار تحت بار فشار داخلی

چکیده: هدف این پژوهش، بهینه‌سازی حجم یک سیلندر سه‌لایه دوار، تحت فشار داخلی و بار گریز از مرکز ناشی از چرخش سیلندر است که در طراحی درام دوار کمپرسور موتورهای توربینی کاربرد دارد. در سیلندره‌های جدار ضخیم دوار تحت فشار داخلی، تنش محیطی بیشینه در شعاع داخلی سیلندر به وجود می‌آید. با چند لایه کردن سیلندر و پرسی جا زدن لایه‌ها درون یکدیگر می‌توان تنش محیطی ایجاد شده در سیلندر را کاهش داد. با اعمال پیش‌بار ناشی از انطباق پرسی، تنش محیطی کاسته شده و سبب می‌شود که از ظرفیت شعاع‌های بیرونی سیلندر جهت مقاومت در برابر تنش استفاده گردد. در این تحقیق ابتدا معادلات تنش یک سیلندر سه لایه فولادی تحت فشار داخلی و در حال چرخش، به روش جمع آثار استخراج می‌شود. سپس یک راه حل بهینه‌سازی شمارشی به منظور کمینه کردن حجم سیلندر ارائه می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد که تنش محیطی حاصل از برنامه بهینه‌سازی ۳۹ درصد کمتر از تنش محیطی در یک سیلندر یک‌تکه با شرایط یکسان است. برای اعتبارسنجی نتایج تحلیلی، مسئله در نرم‌افزار اجزا محدود آباکوس شبیه‌سازی گردید. نتایج حاکی از اختلاف ۱/۳ درصد در تنش محیطی بیشینه به دست آمده می‌باشد.

واژه‌های راهنما: سیلندر چندلایه، فشار داخلی، انطباق پرسی، بهینه‌سازی، تنش محیطی.

بهروز شهریاری*

استادیار

علیرضا علیپوری تراب

کارشناس ارشد، مجتمع دانشگاهی مکانیک،
دانشگاه صنعتی مالک اشتر

مقاله علمی پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۱۲

Behrooz Shahriari*
Assistant professor

Alireza Alipouri
Toraab
MSc., Faculty of
Mechanics, Malek Ashtar
University of Technology

Optimum design of rotating multilayer press-fitted cylinder structure subjected to internal pressure load

Abstract: The aim of this study is to optimize the volume of a three-layer rotating cylinder under internal pressure and centrifugal load used in design of turbine engines compressor rotating drum. In thick-walled rotating cylinders under internal pressure, maximum hoop stress occurs in the inner radius. In compound cylinder, the hoop stress can be reduced by pressing the layers together that causes using the capacity of the outer radii to withstand stress. The stress equations of compound steel cylinder are extracted by the superposition method. Then a numerical optimization solution is proposed to minimize cylinder volume. The maximum hoop stress resulted from the optimization program is 39% less than single layer cylinder with the same condition. In order to validate, the problem is simulated in the Abaqus software. Maximum difference of 1.3% obtained from the analysis and simulation.

Keywords: Multilayer cylinder, Internal pressure, Press fit, Optimization, Hoop stress.

۱- مقدمه

روش المان محدود و در شرایط مختلف حرارتی مقایسه شد. جباری و همکارانش [۱۲] یک راه حل تحلیلی برای محاسبه تنش‌های حرارتی و مکانیکی محوری در مخزن ضخیم FGM با استفاده از معادله‌ی ناوردر در سال ۲۰۰۲ ارائه کردند. مجید الگبوری و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۱ یک تحلیل اجزای محدود بر روی سیلندرهای ترکیبی از جنس آلومینیوم و فولاد که تحت فشار درونی و بارگذاری حرارتی و همچنین بارگذاری دورانی ناشی از نیروی گریز از مرکز است، انجام دادند و مقادیر تغییرات تنش را در دیواره‌ی سیلندر بررسی کردند. نتایج نشان داد که بیشترین تنش محیطی در این مسئله بین سطح تماس دو سیلندر اتفاق می‌افتد. سانیل [۱۴] از تنش محیطی بیشینه به منظور بهینه‌سازی سیلندرهای مرکب استفاده کرد و مقادیر ابعادی را برای دو سیلندر برای فشار داخلی یکسان در سال ۲۰۱۱ بهینه کرد. ماجومه و همکاران [۱۵] در سال ۲۰۱۴ یک سیلندر ترکیبی سه لایه را برای یک فشار داخلی مشخص طراحی و بهینه کردند. فرض آنها برای بهینه‌سازی این بود که سه سیلندر، تنش شعاعی یکسان در سطح داخلی داشته باشند. آنها، مقدار تداخل و قطر خارجی را به عنوان پارامترهای بهینه‌سازی و بقیه پارامترها را ثابت در نظر گرفتند. کاظم زاده [۱۶] در سال ۲۰۱۸ اثر انطباق پرسی بر طراحی بهینه لوله‌های کامپوزیت چند لایه تحت فشار را بررسی کرد. عبدالسلام [۱۷] در سال ۲۰۱۹ طراحی استوانه‌های سه لایه با پرس انطباقی که تحت فشار بسیار زیاد قرار گرفته‌اند، را بهینه‌سازی کرد. کارآموز و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۲۰ یک فرمول تحلیلی برای استوانه‌های جداره ضخیم کامپوزیتی متقارن بر اساس نظریه الاستیسیته دوبعدی خطی که انطباق پرسی شده‌اند، ارائه کردند.

تحقیقات گذشته روی سیلندرهای چندلایه تحت فشار داخلی بوده است. در این تحقیق به بررسی سیلندر چندلایه تحت فشار داخلی که در حال چرخش است پرداخته شده است. این سیلندر در طراحی درام دوار کمپرسور موتور توربینی به ویژه توربین گاز هوایی که کاهش وزن در آن اهمیت ویژه‌ای دارد به کار می‌رود. بسته به سرعت دوران، جنس و توزیع جرمی این سیلندرها، علاوه بر بارگذاری فشار داخلی، تحت بارهای گریز از مرکز قرار می‌گیرند. نیروی گریز از مرکز سهم مهمی از تنش‌های ایجاد شده در سیلندر را به خود اختصاص می‌دهد. با چند لایه‌ای ساختن این سیلندرها و استفاده از فشار جازنی در شعاع‌های مناسب، توزیع تنش به صورتی ایجاد می‌شود که از ماکزیمم ظرفیت استحکامی سیلندر ترکیبی استفاده شود.

هدف این تحقیق بهینه‌سازی یک سیلندر ترکیبی سه لایه با جنس یکسان بوده که تحت فشار داخلی P_i و سرعت زاویه‌ای ω می‌باشد. هدف یافتن قطر سیلندرها و همچنین میزان تداخل سیلندرها درون هم می‌باشد به گونه‌ای که هم تنش محیطی σ_θ کوچکتر از تنش تسلیم شود و همراه آن حجم سیلندر ترکیبی، کمینه باشد. شکل ۱ سیلندر ترکیبی سه لایه تحت فشار داخلی و سرعت زاویه‌ای را نشان می‌دهد.

به منظور حل مسئله، اثرات هر کدام از نیروهای وارده به سیلندر ترکیبی را به صورت جداگانه و بدون در نظر گرفتن سایر نیروها تحلیل کرده و سپس آنها را به صورت جمع آثار با یکدیگر جمع می‌شوند. تحلیل در سه حالت انجام می‌گردد. در حالت اول تنش به وجود آمده در سیلندر بر اثر جازدن پرسی بررسی

سیلندرهای ترکیبی کاربردهای گسترده‌ای در صنایع مختلف همچون صنایع نظامی، هسته‌ای، هیدرولیک، مخازن تحت فشار، خطوط انتقال سیال فشار بالا و غیره دارند. به منظور افزایش ظرفیت و فشار قابل تحمل و همچنین کاهش حجم و هزینه، سیلندرهای جدار ضخیم را به صورت چندلایه و در برخی موارد با جنس‌های متفاوت می‌سازند. روش ساخت این گونه سیلندرها به این گونه است که قطر خارجی یک سیلندر از قطر داخلی سیلندر دیگر مقداری بزرگتر می‌باشد که به آن تداخل می‌گویند و سپس آنها را به صورت پرسی یا با گرم و سرد کردن درون یکدیگر جا می‌زنند. این تداخل باعث ایجاد یک تنش پیش‌بار بر روی شعاع خارجی سیلندر داخلی و همچنین شعاع داخلی سیلندر خارجی می‌گردد. این تنش که بر روی شعاع خارجی سیلندر داخلی که بر اثر جازدن پرسی به وجود می‌آید باعث می‌شود به عنوان فشار خارجی بر روی سیلندر داخلی عمل کند و از میزان تنش محیطی ایجاد شده بر اثر فشار داخلی در سیلندر بکاهد.

۲- تاریخچه

پیشینه‌ی مباحث تحلیل توزیع تنش در سیلندرهای دوار به دهه‌های نخست قرن ۱۹ باز می‌گردد. برای مواد با رفتار الاستیک، تنش‌ها و جابجایی را می‌توان در تحلیل‌های آن دوره یافت. مسئله تنش در استوانه‌ها و دیسک‌های دوار در ماشین‌های دوار نظیر توربین‌ها، راکتورها و ژنراتورها، یا در هر سازه‌ای که برای انجام وظیفه به سرعت‌های دورانی بالا نیاز است، بسیار مهم می‌باشد. این مسئله با استفاده از فرض تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای در کتب الاستیسیته نظیر نادای [۱]، سچلر [۲]، لنداو و لیتز [۳]، تیموشنکو و گودیر [۴]، ولترا و گینز [۵]، بورسی و چونگ [۶] و لاو [۷] مورد بررسی قرار گرفته است. حل تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای برای استوانه‌های توخالی جدار ضخیم در ناحیه الاستیک چندین سال پیش در کتاب‌های استاندارد الاستیسیته نظیر تیموشنکو و گودیر ارائه شد و در سال ۱۹۱۸ به وسیله هایل [۸] روشی تقریبی برای حالات خاصی از استوانه با ضخامت‌های متغیر ارائه شد.

مجدوبی و همکاران [۹] در سال ۲۰۰۶ روش بهینه‌سازی سیلندرهای ترکیب‌شده از دو فلز و وزن سیلندر مرکزی به حداقل رسانده شده برای فشار خاص پیشنهاد کردند و نتیجه گرفتند که سیلندرهای فشار بالا می‌توانند تا حدی با مواد سبک‌تر و ارزان‌تر جایگزین شوند تا هزینه و وزن سیلندر کاهش یابد. شی و همکاران [۱۰] یک مدل تحلیلی خطی الاستیک برای تعیین توزیع تنش یک مخزن کامپوزیت چندلایه تحت فشار یکنواخت روی سطوح داخلی و بیرونی در سال ۲۰۰۷ پیشنهاد کردند. فشار بین دولایه متوالی با یک الگوریتم بازگشتی محاسبه شد. ژانگ و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۱۲ یک راه حل تحلیلی را برای تعیین توزیع تنش از یک مخزن چندلایه تحت فشار به همراه فشار مایع داخلی و بارگذاری حرارتی با توجه به تأثیر انتهای بسته بررسی کردند. توزیع تنش تحلیلی با مقادیر محاسبه‌شده با استفاده از

$$\sigma_r = \frac{P_i r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right) - \frac{P_{s12} r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right) - \frac{P_{s12} r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) \quad (3)$$

در صورتی که فشار داخلی سیلندر برابر با صفر باشد تنش شعاعی و محیطی سیلندر طبق روابط ۴ و ۵ نوشته می شود.

$$\sigma_r = -P_{s12} \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = -P_{s12} \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) \quad (5)$$

در این صورت تنش شعاعی در شعاع بیرونی سیلندر ($r = r_2$) بیشینه بوده و برابر است با:

$$\sigma_r \max(at r_2) = -P_{s12} \quad (6)$$

همچنین تنش شعاعی در شعاع درونی سیلندر ($r = r_1$) برابر با صفر می باشد.

$$\sigma_r(at r_1) = 0 \quad (7)$$

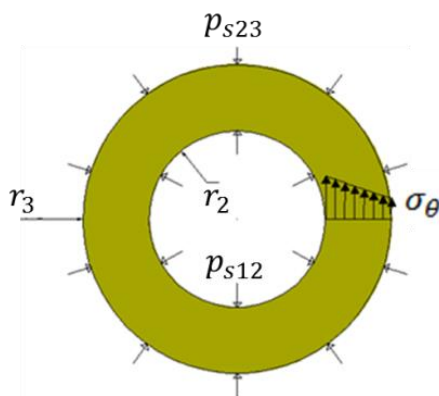
تنش محیطی در شعاع بیرونی سیلندر ($r = r_2$) برابر است با:

$$\sigma_\theta(at r_2) = -P_{s12} \left[\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \quad (8)$$

تنش محیطی در شعاع درونی سیلندر ($r = r_1$) بیشینه بوده و برابر است با:

$$\sigma_\theta \max(at r_1) = - \left[\frac{2P_{s12} r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \quad (9)$$

سیلندر شماره ۲: شکل ۳ سیلندر شماره ۲ را نشان می دهد که در آن فشار وارده از سیلندر ۱ به ۲ بر اثر انطباق پرسی بوده که به عنوان فشار داخلی در نظر گرفته می شود و همچنین P_{s23} فشار وارده از سیلندر ۳ به ۲ بر اثر انطباق پرسی می باشد که به عنوان فشار خارجی وارده به سیلندر ۲ در نظر گرفته می شود.



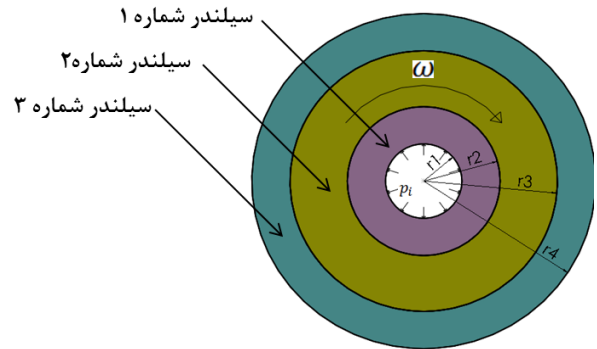
شکل ۳ سیلندر شماره ۲

با توجه به رابطه تنش شعاعی در سیلندرهایی جدار ضخیم (رابطه لامه) برای سیلندر ۲، تنش شعاعی به صورت رابطه (۱۰) نوشته می شود.

$$\sigma_r = \frac{P_{s12} r_2^2 - P_{s23} r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{r_2^2 r_3^2 (P_{s23} - P_{s12})}{r_3^2 - r_2^2} \frac{1}{r^2} \quad (10)$$

در این رابطه r_2 شعاع داخلی سیلندر ۲، r_3 شعاع خارجی سیلندر ۲، $P_i = P_{s12}$ فشار وارده از سیلندر ۱ به ۲ بر اثر انطباق

می شود. در این مرحله فشار داخلی و سرعت زاویه ای صفر در نظر گرفته می شود. در حالت دوم مسئله فقط با فرض وجود فشار داخلی بررسی می گردد و تنش ناشی از انطباق پرسی و همچنین سرعت زاویه ای صفر در نظر گرفته می شود. در حالت سوم فقط تنش های ناشی از دوران سیلندر با فرض صفر بودن فشار داخلی و تنش ناشی از انطباق سیلندرها، محاسبه می گردند. سپس تنش های به دست آمده در سه حالت با یکدیگر جمع شده و برآیند آنها به عنوان تنش نهایی وارده بر سیلندر در نظر گرفته می شود.



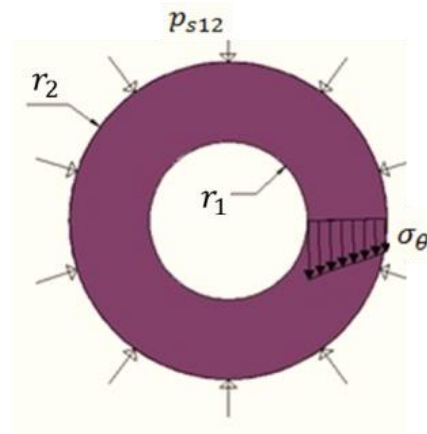
شکل ۱ سیلندر ترکیبی تحت فشار داخلی و سرعت زاویه ای

۳- تنش های ناشی از انطباق پرسی در سیلندر چند لایه دوار تحت فشار داخلی

برای حل مسئله، هر کدام از سیلندرها به صورت جداگانه تحلیل شده و فشاری که به علت انطباق پرسی در فصل مشترکها ایجاد می شود محاسبه می گردد.

سیلندر شماره ۱: شکل ۲ سیلندر شماره ۱ و نیروهای وارده بر آن را نشان می دهد.

$$\omega = 0, P_i = 0 \quad (1)$$



شکل ۲ سیلندر شماره ۱

در شکل ۲، P_{s12} فشار وارده از سیلندر دو به سیلندر اول بوده که بر اثر انطباق پرسی به وجود می آید. تنش شعاعی و تنش محیطی در سیلندر یک، طبق رابطه لامه، مطابق روابط ۲ و ۳ می باشد.

تنش شعاعی در شعاع داخلی و خارجی سیلندر برابر است با:

$$\sigma_r(at r_3) = -P_{s23} \quad (18)$$

$$\sigma_r(at r_4) = 0 \quad (19)$$

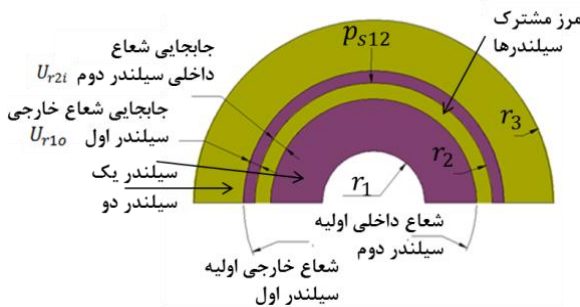
همچنین تنش محیطی در شعاع داخلی و خارجی سیلندر ۳ برابر است با:

$$\sigma_{\theta max}(at r_3) = \frac{P_{s23}(r_4^2 + r_3^2)}{r_4^2 - r_3^2} \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta}(at r_4) = \frac{2P_{s23}(r_3^2)}{r_4^2 - r_3^2} \quad (21)$$

۴- محاسبه کرنش و جابجایی

شکل ۵ نشان دهنده جابجایی بین سیلندرهایی ۱ و ۲ به علت انطباق پرسی می باشد که در آن شعاع خارجی سیلندر ۱ پس از جا زدن در سیلندر ۲ به اندازه u_{r10} و همچنین شعاع داخلی سیلندر ۲ به اندازه u_{r2i} در راستای شعاعی جابجا می شود.



شکل ۵ جابجایی ناشی از انطباق پرسی بین سیلندر ۱ و ۲

با توجه به شکل ۵، u_{r10} جابجایی شعاع خارجی سیلندر ۱، $\epsilon_{\theta 10}$ کرنش محیطی دیواره خارجی سیلندر ۱، E_1 مدول یانگ سیلندر ۱ و ν_1 ضریب پواسون سیلندر ۱ است. در این مسئله با فرض اینکه تنش در راستای Z صفر است، مسئله به صورت تنش صفحه ای حل می گردد. با توجه به روابط تنش کرنش و همچنین رابطه کرنش در سیلندرها، جابجایی شعاع خارجی سیلندر ۱ در معادله (۲۳) آورده شده است.

$$\epsilon_{\theta 10} = \frac{u_{r10}}{r_2} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{\theta} - \nu_1 \sigma_r] = \frac{1}{E_1} \left[-P_{s12} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) - \nu_1 (-P_{s12}) \right] \quad (22)$$

$$u_{r10} = \frac{-P_{s12} r_2}{E_1} \left[\left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) - \nu_1 \right] \quad (23)$$

با توجه به شکل ۵، جابجایی شعاع داخلی سیلندر ۲ به صورت معادله (۲۴) و (۲۵) به دست می آید که در آن، u_{r2i} جابجایی شعاع داخلی سیلندر ۲، $\epsilon_{\theta 2i}$ کرنش مماسی دیواره داخلی سیلندر ۲، E_2 مدول یانگ سیلندر ۲ و ν_2 ضریب پواسون سیلندر ۲ می باشند.

پرسی که به عنوان فشار داخلی در نظر گرفته می شود و $P_o = P_{s23}$ فشار وارده از سیلندر ۳ به ۲ بر اثر انطباق پرسی که به عنوان فشار خارجی در نظر گرفته می شود. تنش شعاعی در شعاع داخلی $r = r_2$ و شعاع خارجی سیلندر ۲، $r = r_3$ ، با توجه به معادله (۱۵) برابر است با:

$$\sigma_r(at r_2) = -P_{s12} \quad (11)$$

$$\sigma_r(at r_3) = -P_{s23} \quad (12)$$

با توجه به رابطه تنش محیطی در سیلندرهایی جدار ضخیم (رابطه لامه)، تنش محیطی به صورت معادله (۱۳) نوشته می شود.

$$\sigma_{\theta} = \frac{P_{s12} r_2^2 - P_{s23} r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{r_2^2 r_3^2 (P_{s23} - P_{s12})}{r_3^2 - r_2^2} \frac{1}{r^2} \quad (13)$$

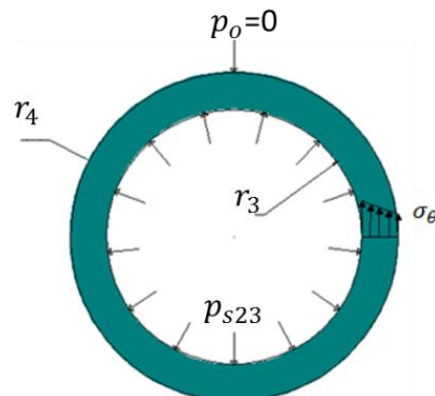
تنش محیطی در شعاع داخلی سیلندر ۲، $r = r_2$ ، بیشینه بوده و برابر است با:

$$\sigma_{\theta max}(at r_2) = \frac{P_{s12}(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{2P_{s23}(r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} \quad (14)$$

تنش محیطی در شعاع خارجی سیلندر ۲، $r = r_3$ ، برابر است با:

$$\sigma_{\theta}(at r_3) = \frac{2P_{s12}(r_2^2 + r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{-P_{s23}(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} \quad (15)$$

سیلندر شماره ۳: شکل ۴ سیلندر شماره ۳ را نشان می دهد که در آن P_{s23} فشار وارده از سیلندر ۲ به ۳ بر اثر انطباق پرسی می باشد که به عنوان فشار داخلی سیلندر ۳ در نظر گرفته می شود. فشار خارجی وارده به سیلندر ۳، صفر است.



شکل ۴ سیلندر شماره ۲

در شکل ۴، $r_i = r_3$ شعاع داخلی سیلندر ۳، $r_o = r_4$ شعاع خارجی سیلندر سه، $P_i = P_{s23}$ فشار وارده از سیلندر ۲ به ۳ بر اثر انطباق پرسی که به عنوان فشار داخلی در نظر گرفته می شود و $P_o = 0$ فشار خارجی می باشند. با توجه به رابطه لامه تنش شعاعی و تنش محیطی در سیلندر ۳ به صورت رابطه های (۱۶) و (۱۷) نوشته می شود.

$$\sigma_r = \frac{P_{s23} r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} \left(1 - \frac{r_4^2}{r^2} \right) \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{P_{s23} r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} \left(1 + \frac{r_4^2}{r^2} \right) \quad (17)$$

$$\varepsilon_{\theta 3i} = \frac{U_{r3i}}{r_3} = \frac{1}{E_3} [\sigma_{\theta} - \nu_3 \sigma_r] = \frac{1}{E_3} \left[\frac{P_{s23}(r_4^2 + r_3^2)}{r_4^2 - r_3^2} - \nu_3 (-P_{s23}) \right] \quad (29)$$

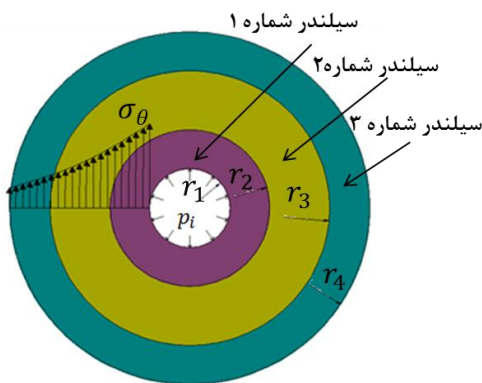
$$U_{r3i} = \frac{p_{s23} r_3}{E_3} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} + \nu_3 \right] \quad (30)$$

U_{r3i} جابجایی شعاع داخلی سیلندر ۳، $\varepsilon_{\theta 3i}$ کرنش محیطی دیواره داخلی سیلندر ۳، E_3 مدول یانگ سیلندر ۳ و ν_3 ضریب پواسون سیلندر ۳ است. میزان تداخل سیلندر ۲ و ۳ (تفرانس انطباق پرسی) که با δ_{23} نشان داده می‌شود از جمع جبری جابجایی شعاع خارجی سیلندر ۲، u_{r20} و جابجایی شعاع داخلی سیلندر ۳، u_{r3i} به دست می‌آید.

$$\delta_{23} = u_{r3i} - u_{r20} = \frac{P_{s23} r_3}{E_3} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} + \nu_3 \right] - \frac{r_3}{E_2} \left[\frac{2P_{s12} r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - p_{s23} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \nu_2 \right) \right] \quad (31)$$

۵- تنش‌های ناشی از فشار داخلی

در این حالت با فرض اینکه سرعت دورانی و فشار تماسی بین سیلندرها صفر می‌باشد مسئله تحلیل شده و تنش‌های محیطی و شعاعی هر سه سیلندر محاسبه می‌گردند. شکل ۷ سیلندر ترکیبی تحت فشار داخلی P_i و فشار خارجی P_o را نشان می‌دهد.



شکل ۷ سیلندر ترکیبی سه لایه‌ای تحت فشار داخلی P_i

با استفاده از رابطه لامه تنش محیطی برای سیلندر به شعاع داخلی r_1 و r_4 تحت فشار داخلی P_i و خارجی P_o در معادله (۳۲) نشان داده شده است.

$$\sigma_{\theta} = \frac{P_i r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \left[\frac{r_4^2}{r^2} + 1 \right] - \frac{P_o r_4^2}{r_4^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \quad (32)$$

تنش محیطی سیلندر در شعاع r_1 و r_2 و r_3 طبق معادله (۳۲) برابر است با:

$$\sigma_{\theta 1} = P_i \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] - \frac{2p_o r_4^2}{r_4^2 - r_1^2} \quad (33)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{P_i r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] - \frac{p_o r_4^2}{r_4^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \quad (34)$$

$$\sigma_{\theta 3} = \frac{P_i r_1^2}{r_3^2} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] - \frac{p_o r_4^2}{r_4^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_3^2} \right) \quad (35)$$

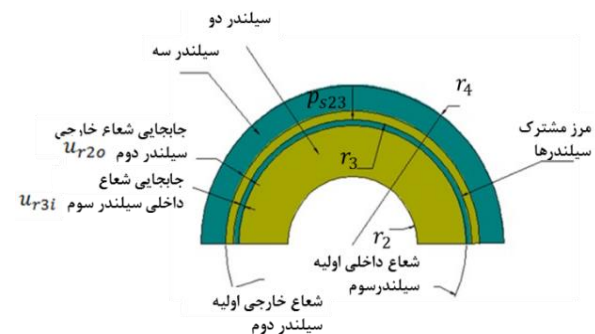
$$\varepsilon_{\theta 2i} = \frac{U_{r2i}}{r_2} = \frac{1}{E_2} [\sigma_{\theta} - \nu_2 \sigma_r] = \frac{1}{E_2} \left[\frac{P_{s12}(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{2P_{s23}(r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} - \nu_2 (-P_{s12}) \right] \quad (24)$$

$$U_{r2i} = \frac{r_2}{E_2} \left[P_{s12} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu_2 \right) - \frac{2P_{s23}(r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} \right] \quad (25)$$

تداخل سیلندر ۱ و ۲ (تفرانس انطباق پرسی) که با δ_{12} نشان داده می‌شود از جمع جبری جابجایی شعاع خارجی سیلندر ۱ (u_{r10})، و جابجایی شعاع داخلی سیلندر ۲ (u_{r2i}) به دست می‌آید. معادله (۲۶) تداخل بین سیلندر ۱ و ۲ را نشان می‌دهد.

$$\delta_{12} = U_{r2i} - U_{r10} = \frac{r_2}{E_2} \left[P_{s12} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \nu_2 \right) - \frac{2p_{s23}(r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} \right] + \frac{P_{s12} r_2}{E_1} \left[\left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) - \nu_1 \right] \quad (26)$$

شکل ۶ جابجایی بین سیلندره‌های ۲ و ۳ به علت انطباق پرسی را نشان می‌دهد که در آن شعاع خارجی سیلندر ۲ پس از جابجایی در سیلندر ۳ به اندازه u_{r20} و همچنین شعاع داخلی سیلندر ۳ به اندازه u_{r3i} جابجا می‌شود.



شکل ۶ جابجایی ناشی از انطباق پرسی بین سیلندر ۲ و ۳

کرنش محیطی $\varepsilon_{\theta 20}$ و جابجایی شعاع خارجی سیلندر ۲، u_{r20} در معادلات (۲۷) و (۲۸) آورده شده است.

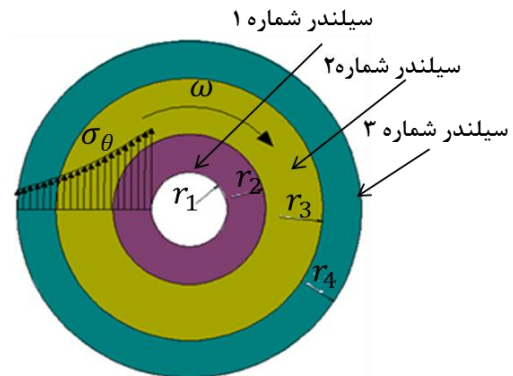
$$\varepsilon_{\theta 20} = \frac{U_{r20}}{r_3} = \frac{1}{E_2} [\sigma_{\theta} - \nu_2 \sigma_r] = \frac{1}{E_2} \left[\frac{2P_{s12}(r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{P_{s23}(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} - \nu_2 (-P_{s23}) \right] \quad (27)$$

$$U_{r20} = \frac{r_3}{E_2} \left[\frac{2P_{s12} r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - p_{s23} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \nu_2 \right) \right] \quad (28)$$

کرنش محیطی و جابجایی شعاع داخلی سیلندر ۳ در معادلات (۲۹) و (۳۰) آورده شده است.

۶- تنش های ناشی از سرعت دورانی سیلندر

در این حالت تنش ناشی از سرعت دورانی و نیروی گریز از مرکز در سیلندرهایی ۱ و ۲ و ۳ محاسبه می گردد. شکل ۸ سیلندر ترکیبی با سرعت زاویه ای ω را نشان می دهد.



شکل ۸ سیلندر ترکیبی سه لایه ای تحت سرعت زاویه ای ω

۷- بهینه سازی حجم سیلندر سه لایه

به منظور طراحی بهینه سیلندرها، باید شعاع و همچنین میزان تداخل انطباق پرسی سیلندرها را به گونه ای محاسبه نمود که هم تنش های محیطی به وجود آمده در سیلندرها کمتر از تنش تسلیم سیلندرها بوده و هم حجم سیلندر، کمترین میزان باشد. لازم به ذکر است که فشار داخلی P_i و همچنین سرعت زاویه ای ω ثابت در نظر گرفته می شود. به منظور حل معادله و به دست آوردن مقدار بهینه تنش تماسی بین سیلندرها (P_{s23} و P_{s12})، تنش محیطی بیشینه سیلندرها با یکدیگر برابر قرار داده می شوند.

$$\sigma_{\theta 1} = \sigma_{\theta 2} = \sigma_{\theta 3} \quad (43)$$

$$\sigma_{\theta 1} = \sigma_{\theta 2} \quad (44)$$

$$P_{s12} \left[\frac{(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] + P_{s23} \left(\frac{-2(r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} \right) = P_i \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] + \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + \nu_1)[r_1^2 + 2r_2^2] - (1 + 3\nu_1)r_1^2] - \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + \nu_2)[r_2^2 + 2r_3^2] - (1 + 3\nu_2)r_2^2] \quad (45)$$

$$\sigma_{\theta 3} = \frac{P_i r_1^2}{r_3^2} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] + \frac{P_{s23}(r_4^2 + r_3^2)}{r_4^2 - r_3^2} + \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + \nu_3)[r_3^2 + 2r_4^2] - (1 + 3\nu_3)r_3^2]$$

اگر ضرایب P_{s23} و P_{s12} و همچنین ثابت معادله را a و b و c فرض شود:

$$a = \frac{(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (46)$$

$$b = \frac{-2(r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} \quad (47)$$

$$e = P_i \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] + \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + \nu_1)[r_1^2 + 2r_2^2] - (1 + 3\nu_1)r_1^2] - \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + \nu_2)[r_2^2 + 2r_3^2] - (1 + 3\nu_2)r_2^2] \quad (48)$$

معادله (۴۸) به صورت معادله (۴۹) باز نویسی می شود.

تنش محیطی برای سیلندر به شعاع داخلی r_1 و r_4 تحت سرعت زاویه ای ω در معادله (۳۶) نشان داده شده است.

$$\sigma_{\theta} = \frac{\rho \omega^2}{8} \left[(3 + \square) \left[r_1^2 + r_4^2 + \frac{r_1^2 r_4^2}{r^2} \right] - (1 + 3\square)r^2 \right] \quad (36)$$

تنش محیطی سیلندرهایی ۱ و ۲ و ۳ در شعاع داخلی برابر است با:

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + \nu_1)[r_1^2 + 2r_2^2] - (1 + 3\nu_1)r_1^2] \quad (37)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + \nu_2)[r_2^2 + 2r_3^2] - (1 + 3\nu_2)r_2^2] \quad (38)$$

$$\sigma_{\theta 3} = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + \nu_3)[r_3^2 + 2r_4^2] - (1 + 3\nu_3)r_3^2] \quad (39)$$

در یک سیلندر مرکب تنش محیطی بیشینه در مرز داخلی سیلندرها اتفاق می افتد و برای به دست آوردن آنها، تنش های محیطی ناشی از انطباق پرسی، فشار داخلی و همچنین تنش محیطی ناشی از دوران، در شعاع داخلی سیلندر با یکدیگر جمع می گردد. معادلات (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) مجموع تنش های محیطی سیلندرهایی ۱ و ۲ و ۳ در شعاع داخلی هر کدام نشان می دهد.

$$\sigma_{\theta 1} = P_i \left[\frac{r_4^2 + r_1^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] + \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + \nu_1)[r_1^2 + 2r_2^2] - (1 + 3\nu_1)r_1^2] \quad (40)$$

$$\delta_{23} = \frac{p_{s23} r_3}{E3} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_3^2} + v_3 \right] - \frac{r_3}{E2} \left[\frac{2p_{s12} r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - p_{s23} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - v_2 \right) \right] \quad (59)$$

محاسبات، جهت بهینه‌سازی ابعادی یک سیلندر سه لایه، با شعاع داخلی مشخص سیلندر اول (r_1) و همچنین سرعت دورانی (ω) و فشار داخلی (p_i) مشخص، با فرض یکسان بودن جنس سیلندرها ارائه می‌گردد. هدف مسئله، یافتن شعاع‌های بهینه سیلندرها (r_2 ، r_3 ، r_4) و همچنین میزان تداخل انطباق پرسی (δ_{12} و δ_{23}) بین سیلندرها می‌باشد به گونه‌ای که تنش محیطی بیشینه سیلندرها از تنش تسلیم کوچکتر و یا مساوی بوده ($\sigma_{\theta 1} \leq \sigma_y$ و $\sigma_{\theta 2} \leq \sigma_y$ و $\sigma_{\theta 3} \leq \sigma_y$) و حجم سیلندر ترکیبی کمینه باشد. حجم سیلندر با در نظر گرفتن طول واحد برای سیلندرها (به دلیل تنش صفحه‌ای بودن مسئله از تنش‌های طولی σ_z صرف نظر شده است) برابر است با:

$$V = \pi(r_4^2 - r_1^2) \quad (60)$$

جهت بهینه‌سازی مسئله، با در نظر گرفتن نسبت شعاع سیلندرها به صورت معادلات (۶۱) حالات زیادی برای پارامترهای C_1 ، C_2 و C_3 به صورت شمارشی با استفاده از برنامه‌نویسی کامپیوتری، در نظر گرفته شده است.

$$C_1 = \frac{r_2}{r_1} \quad C_2 = \frac{r_3}{r_2} \quad C_3 = \frac{r_4}{r_3} \quad (61)$$

با جایگذاری تمامی حالات C_1 ، C_2 و C_3 در معادلات (۴۶)، (۴۷)، (۴۸)، (۵۲)، (۵۳) و (۵۴)، مقادیر a و b و c و d و e و f ، به دست آمده و پس از جایگذاری در معادلات (۵۶) و (۵۷)، مقادیر P_{s12} و P_{s23} به دست می‌آید. سپس با جایگذاری δ_{12} و δ_{23} در معادلات (۵۸) و (۵۹)، مقادیر تداخل δ_{12} و δ_{23} محاسبه می‌گردد. لازم به ذکر است که هرکدام از مقادیر C_1 ، C_2 و C_3 از $1/1$ تا $1/5$ با گام 0.2 تغییر می‌کند و تمامی حالت‌های ترکیبی C_1 ، C_2 و C_3 در نظر گرفته شده است. تعداد حالت‌ها برای هرکدام از مقادیر C_1 ، C_2 و C_3 ، ۲۰ عدد و تعداد کل ترکیبات ۸۰۰۰ می‌باشد.

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \frac{1.5 - 1.1}{0.02} = 20 \quad (62)$$

$$\text{تعداد کل ترکیبات} = 20 \times 20 \times 20 = 8000 \quad (63)$$

با استفاده از تمامی ترکیبات در نظر گرفته شده برای C_1 ، C_2 و C_3 ، مقادیر تنش‌های محیطی $\sigma_{\theta 1}$ ، $\sigma_{\theta 2}$ و $\sigma_{\theta 3}$ محاسبه می‌گردد و تنش‌هایی که مقادیر آنها از تنش تسلیم کمتر و یا مساوی آن هستند انتخاب می‌شوند و از بین آنها حالتی که در آن حجم سیلندر کمتر از بقیه می‌باشد به عنوان طراحی بهینه لحاظ می‌شود.

۸- تحلیل و صحه‌گذاری به کمک نرم‌افزار اجزا محدود

با اجرا کردن برنامه متلب با توجه به ورودی‌های مسئله که شامل شعاع داخلی سیلندر اول و همچنین مدول یانگ، تنش تسلیم، ضریب پواسون، چگالی، فشار داخلی و سرعت دورانی می‌باشد، تعداد زیادی ترکیبات سیلندر به دست می‌آید که شرایط مسئله

$$a \times (P_{s12}) + b \times (P_{s23}) = e \quad (49)$$

با مساوی قرار دادن رابطه (۳۸) و (۳۹) دو معادله و دو مجهول به دست می‌آید و مسئله حل می‌گردد.

$$\sigma_{\theta 2} = \sigma_{\theta 3} \quad (50)$$

$$P_{s12} \left[\frac{(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} \right] - P_{s23} \left[\frac{2(r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{(r_4^2 + r_3^2)}{r_4^2 - r_3^2} \right] = \frac{P_i r_1^2}{r_3^2} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] - \frac{P_i r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] - \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + v_2)(r_2^2 + 2r_3^2) - (1 + 3v_2)r_2^2] + \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + v_3)(r_3^2 + 2r_4^2) - (1 + 3v_3)r_3^2] \quad (51)$$

اگر ضرایب P_{s12} و P_{s23} و همچنین ثابت معادله را به ترتیب d و e و f فرض شود:

$$c = \frac{(r_3^2 + r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} \quad (52)$$

$$d = \frac{2(r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{(r_4^2 + r_3^2)}{r_4^2 - r_3^2} \quad (53)$$

$$f = \frac{P_i r_1^2}{r_3^2} \left[\frac{r_4^2 + r_3^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] - \frac{P_i r_1^2}{r_2^2} \left[\frac{r_4^2 + r_2^2}{r_4^2 - r_1^2} \right] - \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + v_2)(r_2^2 + 2r_3^2) - (1 + 3v_2)r_2^2] + \frac{\rho \omega^2}{8} [(3 + v_3)(r_3^2 + 2r_4^2) - (1 + 3v_3)r_3^2] \quad (54)$$

معادله (۵۱) به صورت معادله (۵۵) باز نویسی می‌شود.

$$c \times (P_{s12}) + d \times (P_{s23}) = f \quad (55)$$

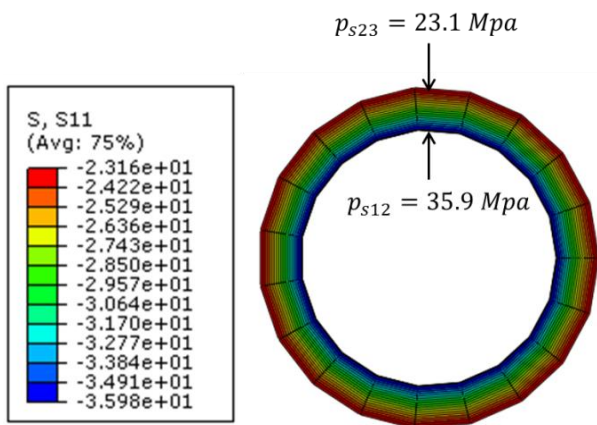
اکنون دو معادله و دو مجهول به دست می‌آید (معادلات (۴۹) و (۵۵)) که با حل آنها فشار تماسی بین سیلندرها به دست می‌آید.

$$P_{s12} = \frac{(ed - bf)}{(ad - bc)} \quad (56)$$

$$P_{s23} = \frac{(af - ec)}{(ad - bc)} \quad (57)$$

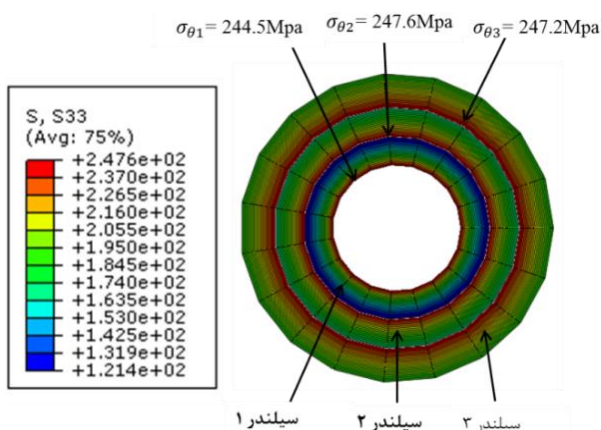
در واقع فشار تماسی بین سیلندرها (P_{s12} و P_{s23}) به گونه‌ای محاسبه شد که تنش محیطی در شعاع داخلی سیلندرها که بر اثر فشار داخلی، انطباق پرسی و دوران به وجود می‌آید با یکدیگر برابر شوند. اکنون می‌توان با استفاده از معادلات (۲۶) و (۳۱)، تداخل سیلندرها را که این فشار تماسی (P_{s12} و P_{s23}) را به وجود می‌آورد محاسبه نمود.

$$\delta_{12} = \frac{r_2}{E2} \left[P_{s12} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + v_2 \right) - \frac{2p_{s23} (r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} \right] + \frac{P_{s12} r_2}{E1} \left[\left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) - v_1 \right] \quad (58)$$



شکل ۱۰ توزیع تنش شعاعی در سیلندر شماره ۲

همان‌طور که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، تنش تماسی بین سیلندر ۱ و ۲، (p_{s12}) ، 35.9 MPa و تنش تماسی بین سیلندر ۲ و ۳، (p_{s23}) ، 23.1 MPa می‌باشد. حال مسئله با در نظر گرفتن فشار داخلی و سرعت دورانی به منظور به دست آوردن توزیع تنش محیطی در شعاع سیلندرها، شبیه‌سازی شده است. شکل ۱۱ نشان دهنده توزیع تنش محیطی سیلندرها، ناشی از فشار داخلی و سرعت دورانی و همچنین انطباق پرسی سیلندرها می‌باشد. در محاسبات تحلیلی تنش محیطی بیشینه در شعاع داخلی سیلندرها برابر بوده و مساوی 249.9 MPa می‌باشد. همان‌طور که در شکل مشخص است، در شبیه‌سازی تنش محیطی بیشینه در شعاع داخلی سیلندرها به وجود آمده است که بیشینه تنش محیطی در سیلندر اول 244.5 MPa ، در سیلندر دوم 247.7 MPa و در سیلندر سوم 247.2 MPa می‌باشد. شکل ۱۲ مقایسه بین منحنی توزیع تنش محیطی در سیلندرها با استفاده از معادلات تحلیلی و شبیه‌سازی انجام شده در آباکوس را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱ توزیع تنش محیطی ناشی از دوران، فشار داخلی و انطباق پرسی

را ارضا کند از میان تعداد زیاد جواب‌های به دست آمده، جوابی قابل قبول می‌باشد که حجم سیلندر کمینه باشد. جدول ۱ پارامترهای ورودی مسئله و جدول ۲ جواب بهینه به دست آمده که در آن حجم سیلندر کمترین مقدار است را نشان می‌دهد.

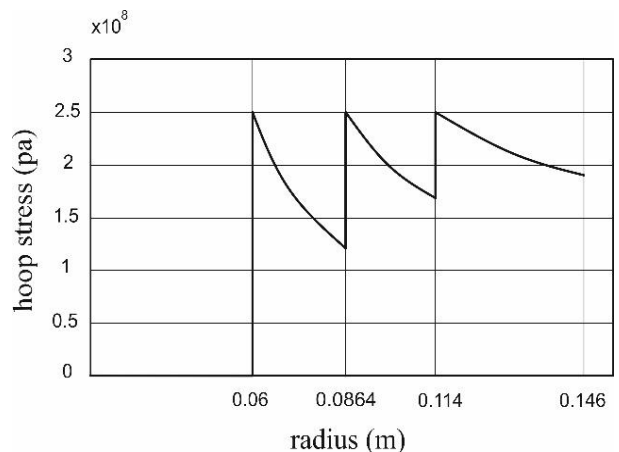
جدول ۱ پارامترهای ورودی

پارامتر ورودی	r_1 (mm)	E (GPa)	ν	ρ ($\frac{kg}{m^3}$)	σ_y (MPa)	P_i (MPa)	ω (RPM)
مقدار	۶۰	۲۰۰	۰/۳	۷۸۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۵۰۰۰

جدول ۲ پارامترهای خروجی

پارامتر خروجی	C_1	C_2	C_3	r_2 (mm)	r_3 (mm)	r_4 (mm)
مقدار بهینه	۱/۴۴	۱/۳۲	۱/۲۸	۸۶/۴	۱۱۴	۱۴۶
پارامتر خروجی	δ_{12} (mm)	δ_{23} (mm)	p_{s12} (MPa)	p_{s23} (MPa)	$\sigma_{\theta 1}$ (MPa)	$\sigma_{\theta 2}$ (MPa)
مقدار بهینه	۰/۰۵۶	۰/۰۴۶	۳۶/۴	۲۳	۲۴۹/۹	۲۴۹/۹

در شکل ۹ توزیع تنش بر حسب r برای سیلندر بهینه‌سازی شده نشان داده شده است که در آن تنش در شعاع $r = 0$ تا شعاع $r = 60$ صفر است.



شکل ۹ توزیع تنش محیطی سیلندر ترکیبی بهینه

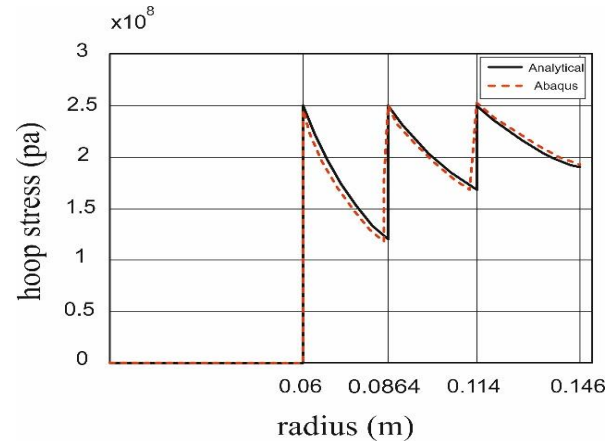
به منظور صحت‌گذاری بر نتایج تحلیلی، مسئله در نرم‌افزار آباکوس شبیه‌سازی شده و با استفاده از داده‌های جداول ۱ و ۲ یک سیلندر سه لایه در حالت تقارن محوری مدل‌سازی گردید. نتایج فشار به وجود آمده بین سیلندرها در حالتی که فشار داخلی و سرعت دورانی صفر هنوز اعمال نشده است و تنش شعاعی بین سیلندرها فقط به دلیل انطباق پرسی است که در شکل ۱۰ آورده شده است. در این شکل به منظور نشان دادن فشار تماسی بین سیلندرها، فقط سیلندر دوم آورده شده است.

۹- نتیجه گیری

در این تحقیق به بررسی سیلندر چندلایه تحت فشار داخلی و در حال چرخش پرداخته شد. بسته به سرعت دوران، جنس و توزیع جرمی این سیلندرها، علاوه بر بارگذاری فشار داخلی، تحت بارهای گریز از مرکز قرار گرفت. در سیلندرهایی چندلایه با اعمال پیش‌بار ناشی از انطباق پرسی، از شدت تنش محیطی ناشی از فشار داخلی کاسته می‌گردد و باعث می‌گردد که از ظرفیت شعاع‌های بیرونی سیلندر جهت مقاومت برابر فشار داخلی استفاده گردد. این به این مفهوم است که اگر به طور مثال، سیلندری یک‌تکه، مطابق با ابعاد سیلندر چندتکه طراحی شده در این تحقیق، تحت فشار داخلی 250 MPa و سرعت دورانی 5000 RPM قرار گیرد، تنش محیطی در شعاع‌های داخلی سیلندر زیاد می‌باشد و از حد تنش تسلیم بیشتر می‌شود و در شعاع‌های انتهایی سیلندر از شدت آن کاسته می‌گردد. با این روش بهینه‌سازی ارائه شده، شدت تنش محیطی در تمامی نقاط سیلندر به تنش تسلیم نرسیده و همچنین تنش در تمامی شعاع سیلندر تحمل می‌گردد و از ظرفیت شعاع‌های بیرونی سیلندر استفاده بهینه می‌شود. روش ارائه شده در این تحقیق در طراحی درام دوار موتور توربینی هوایی کاربرد ویژه دارد.

مراجع

- [1] Nadai, A., *Theory of flow and fracture of solids*, V. 2, McGraw-Hill, New-York, (1963).
- [2] Sechler, Ernest Edwin, *Elasticity in engineering*, Dover Publications, (1952).
- [3] Landau, L., Lhitz, L., *Theory of elasticity*, Pergamon Press, New-York, (1964).
- [4] Timoshenko, S., Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, (1970).
- [5] Volterra, E., Gaines, J. H., *Advanced strength of materials*, Prentice-Hall, (1971).
- [6] Boresi, Arthur P., Chong, K., Lee, J. D., *Elasticity in engineering mechanics*, John Wiley & Sons, (2010).
- [7] Love, Augustus Edward Hough, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge university press, (2013).
- [8] Haerle, H., The strength of rotating discs, *Engineering 106*, pp.131-134, (1918).
- [9] Majzoubi, G. H., Ghomi A., Optimization of compound pressure cylinders, *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, Vol. 15, No.(1-2), pp. 135-145, (2006).



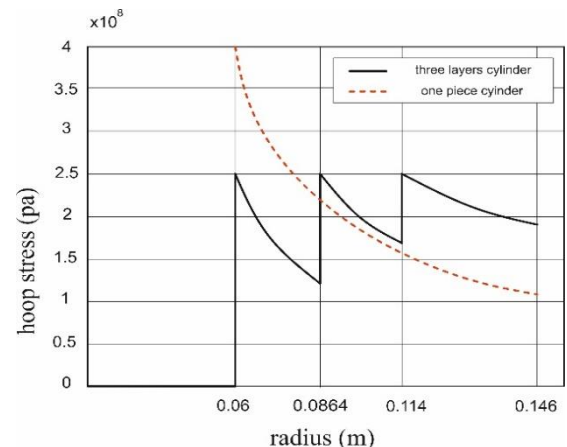
شکل ۱۲ مقایسه بین توزیع تنش محیطی تحلیلی و نتایج در آباکوس

جدول ۳ تنش‌های به دست آمده با استفاده از معادلات تحلیلی و شبیه‌سازی انجام شده در آباکوس و اختلاف آنها با یکدیگر را نشان می‌دهد.

جدول ۳ اختلاف بین نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی شده

پارامتر ورودی	مقدار حاصل از روابط تحلیلی	مقدار حاصل از آباکوس	درصد اختلاف
$p_{s12} (Mpa)$	۳۶/۴	۳۵/۹	۱/۳
$p_{s23} (Mpa)$	۲۳	۲۳/۱	۰/۴
$\sigma_{\theta 1} (Mpa)$	۲۴۹/۹	۲۴۴/۵	۱/۸
$\sigma_{\theta 2} (Mpa)$	۲۴۹/۹	۲۴۷/۷	۰/۵
$\sigma_{\theta 3} (Mpa)$	۲۴۹/۹	۲۴۷/۲	۰/۷

شکل ۱۳ مقایسه بین منحنی توزیع تنش محیطی در سیلندر چندتکه طراحی شده از یک جنس با سیلندر یک‌تکه از همان جنس و ابعاد با شرایط نیرویی یکسان را نشان می‌دهد.



شکل ۱۳ مقایسه بین منحنی توزیع تنش محیطی در سیلندر سه‌تکه طراحی شده با سیلندر یک‌تکه با همان ابعاد

- [15] Majumde, T., Sarkar, S., Mondal, S. Ch., Mandal, D. K., Optimum Design of Three Layer Compound Cylinder, *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)*, Vol. 11, No. 3, Ver. III, pp. 33-41, (2014).
- [16] Kazemzadeh Azad, S., Akis, T., A Study of Shrink-Fitting for Optimal Design of Multi-Layer Composite Tubes Subjected to Internal and External Pressure, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, Vol. 43, pp. 451-467, (2018).
- [17] Abdelsalam, R. Ossama, Design optimization for a three-layers shrink-fitted pressure vessel exposed to very high pressure, *18th International Conference on Aerospace Sciences & Aviation Technology, Materials Science and Engineering*, Cairo, Egypt. 9-11 April (2019).
- [18] Salehi Kolahi, M. R., Karamooz, M., Rahmani, H., Elastic analysis of Shrink-fitted Thick FGM Cylinders Based on Linear Plane Elasticity Theory, *Mechanics of Advanced Composite Structures, Department of Mechanical Engineering*, Vol. 7, pp.121-127, (2020).
- [10] Shi, Z., Zhang, T., Xiang, H., Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, *Composite Structures*, Vol. 79, pp. 140-147, (2007).
- [11] Zhang, Q., Wang, Z. W., Tang, C. Y., Hu, D. P., Liu, P. Q., Xia, L. Z., Analytical solution of the thermo-mechanical stresses in a multilayered composite pressure vessel considering the influence of the closed ends, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, pp. 102-110, (2012).
- [12] Jabbari, M., Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads, *Int. J. Pressure Vessels*, Vol. 79, pp. 493-497, (2002).
- [13] Majeed Algbory, Abdul Munium Razoki, Stress analysis of the multi-layered thick cylinders, *Al-Qadisiyah Journal for Engineering Sciences*, Vol. 4, No. 2, (2011).
- [14] Sunil, A. Patil, Finite element analysis of optimized compound cylinder, *Journal of Mechanical Engineering Research*, Vol. 5 No. 5, pp. 90-96, (2013).